GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1942

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Premiile, bursele şi publicaţiile Societăţii „Gazeta Matematică".
4. Raport pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu" . . . . . } *Comisiunea pentru premii.*
5. Note matematice: 1.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 316.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 4618, 5246, 5345, 5446, 5423, 5543, 5550, 5592, 5603.
10. Exerciţii: 1.
11. Probleme propuse: 5691—5702.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea **„Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAIE LUNARĂ

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XLVIII

15 SEPTEMVRIE 19 — 15 AUGUST 1943

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

DELEGAȚIUNEA SOCIETĂȚII PENTRU ANUL 1942 *)

GABRIELA ȚIȚEICA, AL. PANTAZI, AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ"

GENERAL GH. BUICLIU și I. IONESCU. Membri delegați pentru: cereri, diverse și suplimente.

O. N. ȚINO ajutat de AL. PANTAZI și M. SARIAN. Raportori.

G-L GH. BUICLIU, G-L GH. I. LITEANU și D. V. STOICA. Membri delegați pentru: schimburi de reviste și primirea lor, reclamațiuni privitoare la tipărire, primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare.

G. G. CONSTANTINESCU, GH. ILIESCU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. PANTAZI, F. PĂSĂRICĂ și M. SARIAN. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.

G-L GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, M. GHERMĂNESCU, C-DOR I. LINTEȘ, O. N. ȚINO și C-DOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică.

E. ARGHIRIADE, D. BARBILIAN, ADRIAN GHEORGHIU, VIRGIL GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, AL. PANTAZI, AL. ROȘU, G. D. SIMIONESCU și D. V. STOICA. Membri delegați pentru geometrie.

IUL. ALEXIU, I. S. ANTONIU, GH. TH. GHEORGHIU, VIRGIL GHIȚESCU, G-L GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru trigonometrie.

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier (Art. 14 din Statute).

TH. ANGHELUȚĂ, P. BENEȘ, G. G. CONSTANTINESCU, OTILIA GEORGESCU-ROEGEN, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, H. P. IONESCU, AL. ROȘU, O. N. ȚINO și Ș. ȚIȚEICA. Membri delegați pentru algebra elementară.

I. ALEXIU, P. BENEȘ, M. BOTEZ, I. CHIȚULESCU, GH. DUMITRESCU, AL. NICULESCU, AL. PANTAZI și GH. D. SIMIONESCU. Membri delegați pentru geometrie descriptivă.

I. S. ANTONIU, EM. BOTEA, GH. D. SIMIONESCU, AL. STOENESCU, C. C. TEODORESCU și GABRIELA ȚIȚEICA. Membri delegați pentru mecanică.

N. ABRAMESCU, G-L GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, CPT. M. FOCȘENEANU, GH. TH. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, O. N. ȚINO și Ș. ȚIȚEICA. Membri delegați pentru geometria analitică.

G. G. CONSTANTINESCU, C. IONESCU-BUJOR, G-L GH. LITEANU și AL. STOENESCU. Membri delegați pentru cosmografie.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUȚĂ, D. V. IONESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, AL. PANTAZI, TIB. POPOVICIU, O. N. ȚINO și P. SERGESCU. Membri delegați pentru articole și note de matematici superioare.

N. ABRAMESCU, I. IONESCU, V. MARIAN și P. SERGESCU. Membri delegați pentru istoria matematicilor.

I. IONESCU, O. ONICESCU, P. SERGESCU și GH. ZAPAN. Membri delegați pentru filosofia matematicei.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, D. V. IONESCU, AL. PANTAZI, TIB. POPOVICIU, P. SERGESCU și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru probleme propuse de matematici superioare.

O. N. ȚINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.

I. ALEXIU, GH. DUMITRESCU, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, CPT. C. IONESCU-ȚIU, G-L GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU și CPT. I. GH. ZAMFIRESCU. Membri delegați pentru exerciții.

P. BENEȘ, GH. TH. GHEORGHIU, P. SERGESCU, GABRIELA ȚIȚEICA, Ș. ȚIȚEICA, CPT. I. GH. ZAMFIRESCU și CD. GR. ZAPAN. Membri delegați pentru chestiuni de examen.

G-L GH. BUICLIU și C. IONESCU-BUJOR. Membri delegați pentru alcătuirea tablei de materii.

I. ALEXIU, G-L GH. BUICLIU, C-DOR I. LINTEȘ, GH. D. SIMIONESCU și CPT. I. GH. ZAMFIRESCU. Membri delegați pentru cercetarea prealabilă a soluțiilor pentru întocmirea copertei.

MEMBRII

1	1907, Iulie 1*	ABRAMESCU NICOLAE. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe Timişoara. — Str. Mocioni, 10. Timişoara.
2	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.
3	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licenţiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. Bucureşti 4.
4	1938, Febr. 17	ALEXIU IULIAN. Inginer constructor. Licenţiat în Ştiinţe Matematice. — Şef de birou technic în Direcţiunea de Poduri C. F. R., Azistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Mihail Cornea, 41. Bucureşti 2.
5	1940, Aug. 28	ANDONIE GH. Inginer de mine. — Directorul minelor. Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Braziliei, 18. Bucureşti 3.
6	1940, Febr. 8	ANDRONESCU PLAUTIUS. Doctor-Inginer. — Profesor, Politehnica Timişoara.
7	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii „Regele Ferdinand I". — Str. Eugen de Savoia, 9. Timişoara.
8	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer Inspector General. — Membru în Consiliul Technic Superior. Subdirector în Direcţiunea Generală a Drumurilor M. L. P. — Str. C. Dissescu, 17. Bucureşti 2.
9	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer electrician, Diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi de Electricitate din Bucureşti. — Calea Floreasca, 150. Tel. 29437. Bucureşti 3.
10	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Doctor în Matematici. — Profesor la Colegiul Naţional Sft. Sava. — Str. Banu Manta, 77. Bucureşti.
11	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Astronom la Observatorul Astronomic. Timişoara.
12	1941, Iunie 5	AVRAMESCU AUREL. Doctor-Inginer electrician dela Politehnica din Dresda. – Şef Serv. Studii Soc. G-lă Gaz şi Electricitate. Azistent la Politehnică. Bucureşti.
13	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Subdirector în Direcţiunea Generală a Drumurilor. — Str. Barbu Delavrancea, 51. Bucureşti 2.
14	1940, Febr. 8	BĂDĂRĂU EUGEN. Doctor în Fizică. Profesor universitar. — Str. Academiei, 4. Et. II. Bucureşti.
15	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director S. T. B. Azistent la Politehnica din Bucureşti. — B-dul Mareşal Antonescu, 38. Bucureşti.
16	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici şi Docent al Universităţii din Geneva. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 12. Bucureşti.

*) Data admiterii.

17	1942, Aug. 27	BĂDULESCU ALEXANDRA. Licenţiată în Matematici a Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti. — Profesoară de Matematici la Liceul din Târgul Ocna.
18	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Mayo, 560. Republica Argentina.
19	1940, Aug. 28	BĂLAN G. ŞTEFAN. Inginer Constructor. — Azistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. G-l Berthelot, 80. Bucureşti 2.
20	1941, Sept. 18	BALLAN EUGEN. Inginer electromecanic. Licenţiat în Matematici Facult. de Ştiinţe din Bucureşti.—Director General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Brezoianu, 29. Bucureşti.
21	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.
22	1940, Febr. 8	BENEŞ PAUL. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. Bibliotecar la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. — Str. Vaporul lui Asan, 13. Bucureşti.
23	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Director General al Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 49. Bucureşti 2.
	1938, Febr. 17	BOTEA G. EMIL. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Secţia construcţii. — Subşef de serviciu în Administraţia Comercială a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe apă. — Aleea Alexandru, 11. Bucureşti.
25	1935, Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar pentru Geometria Descriptivă la Politehnica Gh. Asachi. — Str. N. Iorga, 24. Cernăuţi.
26	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2.
27	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Cpt. Licenţiat în Matematici. Absolvent al Secţiei de Radio-Comunicaţii dela Şcoala Politehnică Bucureşti. — Str. Aviator Iliescu, 31. Bucureşti 3.
28	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Washington, 32. Bucureşti 3.
29	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General/r. din Artilerie. — Fost Secretar general la Ministerul Apărării Naţionale. Însărcinat cu conferinţe la Politehnica din Bucureşti.— Str. M. Cogălniceanu, 10. Bucureşti 2.
30	1938, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General. — Directorul Podurilor C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
31	1924, Ian. 30	BUNESCU D. AL. Inginer S. N. P. S. — Fost Secretar general la Ministerul Lucrărilor publice şi Comunicaţiilor. — Str. Armenească, 17 bis. Bucureşti 1.
32	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Lt.-Col. de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Artilerie antiaeriană din Metz (Franţa). Brevetat de Stat Major al Şcoalei Superioare de Război din Paris. — Comand. Centr. de Instr. al Art. ant. aer. şi al Şcoalei de ofiţeri de Artilerie antiaeriană. — Str. Franzelari, 19. Bucureşti.

33	1920, Ian. 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer Inspector General. Director C. F. R. — Str. Lăzureanu, 48. Bucureşti 6.
34	1939, Aug. 31	BURILEANU ŞTEFAN. General. Licenţiat şi Doctor în Matematici dela Paris. — Profesor Uuiversitar onorar. Profesor de metalurgie. Consilier general tehnic al Uzinelor şi Oţelăriilor Malaxa. — Str. General Berthelot, 95. Bucureşti 2.
35	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer-Şef. — Subşef de serviciu. Direcţiunea atelierelor C. F. R. Azistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Vaselor, 40 Bis. Bucureşti 4.
36	1910, Oct 25	BUŞILĂ D. C. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. (Telefon 2-4661).
37	1921, Mai 4	BUŞILĂ G. IOAN. Inginer Inspector General. — Membru în delegaţia Consiliului Tehnic-Superior. — Str. Dr. Lueger, 8 bis. Bucureşti 1.
38	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer-Şef. — Directorul Intreţinerii din Direcţiunea Generală a Drumurilor. Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. — Str. Simonide, 3. Bucureşti 1.
39	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
40	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
41	1942, Aug. 27	CARACOSTEA D. ANDREI. Inginer absolvent al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inspector ajutor în Direcţiunea de Poduri C. F. R. — B-dul Lascăr Catargiu, 28. Bucureşti 3.
42	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat şi Doctor în Ştiinţe dela Sorbona. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Popa Savu, 42. Bucureşti 2.
43	1920, Mart. 1	CARAMAN ERMIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alecsandri" din Galaţi, fost prefect şi deputat de Covurlui. — Str. Domnească, 170 A. Galaţi.
44	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Azistent la Politehnica din Bucureşti. Antreprenor. — Str. Popa Tatu, 81. Bucureşti 2.
45	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. Colonel de Artilerie. — Str. G-ral Ipătescu, 20. Bucureşti.
46	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef. — Str. G-ral Angelescu, 44. Bucureşti 2.
47	1939, Aug. 31	CAZANACLI V. PETRE, Licenţiat în Matematici. — Profesor titular. — Str. G-ral Dragalina, 27. Chişinău.
48	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Regia Autonomă C. F. R. — Str. Italiană, 30. Bucureşti 1.
49	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer Inspector General.— Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Str. Oţetari, 8. Bucureşti 1.

50	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer Inspector General. — Director în Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Iancu Căpitanu, 44. Bucureşti 4.
51	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer. — Administrator Industrial. Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.
52	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Buzeşti, 98. Bucureşti 2.
53	1940, Febr. 8	CIORAPCIU F. MIRCEA. Inginer Constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Ţepeş Vodă, 34. Bucureşti 4.
54	1939, Dec. 7	CLAUDIAN VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti. — Str. Lt. Radu Robescu, 24. Bucureşti.
55	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GEORGE. Inginer diplomat. — Administrator delegat al Soc. „Sarotec" S. A. R. — Str. B. Mussolini, 2 Bucureşti 3.
56	1938, Aug. 31	CONSTANTINESCU G. G. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Aquila, 10. Bucureşti 6.
57	1895, Sept. 15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Fost Ministru. — Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
58	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer, Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Inspector conducător al Atelierelor E. C. F. R. Filaret. — Str. Gh. Popescu, 1. Bucureşti.
59	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — Inginer în Biroul studii Avioane al Uzinei I. A. R. din Braşov. — Fabrica de Avioane I. A. R. Str. Mihail Eminescu, 17. Braşov.
60	1941, Febr. 20	COSTĂCHESCU V. CONSTANTIN. Căpitan. — Comandantul Submarinului „Delfinul". Profesor la Şcoala Navală. — Nava bază Constanţa.
61	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Str. Polonă, 57. Bucureşti.
62	1939, Dec. 7	CRĂCIUNEANU CONST. Căpitan. — B-dul Mărăşti, 47. Bucureşti 2.
63	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Cuza Vodă, 58. Focşani.
64	1941, Iunie 5	DINESCU P. ALEX. TUDOR. Inginer Constructor. — Azistent suplimentar la Şcoala Politehnică Bucureşti. Şef de Secţie la R. A. C. F. R. — Str. Eufrosina Poteca, 5. Bucureşti 4.
65	1939, Febr. 23	DOBRESCU ANDREI. Licenţiat în Matematici. — Profesor de matematici la Liceul industrial de construcţii civile şi edilitare din Bucureşti.
66	1939, Aug. 31	DONCIU NICOLAE. Licenţiat în Matematici. — Profesor Liceul militar Târgovişte. — Str. Heliade Rădulescu, 35. Târgovişte.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

67	1939, Dec. 7	DRAGOMIRESCU-BUZNE EDUARD. Căpitan de Artilerie, brevetat de Stat Major. — Profesor de Construcţii de guri de foc şi muniţiuni la şcoalele pregătitoare şi de aplicaţie de Artilerie. — Str. General Anghelescu, 159. Bucureşti.
68	1936, Febr. 27	DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic. — Director al Uzinelor Astra şi Union. — Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3.
69	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef, — Inspector tehnic C. F. R. — Str. Principele Nicolae, 22. Craiova.
70	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor Colegiul Naţional Sf. Sava Bucureşti. Director general al învăţământului profesional din Ministerul Culturii Naţionale. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti 6.
71	1936, Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B. — Azistent la „Rezistenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer la Direcţiunea Economatului C. F. R. — Str. Cuza Vodă, 94. Bucureşti 2.
72	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Şos. Ştefan cel Mare, 218. Bucureşti 1.
73	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer constructor S. P. B.. — Inginer C. F. R. Azistent la Politehnica Bucureşti. — Str. Vaselor, 28. Bucureşti 4.
74	1938, Febr. 17	FLORIAN ZAHARIA. Licenţiat în Matematici. Actuar expert. — Profesor. Director la Societatea de Asigurare „Naţionala". — B-dul Elisabeta, 95 bis A. Bucureşti.
75	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Brevetat de Stat Major. — Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Str. Porumbaru, 33. Bucureşti 3.
76	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
77	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer. — Fost Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii. Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Str. Wilson, 13. Etaj II, apart. 7. Bucureşti 1.
78	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Str. Gh. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
79	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. NICOLAE. Inginer Inspector General. — Director C. A. M. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
80	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică dela Universitatea din Paris. — Director în Ministerul Economiei Naţionale. Profesor la Şcoala de Statistică. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
81	1939, Dec. 7	GEORGESCU-ROEGEN OTILIA. Licenţiată în Matematici. — Profesoară secundară. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
82	1934, Dec. 19	GEORGESCU VAL. N. ION. Căpitan de Artilerie. Inginer Electro-Mecanic. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — M. I. A. Dir. Tehnică. — Str. Bitolia, 28. Bucureşti 3.

83	1938, Aug. 31	GHEORGHIEŞ AL. General/r. de Artilerie. — Str. Mântuleasa, 5. Bucureşti.
84	1936, Febr. 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici. Arhitect. — Str. G-ral Magheru, 209. Bucureşti 2.
85	1941, Iunie 5	GHEORGHIU ALEXANDRU. Inginer constructor. — Directorul Soc. Anonime de Mine de granit, din Poeni. Azistent la Şcoala Politehnică. — Calea Victoriei, 128. Bucureşti.
86	1932, Apr. 2(	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Şc. Politehnică Timişoara.
87	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
88	1913, Aug. 30	GHEORGHIU A. MIRCEA. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Subdirectorul Navigaţiei Fluviale Române. — Str. Aviator Iliescu, 44. Bucureşti 3.
89	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică al Universităţii din Paris. — Directorul Statisticei financiare. — Str. Berzei, 5. Bucureşti 1.
90	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică Timişoara.
91	1939, Dec. 7	GHERMANI DIONISIE. Inginer, constructor şi electrician. — Profesor. Decan al Facultăţii de Construcţii din Politehnica din Bucureşti. Membru în diverse Comitete şi consilii Tehnice ale Statului. Adm. Delegat la Soc. Edilitatea. — Str. Paris, 45. Bucureşti 3.
92	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. AL. Lt.-Col. Inginer Radio-electrician. E. S. E. — Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2.
93	1939, Febr. 23	GHIRCOIAŞU V. N. Licenţiat în Matematici.—Azistent suplinitor Seminarul de Algebră superioară. — Facultatea de Ştiinţe. Timişoara.
94	1936, Aug. 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer U. D. R. Bucureşti. — Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3.
95	1942, Aug. 27	GHIŢESCU SPIRIDON. Licenţiat în Matematici, Diplomat al Institutului de Statistică din Bucureşti.— Profesor secundar la Liceul comercial „Petru Rareş" din Bucureşti.— Str. Al. Constantinescu, 1. Piaţa Domeniilor, Bucureşti. Telefon 4.72.32.
96	1931, Mart. 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceu „Dr. Ioan Meşotă" din Braşov. — Str. Dorobanţilor, 5. Braşov.
97	1941, Iunie 5	GORCIU GH. VASILE. Licenţiat în Matematici. — Azistent suplinitor la Şcoala Politehnică. — Str. Carol, 110. Bucureşti.
98	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Iuginer. Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
99	1936, Febr. 27	GUŢU I. AL. Inginer. — Inginer la Societatea Petroşani. Azistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.

100	1941, Iunie 5	GUŢU ION. Inginer constructor. — Inginer în Direcţia Podurilor C. F. R. — Str. Vişinilor, 2. Bucureşti 4.
101	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer. — Director C. A. M. — Cartierul C. A. M. Filaret. Str. B, 12. Bucureşti 6.
102	1927, Ian. 28	HANGANU M. D. Doctor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris.— Director la C. A. M. Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti 6.
103	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Şeful serviciului M. II Mărfuri din Direcţia Mişcării C. F. R. — Str. Petre Poni, 7. Bucureşti 2.
104	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
105	1895, Sept. 15 (fondator)	IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer S. P. S. Licenţiat în Matematici. Paris. — Profesor onorar la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Pensionar. Str. Buzeşti, 74. Bucureşti 2.
106	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer. Şcoala Politehnică Bucureşti. — Str. Buzeşti, 74. Bucureşti 2.
107	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
108	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Timişoara.
109	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Matematici. — Str. Agricultori, 15. Ap. 13. Bucureşti.
110	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU ION. Inginer Inspector General. — Profesor onorific al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Membru în consiliul Colegiului Inginerilor. Membru Corespondent al Academiei Române. — Str. Răsuri, 25. Bucureşti 3.
111	1941, Febr. 20	IONESCU I. PAUL. Profesor titular. Liceul comercial „Gh. Chiţu." Inspector General în M. Ed. N. — Str. Banu Mihalcea, 29. Craiova.
112	1939, Febr. 23	IONESCU TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Inspector şcolar. — Str. Sandu Aldea, 35. Bucureşti 2.
113	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR CONSTANTIN. Licenţiat în Matematici. — Profesor — Directorul Liceului internat Buftea.
114	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU D. C. Cpt. din Geniu, Licenţiat în Matematici. — Profesor de matematici la Şcoala pregătitoare de ofiţeri de geniu.— Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
115	1932, Apr. 20	IONESCU ZANE D. GH. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. Secţia Mine şi Metalurgie. — Director la ad-ţia comercială a Monopolului Alcoolului. — Str. Fabrica de Chibrituri, 34. Bucureşti.
116	1936, Febr. 27	ISTRATI CONSTANTIN. Comandor-Inginer. — Comandantul Şcolii Tehnice a Aeronauticei Mediaş.
117	1936, Febr. 27	LAMOTH PETRU. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Profesor la Liceul „Banaţia". — Piaţa Tebec, 2. Timişoara.

118	1939, Febr. 23	LASCU BAL. Licenţiat în Matematici.
119	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer-Şef. — Director în Administraţia C. A. M. Asistent la Şcoala Politehnică. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.
120	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Directorul Şcoalei de Electricieni şi Mecanici. — Bul. Regele Albert, 35. Bucureşti.
121	1919, Sept. 12	LINTEŞ ION. Comandor. Doctor-Inginer. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Comisar General-ajutor pentru Industriile de metalurgie şi armament. — Str. Zoe Râmniceanu, 10 B. Bucureşti 2.
122	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. General de artilerie, pensionat.—Str. Spătarului, 54. Telefon 2-0940. Bucureşti 1.
123	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Liceul Militar „D. A. Sturdza". Craiova.
124	1934, Dec. 19	MALAXA C. ELENA. Licenţiată în Matematici şi Fizico-Chimice. — Profesoară secundară şi Directoarea Şcolii Centrale de fete din Bucureşti. — Str. General Lahovary, 3. Bucureşti 3.
125	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
126	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
127	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Str. I. G. Duca, 60. Bucureşti.
128	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Bd. Dacia, 41. Bucureşti 3.
129	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Str. Lânăriei, 80. Vila 26. Bucureşti 6.
130	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Direcţia Generală a Drumurilor. — Intrarea Geneva, 6. Bucureşti 3.
131	1939, Dec. 7	MARIAN VICTOR. Doctor în Fizică. Licenţiat în Fizico-Matematici.— Azistent la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Bul. Diaconovici Loga, 1 A. — Timişoara.
132	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Azistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti. — Calea Dorobanţilor, 1. Vila B. Bucureşti 3.
133	1939, Aug. 31	MEREUŢĂ EM. Licenţiat în Matematici. — Str. Niculescu Bazar, 7. Parcul Ianculuí. Bucureşti.
134	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Intreţinere C. F. R. — Str. Ştefan Burcuş, 12. Bucureşti 2.
135	1939, Dec. 7	MICLESCU ANDREI. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Fizico-chimice, brevetat al Şcoalei de Război din Paris. — Profesor de matematici la diferite şcoli militare. — Str. Delea Veche, 15 bis. Bucureşti 4.

136	1942, Aug. 27	MIHĂIESCU S. ŞTEFAN. Inginer, Diplomat al Şcolii Politehnice din Bucureşti. — Societatea Concordia. — Uzinele Metalurgice Concordia. Ploeşti.
137	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Vulturilor, 63. Bucureşti.
138	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti 6.
139	1939, Dec. 7	MIHOC GHEORGHE. Doctor în Matematici. — Azistent la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. Director în Casa Centrală a Asigurărilor Sociale. — Str. Agricultori, 83. Bucureşti 4.
140	1939, Aug. 31	MIHU CERCHEZ. Licenţiat în Matematici. — Str. Varnale 5. Bucureşti.
141	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Şef la Societatea „Concordia". Gura Ocniţei. Jud. Dâmboviţa. — Aleea Eminescu, 14. Ploeşti.
142	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceu „N. Bălcescu" din Brăila. — Str. Galaţi, 71. Brăila.
143	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer Inspector General. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
144	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer Inspector General. Licenţiat în Matematici. — Director Tehnic Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovari, 1 A. Bucureşti 3.
145	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. Bucureşti.
146	1940, Febr. 8	MIU M. ION. Inginer Constructor. Licenţiat în Matematici. — Inginer la Direcţia Poduri C. F. R. — Gara de Nord. Bucureşti 2.
147	1939, Febr. 23	MORŢUN EMIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „I. C. Brătianu". Piteşti.
148	1932, Febr. 21	NEAMŢU PETRE. Inginer. — Director General S. T. B. — Str. Roma, 59. Bucureşti 3.
149	1928, Aug. 29	NEGURĂ GR. ST. Licenţiat în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Profesor definitiv la Liceul Codreanu din Bârlad. — Str. Dobranici, 16. Bârlad.
150	1939, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer. — Str. Agricultori, 15. Bucureşti.
151	1910, Mai 21	NICHIFOR A. GHEORGHE. Doctor în Ştiinţele Matematice (Specialitatea Geometria Descriptivă). — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Facultatea de Arhitectură. — Str. Sfinţilor, 8. Bucureşti.
152	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. — Şcoala Politehnică Timişoara.
153	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-Industrial. Absolvent al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul General al fabricei de hârtie „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
154	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcţiunii Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Profesor la Şcoala de Constructori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. Ecoului, 85. Bucureşti 6.

155	1934, Dec. 19	NICOLESCU IOAN RADU. Comandor (r) de Marină. — Secretar General Uzinele Malaxa. — Piaţa Washington, 2. Etaj III B. Bucureşti.
156	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti. — Str. Sabinelor, 119. Bucureşti 6.
157	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Preşedintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Londra, 39. Bucureşti 2.
158	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cernăuţi. — Str. Paris, 14. Bucureşti 3.
159	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. Director al Institutului Superior de Educaţie Fizică. Director al Şcoalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6.
160	1927, Ian. 28	ORĂNESCU OCTAVIAN. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti Secţia Electro-Mecanică. — Sub-Director Docurile Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2. Galaţi.
161	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Cadastral Şcoala Politehnică. Inginer Hotarnic şi Operator Topometru. Licenţiat în Matematici. — Conferenţiar titular la Politehnica din Bucureşti la cursul de Construcţii Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie şi Geodezie. — Str. Sfinţii Voievozi, 9. Bucureşti 2.
162	1910, Mai 21	ORĂŞEANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Directorul învăţământului secundar din Ministerul Ed. Naţionale. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4.
163	1942, Aug. 27	PANAITE N. THEODOR. Căpitan, Inginer S. S. T. A. A. — Direcţia Tehnică. Arsenalul Armatei. Str. Uranus. Bucureşti.
164	1929, Ian. 21	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-expert. Statistician-expert. — Profesor Politehnica Bucureşti. Profesor la Şcoala de Statistică. Inspector General actuar la Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Brezoianu, 38 bis. Bucureşti. (Telefon 3-4305).
165	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici. — Inginer C. F. R. — Str. Istrate, 44. Bucureşti 5. (Telefon 4-6329).
166	1939, Aug. 31	PĂSĂRICĂ FL. Licenţiat în Matematici. — Şef de Serviciu în Direcţia Generală a Monitorului Oficial. — B-dul Elisabeta, Bucureşti.
167	1939, Dec. 7	PAVEL DORIN. Doctor-Inginer. — Profesor la Politehnica Bucureşti. — Str. Dr. Severeanu, 36. Bucureşti 6.
168	1941, Iunie 5	PERLEA G. DAN. Inginer C. F. R. — Str. Dr. Severeanu, 8. Bucureşti 6.
169	1939, Dec. 7	PERSU AUREL. Inginer. — Conferenţiar la Politehnica Bucureşti. — Calea Victoriei, 159. Bucureşti.

170	1939, Dec. 7	PETRESCU S. GHEORGHE. Doctor în Matematici. — Azistent la Observatorul din Bucureşti. — Str. Tutunari, 38. Bucureşti 6.
171	1940, Aug. 28	PETRESCU PETRE. Lt.-Col. rez. din Artilerie.—Director General al Armamentului din Soc. „Astra". — Str. Roma (Intrarea Roma, 5). Bucureşti 3.
172	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5.
173	1939, Dec. 7	POPESCU M. IOAN. Maior activ de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Ofiţer de Stat Major. Incadrează Statul Major al Aerului. — Profesor de Matematici la diferite Şcoli Militare din Bucureşti. — Str. Dr. C. Severeanu, 23. Bucureşti 6.
174	1935, Apr. 10	POPESCU VICTOR. Inginer—Soc. Comunală a Tramvaelor Bucureşti. Azistent Politehnica Bucureşti. — Str. Comand. E. Botez, 12. Bucureşti 3.
175	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer electromecanic. — Director al Fabricei de motoare de aviaţie I. A. R. — Str. N. Iorga, 14. Braşov.
176	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Str. Matei Voevod, 75. Bucureşti 4.
177	1931, Mart. 11	POPP N. Comandor. Inginer. — Subsecretariatul de Stat al Aerului. — Şoseaua Viilor, 16. Bucureşti.
178	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminarul Pedagogic Universitar şi la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Str. Clucerului, 10. Bucureşti.
179	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor.— B-dul Basarab (Alee) 9. Bucureşti 2.
180	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. General de Artilerie. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
181	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici. Actuar expert. — Consilier Controlor la Inalta Curte de Conturi. — Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2.
182	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel/r. din Artilerie/r. — B-dul Lascăr Catargiu, 16. Bucureşti 3.
183	1941, Iunie 5	PROVINCEANU MIHAIL. Inginer electromecanic. Diplomat al Şc. Politehnice Bucureşti şi Şcoala Superioară de Electricitate Paris. — Inginer la Soc. de Gaz şi Electricitate. — Parcul Jianu. Str. Q, 24. Bucureşti.
184	1941, Febr. 20	RĂDULESCU I. MIRCEA. Inginer constructor. — Inginer. Inspecţia I. Poduri C. F. R. Bucureşti. — Str. Căp. Buruiană, 14. Bucureşti.
185	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Consilier în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti.

186	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Doctor în ştiinţele Politico-Economice. — Şef Controlor în Serviciul de Inspecţie şi control al Ministerului de Finanţe. — Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6.
187	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer, Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1.
188	1941, Febr. 20	RUZVAN I. THEODOR. Inginer constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer Direcţia Podurilor C. F. R. — Bd. G-ral Traian Moşoiu, 11. Bucureşti 5.
189	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Director Tehnic în Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Cartierul C. A. M. Filaret. Str. B. 28. Bucureşti 6.
190	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic, Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor. — B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.
191	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer Constructor. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcu Ioanid). Bucureşti 3.
2	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer-Şef. — Direcţia de Studii a Căilor Ferate Române. Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Columb, 7. Bucureşti 3.
193	1938, Aug. 31	SAVIN C. I. Locotenent. Licenţiat în Matematici. — Str. Dr. Severeanu, 35. Bucureşti 3.
194	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer-Mecanic-Electrician. — Director Tehnic P. T. T. — Str. Ştirbey-Vodă, 65. Bucureşti.
195	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer. — Inginer la Consiliul Tehnic Superior. — Str. Paleologul, 3 bis. Bucureşti 4.
196	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer de mine. Licenţiat în Matematici şi Drept. — Director Tehnic la Societatea „Steaua Română". — Str. Lahovary, 12. Câmpina.
197	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Profesor la Universitatea din Cluj. Membru corespondent al Academiei Române — Str. Milano, 12. Timişoara.
198	1921, Febr. 6	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti. — Sos. Kiseleff 25. Bucureşti 2.
199	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul de aplicaţie al Şcoalei Normale Superioare din Bucureşti. — B-dul Pache, 99. Corp. VI. Bucureşti
200	1940, Aug. 28	SIMIONESCU MIRCEA. Inginer Constructor, — Azistent la Politehnica din Bucureşti. Inginer la S. T. B. — Str. Varşovia, 2. Bucureşti.
201	1941, Iunie 5	ŞLEAHTENEA DUMITRU. Inginer constructor. Diplomat Şcoala Politehnică Bucureşti 928. — Soc. Comunală Locuinţe ieftine Bucureşti. — Parcul Iancului II. Str. Gabrielescu, 5. Bucureşti.

202	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Inspector General în Corpul Tehnic. Subdirector General în Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
203	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef. — Subdirector Direcţia de Studii C. F. R. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3.
204	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
205	1938, Febr. 17	STAN I. AURELIAN. Căpitan de Artilerie. Inginer electromecanic. Licenţiat în Matematici. Absolvent al Şcoalei de Aplicaţie a Artileriei dela Fontainebleau (Franţa). — Str. Buzeşti, 10. Bucureşti 2.
206	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer. — Profesor Suplinitor la Politehnica din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de Telefoane. — Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
207	1941, Febr. 20	STANCU S. MARIN. Inginer constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer, Secţia I Poduri C. F. R. — Staţia Ploeşti-Triaj.
208	1941, Iunie 5	STANCU S. MIRCEA. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. Secţia Construcţii. — Inginer la Soc. Comunală de Locuinţe ieftine. Bucureşti. — Calea Şerban Vodă, 272. Bucureşti
209	1941, Aug. 28	ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE. Sublocotenent din Geniu. — Str. Popp de Băseşti, 52. Bucureşti.
210	1941, Iunie 5	ŞTEFĂNESCU-GOANGĂ AUREL. Inginer ord. clasa II, Politehnica Bucureşti, construcţii, Sublocotenent de rezervă A. C. A. — Inginer în Serviciul construcţiilor şi instalaţiilor C. A. M. Azistent pe lângă Catedra de Geometrie Descriptivă la Politehnica Bucureşti. — Parcul Ianculul, Str. Lt. Ionescu Anton, 27. Bucureşti.
211	1939, Febr. 23	STOENESCU I. ALEXANDRU. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. — Inginer în Direcţia Podurilor C. F. R.. — Str. Caragea Vodă, 21. Bucureşti 3.
212	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Directorul Societăţii Comunale pentru construirea de Locuinţe ieftine Bucureşti. — Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
213	1936, Aug. 25	STOICESCU T. T. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Lic. Industrial băieţi (Buzău).
214	1941, Iunie 5	STOIKA VICTOR. Inginer Inspector General. — Preşedintele Consiliului de Administraţie C. F. R. — Str. Paris, 12. Bucureşti.
215	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General de rezervă. — Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.
216	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Licenţiat în Matematici. Inginer electromecanic. — Conferenţiar de Radio-Comunicaţii la Politehnica din Bucureşti. Director Tehnic P. T. T. — Str. Cazărmei, 12. Aleea Bagdad. Bucureşti.

	1900, Noem. 1	TEODOREANU VASILE. Profesor onorar. Pensionar.—Str. Zlataust, 7.
218	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Inginer-Şef. — Rector al Politehnicei din Bucureşti.
219	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General. — Fost Ministru. — Str. Paris, 53. Bucureşti 1.
220	1937, Ian. 28	THEODORU HENRI. Inginer. — Profesor la Şcoala de Sub-Ingineri. Conferenţiar la Politehnică, Antreprenor. — Str. Alex. Donici, 27. ucureşti.
221	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Str. Basarabia, 12. Bucureşti 1.
222	1940, Aug. 28	TULLEA C. GH. Inginer Inspector General. — Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Aviator Theodor Iliescu, 69. Bucureşti.
223	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
224	1939, Dec. 7	ŢINTEA M. ION. Inginer Diplomat, Doctor-Inginer, Şcoala Politehnică Berlin-Charlottenburg.— Şef Serv. Tehnic D. A. C. Profesor la Şcoala de Ofiţeri de Aviaţie. — Str. Leova, 42. Bucureşti.
225	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Azistentă la Politehnica din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3.
226	1939, Aug. 31	ŢIŢEICA RADU. Doctor în Fizică. Licenţiat în Matematici, Inginer. — Profesor la labor. Optică, Facultatea de ştiinţe din Cluj-Timişoara. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti.
227	1941, Febr. 20	ŢIŢEICA ŞERBAN. Licenţiat în matematici, licenţiat în ştiinţe fizico-chimice, doctor în ştiinţe. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3.
228	1936, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer. — Intrarea Geneva, 4. Bucureşti.
229	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Directorul Uzinelor I. A. R. — Str. Dr. Lister, 65. Bucureşti 6.
230	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI VICTOR. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Profesor la Universitatea din Bucureşti. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Londra, 44. Bucureşti 3.
231	1914, Dec. 20	VARDALA ION. nginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Preşedintele Consiliului de ad-ţi al P. C. A. Preşedintele Consiliului Superior al apelor (M. L. P.) Director General al Soc. A. R. „Banloc" pentru fabricaţiunea şi comercializarea cauciucului. — Str. Wilson, 13. Bucureşti 1.
232	192 Mai 11	VASILACHE I. Inginer Inspector General. — Profesor şi Subdirector al Liceului Industrial Nr. 1. — Str. Polizu, 5—7. Bucureşti 2.

233	1932,Mart.26	VASILESCU GR. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti (1919). Doctor al Academiei de Inalte Studii Comerciale şi Industriale din Bucureşti. — Profesor Politehnica din Bucureşti. Subdirector în Direcţia Generală a Porturilor şi a Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Str. Brezoianu, 27. Bucureşti 1.
234	1920. Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef. — Str. Popovici, 22. Bucureşti, 2.
235	1940, Febr. 8	VASILESCU I. TEODOR. Inginer constructor. — Str. Cobălcescu, 6. Bucureşti.
236	1931, Apr. 10	VASILIU G. DAN. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Director la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — B-dul Tache Ionescu, 27. Bucureşti.
237	1941, Febr. 20	VASILIU C. EUGENIU. Inginer diplomat al fostei Şcoale Naţionale de Poduri şi Şosele. — Antreprenor de Lucrări publice şi particulare. — Str. Vornicul Mogoş, 6. Bucureşti 4.
238	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer de mine şi geodez. — Antreprenor autorizat de Direcţia Cadastrului pentru Geodezie, Cadastru şi Comasare. Azistent supl. la Politehnica din Bucureşti. — Parc. Voevod Mihai, 14. Câmpina.
239	1941, Febr. 20	VASILIU C. ION. Inginer constructor S. P. B. — Inspecţia IX Intreţinere. — Str. Mihai Viteazul, 50. Chişinău.
240	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Azistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 1.
241	1938, Febr. 17	VESCAN T. TEOFIL. Doctor în Ştiinţe fizice. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Cluj, Banca Albina.
242	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar din Tg.-Mureş. — Str. Mărăşeşti, 12. Timişoara.
243	1933, Febr. 22	WOINAROVSKY R. Licenţiat în Matematici. — Str. Manu Cavafu, 16. Bucureşti 6.
244	1924, Ian. 30	ZAMFIRESCU C. GRIGORE. Inginer, Diplomat S. N. P. S. 1921. Bucureşti şi E. S. A. Paris 1922. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Administrator delegat al fabricei de avioane Set. Industria naţională aeronautică. — Domiciliu : Comuna Otopeni. Birou : Str. Popa Lazăr, 9—15. Bucureşti. Tel. 2-5074.
245	1941, Iunie 5	ZAMFIRESCU GH. ION. Căpitan de Artilerie. — Inginer Minist. Inzestrării Armatei Direcţia Tehnică. — B-d Elisabeta, 97. Bucureşti 2.
246	1929, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti. — Str. Victor Manu, 39. Bucureşti 4.
247	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Comandor. Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris). — Str. Pasteur, 44. Bucureşti 6. (Telefon 4-3929).
248	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich.— Antreprenor. — Bulevardul Elisabeta, 57. Bucureşti 2.

†

MEMBRII DECEDAŢI *)

	Data admiterii	Data morţii
1. ANGELESCU A.	1919 Septemvrie 12	1938 Apr. 6
2. BANCIU I.	1911 Februarie 20	1940 Sept. 16
3. BOTEA N.	1932 Aprilie 20	1937 Dec. 18
4. BRATU GH.	1920 August 15	1941 Sept. 1
5. BUNGEŢIANU D. PREDUŢA	1938 Februarie 27	1940 August 21
6. FILIPESCU E. G.	1909 Iulie 1	1937 Noembrie 24
7. FUNDĂŢEANU C. I.	1928 Mai 9	1940 Sept. 23
8. PANAITESCU SC.	1914 Decemvrie 20	1938 Martie 22
9. PATRICIU G. TITUS	1911 Decemvrie 17	1937 Ian. 5
10. POPESCU I.	1922 August 31	1936 Sept. 20
11. ŢIŢEICA GH.	1895 Noemvrie 1	1939 Februarie 5

PREMIILE, BURSELE ŞI PUBLICAŢIILE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

I. **Premii.** In cursul anului XLVII de apariţie a *Gazetei* (anul şcolar 1941—1942) situaţia premiilor anunţate în Nr. 1 (Septemvrie 1941) ca disponibile, a fost următoarea:

1. *Premiul de aritmetică*, în valoare de 5.000 lei, a fost acordat elevului P. DRĂGHICESCU, în baza raportului publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 7, pag. 311.

2. *Premiul de geometrie elementară* « G. ŢIŢEICA », în valoare de 5.000 lei, a fost acordat aceluiaşi elev P. DRĂGHICESCU, după cum s'a arătat în Nr. 11, la pag. 506.

3. *Premiul de algebră*, în conformitate cu raportul aprobat de Adunarea generală din Februarie 1942 şi publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 9, pag. 409, nu a fost atribuit în anul acesta.

*) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la „*Gazeta Matematică*“ până la sfârşitul vieţii lor.

4. *Premiul de trigonometrie* « V. CRISTESCU » : din suma disponibilă de 15.000 lei, un premiu în valoare de 5.000 lei a fost acordat D-lui VIRGIL METEA. Raportul de premiare a fost publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 10, pag. 452.

5. *Premiul de mecanică sau astronomie* « SP. HARET », dispunea din trecut de suma de 15.000 lei; s'au acordat anul acesta 2 premii de câte 5.000 lei, D-lor EMIL MODÂLCĂ şi C. EFTIMIE, conform hotărârii Adunării generale din Februarie 1942 (raportul publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 12, pag. 554).

6. *Premiul de filosofia matematicilor* « VASILE CONTA », în valoare de 8.000 lei, n'a fost acordat anul acesta, după cum a hotărât Adunarea generală din 27 August a. c. Raportul urmează să se publice în Nr. 3 al *Gazetei Matematice* din Noembrie a. c

7. *Premiul de matematici superioare pure sau aplicate* « ING. H. CAPRIEL », în valoare de 1.000 lei, urmează să se acorde în anul 1944, la terminarea perioadei de 5 ani regulamentare, uneia din lucrările ce se vor fi primit în termen, asupra subiectului propus de Comisiunea acestui premiu, subiect care a fost publicat în Vol. XLV, pag. 461.

8. *Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare* « GENERAL SC. PANAITESCU », a fost acordat anul acesta la împlinirea unei perioade regulamentare de 5 ani, D-lui Căp. ILIE A. CUCU, cu raportul aprobat de Adunarea generală din 27 August a. c., raport publicat în numărul de faţă al Gazetei.

9. *Premiul* « LT. COL. GH. A. TĂNĂSESCU », a revenit elevului DRĂGHICESCU PAUL, clasificat întâiul la Concursul *Gazetei Matematice* din 1942, după cum s'a arătat în raportul publicat la pag. 393.

10. *Premiul de geometria triunghiului şi tetraedrului* « NICOLAE G. BOTEA », a fost decernat elevului P. DRĂGHICESCU; raportul de premiare se găseşte publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 5, pag. 212.

11. *Premiul anual* « ING. AL. ROŞU », a fost dat tot elevului PAUL DRĂGHICESCU, deoarece a fost cel mai harnic corespondent al Gazetei în anul precedent (Vol. XLVI). Raportul de premiare a fost publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 8, pag. 357.

* * *

Pentru anul XLVIII al Gazetei (anul şcolar 1942—1943), în conformitate cu *regulamentele ce se găsesc anexate la Numărul de faţă,* se vor putea acorda următoarele premii:

1. *Premiul anual de aritmetică de 5.000 lei.*

2. *Premiul anual de geometrie elementară* « GH. ŢIŢEICA », *de 5.000 lei.*

3. *Premiul anual de algebră de 5.000.*

4. *Premiul anual de trigonometrie* « VASILE CRISTESCU », dispune anul acesta de 15.000 lei, din care se va putea acorda fie un singur premiu de această valoare, fie două sau trei premii de câte 5.000 lei fiecare.

5. *Premiul anual de mecanică sau astronomie* « SP. HARET », va dispune anul acesta de suma de 10.000 lei, putându-se acorda fie un singur premiu de această valoare, fie unul sau două premii de câte 5.000 lei fiecare.

6. *Premiul anual de filosofia matematicilor* « VASILE CONTA », va dispune anul acesta de 12.000 lei şi se vor putea acorda 1—3 premii a câte 4.000 lei sau premii mai mari, eventual unul singur de valoarea intregii sume disponibile.

7. *Premiul anual* « LT. COL. GH. A. TĂNĂSESCU », constând din cărţi de matematici, cumpărate din venitul fondului cu acest nume, este destinat primului clasificat la concursul anual al Gazetei.

8. *Premiul anual de geometria triunghiului şi tetraedrului* « NICOLAE G. BOTEA », dispunând de venitul fondului cu acest nume.

9. *Premiul anual* « ING. AL. ROŞU », constând din venitul fondului respectiv, este destinat celui mai harnic corespondent al volumului XLVII.

II. **Burse.** Din venitul fondului « PROFESOR ION IONESCU », s'a acordat în anul şcolar 1941—1942, o bursă de 3.000 le ilunar, dela 15 Octomvrie 1941 până la 15 Iunie 1942, Domnişoarei GEORGETA ROMAŞCAN din anul IV Construcţii, dela Politehnica Bucureşti.

III. **Publicaţii.** In biblioteca tehnică a *Gazetei Matematice,* căreia îi sunt destinate veniturile fondului « ANGHEL SALIGNY », nu s'a făcut nici o publicaţie anul acesta.

Din disponibilităţile curente ale Societăţii *Gazeta Matematică* s'a tipărit: *Algebra superioară* de N. ABRAMESCU şi Volumul III

din *Elementele lui* EUCLIDE, traducere făcută de D-l VICTOR MARIAN.

S'au dat la tipar, urmând să apară: *Culegere de Probleme de Mecanică* de A. G. IOACHIMESCU, revăzută de D-RA GABRIELA ŢIŢEICA.

Biblioteca « GEORGE ŢIŢEICA » a fost inaugurată cu monografia „*Maxime şi Minime Geometrice*“ de D-l ION IONESCU, care a apărut în cursul anului expirat.

COMISIUNEA PENTRU ADMINISTRAREA FONDURILOR SPECIALE ALE SOC. « GAZETA MATEMATICĂ »

ING. ION BUŞILĂ, ING. D. A. STAN.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SC. PANAITESCU“

Domnilor Membri,

In intervalul dela 1937 la 1942 au fost publicate numeroase lucrări de matematică aplicate la ştiinţele militare. Foarte multe din aceste lucrări, deşi foarte interesante, aparţinând însă membrilor Societăţii *Gazeta Matematică*, nu vor fi luate în considerare de oarece regulamentul premiului ne opreşte.

Revistele în care au fost publicate cele mai interesante lucrări sunt:

1. Revista Artileriei.
2. Revista Geniului.
3. Buletinul Asociaţiei Generale a Inginerilor din România.
4. Revista Aeronauticei şi Marinei.
5. Buletinul de Fotogrametrie şi Agrimensură.
6. Buletinul Centrului de Instrucţie al Artileriei Antiaeriene.

Cercetând lucrările cele mai interesante publicate şi ţinând seamă şi de rapoartele precedente, asupra acestui premiu, comisiunea a ales şi propus pentru premiere lucrarea:

Torsiunea cilindrilor, goi în interior, cu pereţii subţiri şi cu diafragama în interior (aplicaţiune la calculul aripelor de avion).

Lucrarea aparţine D-lui Căpitan CUCU A. ILIE din Comandamentul Forţelor Aeriene.

In această lucrare D-l Căpitan CUCU plecând dela teoria cilindrilor cu pereţii subţiri supuşi la torsiune, datorită lui BREDT, o aplică conturelor cilindrice, având pereţi subţiri şi diafragme interioare, apoi trece la conture similare profilelor de aripă, unde aplicând teorema lui MENABREA ajunge la determinarea „rigidităţii la torsiunea materialului".

Acest rezultat are foarte mare importanţă în calculul aripelor metalice cu pereţii subţiri şi diafragme interioare.

D-l Căpitan Doctor-Inginer CUCU ne-a mai prezentat şi manuscriptul a două volume intitulate:

1. Calculul Aerodinamic al avionului.
2. Calculul rezistenţei avioanelor.

Vă înfăţişăm însă Dvs. numai primul volum în copie, deoarece autorul a trebuit să le dea spre tipărire unei tipografii.

In aceste volume, redactate cu o deosebită grijă, autorul, elev al şcoalei italiene (unde şi-a luat doctoratul, ca inginer al Politechnicei din Bucureşti), are numeroase teorii proprii, teorii în care matematicile aplicate în calculul avionului, abundă, iar concluziunile şi rezultatele la care ajunge, constituesc un real aport pentru tehnica avioanelor.

Comisiunea propune deci ca premiul « GENERAL SC. PANAITESCU » pe intervalul dela 1937 la 1942 să fie decernat D-lui Căpitan Doctor-Inginer CUCU A. ILIE.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI
« SCARLAT PANAITESCU »

ING. AL. BUNESCU, CPT. M. FOCŞĂNEANU,
COMANDOR ING. I. LINTEŞ.

Acest raport a fost citit şi aprobat de Adunarea generală din 27 August 1942.

NOTE MATEMATICE

1. *Centenarul unei mici astronomii române.*

In anul 1841 profesorul de geografie dela Colegiul Sf. Sava din Bucureşti a tipărit o mică broşură cu titlul următor:

„Prinţipuri | De | Geografie şi Astronomie | sau | începuturi de geografie statistică, politică, | fizică şi astronomică | pentru |

Tinerimea Şcoalelor publice. | *De I. Genilie* | *Profesor de Geografie şi Hronologie în Kolegiul* | *Naţional din Bucureşti.* | *Preţul aceştii cărţi este un sfanţiu.* | *Bucureşt.* | *In Tipografia Kolegiului Naţional.* | *1841*".

Această cărticică mi-a fost arătată de D-l O. PĂDURARU, Bibliotecarul Şcoalei Politechnice din Bucureşti, şi are formatul 200 × 125 mm, cu un cuprins de 82 pagini. Nu are nicio indicaţiune dacă a mai avut vreo ediţie anterioară. In Bibliografia Chronologică română de DIMITRIE IARCU, din Bucureşti 1873, găsim printre cărţile apărute în 1835 trecută şi *Geografia istor. astron. şi civ. a contin. în genere şi a României în parte, 8 p. de* IOSIF GENILIE, *Buc. Eliad.*

Această cărticică, şi mai mică, nu o putem considera ca o ediţie anterioară celei de care ne ocupăm, diferenţa dela 8 la 82 pagini fiind prea mare; în tot cazul ea ridică celei de care ne ocupăm calitatea de a fi prima Astronomie tipărită în limba română!

Nu mă voi ocupa aci de partea referitoare la Geografie; voi semnala numai unele chestiuni care pot interesa pe cititorii Revistei noastre. Astfel, autorul spune că Geografia se poate învăţa cu *Exerciţii* cu harta, prin orizont, cu figuri, cu descriere şi prin călătorii. Menţionez că în toată cartea nu este nicio hartă, nicio figură! La descrierea *Punturilor lumeşti* (punctele cardinale) zice la NE: Răsăritul verii, la SE: răsăritul iernii, la SV: apusul iernii şi la NV: apusul verii. La septentrional şi meridional zice şi *mezinopţial* şi *mezizial.* La ţările locuite de Români deosebeşte Muntenia, a cărei parte despre Dunăre o numeşte *Câmpenia,* şi *Moldavia.* Apoi *Ţinuturi înstreinate*: Transilvania, Banatul, Maramureşul, Bucovina, Basarabia şi în fine *Kolonii* în număr de trei: peste Dunăre: *Transistranii* sau *Aurelianii,* cu Sinţarii şi Morlaki; peste Tisa: *Transtizanii* şi peste Nistru *Transnistranii.* Autorul estimează la 5 000 000 Românii de pretutindeni.

Toate noţiunile de geografie sunt cuprinse în 62 pagini.

In partea rezervată astronomiei se ocupă de trupuri cereşti, lumea, pământul, de *meridiane* şi *paralele,* de *lungime* şi *lăţime,* de împărţirea timpului, despre soare, lună, planeţi, eclipse, firmamentul sau Tăria, constelaţii, zodiac, nebule, univers, oceane; date privitoare la mărimea pământului. Astronomia se încheie cu *sistema*

sorească şi *sistema stelească*. Ultimele file sunt cam rupte. Autorul încheie spunând că dincolo de toate acestea „domneşte un veşnic întuneric"... „şi nu vor străbate niciodată nici ocheanul, sau telescopul cel mai desăvârşit pe care îl va iscodi înţelepciunea omenească".

I. IONESCU.

BIBLIOGRAFIE

N. ABRAMESCU. *Asupra relaţiei dintre involuţie şi fascicole de cercuri.* (Extras din *Revista Matematică din Timişoara*). Timişoara 1941.

N. ABRAMESCU. *Sur une construction géométrique.* (Extras din *Bulletin scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara*). Timişoara 1942.

N. ABRAMESCU. *Asupra deplasării elicoidale.* (Extras din *Revista Matematică din Timişoara*). Timişoara 1941.

N. ABRAMESCU. *Sur les tangentes de* DARBOUX *d'une surface.* (Extras din *Annales scientifiques de l'Université de Jassy*). Jassy 1941.

N. ABRAMESCU. *Proprietăţi ale conicelor osculatoare la o curbă plană.* (Extras din *Gazeta Matematică*). Bucureşti 1940.

N. ABRAMESCU. *Nouvelle méthode pour obtenir la cubique qui donne les tangentes de* DARBOUX *en un point d'une surface.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*). Paris 1939.

N. ABRAMESCU. *L'apolarité d'une forme binaire et d'une forme cubique. Application à la théorie des surfaces.* (Extras din *Mathematica*). Cluj 1939.

N. ABRAMESCU. *Sur les sections d'une surface par des plans menés par une tangente, ou par une droite passant par un point de la surface.* (Extras din *Mathematica*). Timişoara 1942.

N. ABRAMESCU. *Proprietăţi ale cercului celor 9 puncte* (al lui EULER) şi *ale dreptei lui* SIMSON. (Extras din *Ştiinţă şi Progres*). Târgul Mureş.

H. CIOCAN. Cotul moldovenesc este cot sacru. Piteşti 1942.

T. VESCAN. I. *Considération sur certaines recherches quantiques de l'École française de physique théorique.*

II. *New hydrodynamical investigations.*

III. *Die Sedimentationsgleichgewichts-Mischung und die Molekulargewichts formel von* SWEDBERG.

Communications présentées à la réunion internationale de physique de Boston 1941. Cluj 1941.

ION IONESCU. *Povestiri Ştiinţifice*, Vol. II (Tipărit în Biblioteca Tehnică *Universul*, Nr. 4), Bucureşti, 1942, Preţul 160 lei.

Intr'un răstimp mai scurt de un an editura ziarului „Universul" a scos al doilea volum de *Povestiri Ştiinţifice* ale d-lui ION IONESCU. El cuprinde un număr de 20 articole publicate de autor în diverse reviste din ţară, în special în *Natura* şi *Gazeta Matematică*, având următoarele titluri: Doctorul CONSTANTIN C. ISTRATI, Profesorul GHEORGHE CHIRILOV, NICULAE SEGĂRCEANU, LÉON LALANNE şi introducerea sistemului metric în România, Iuţeala, Raporturile dintre matematică şi inginerie în trecut şi în prezent, Chestiuni de inginerie la al patrulea Congres internaţional al matematicianilor, Prima aritmetică tipărită în limba română, Vechile geometrii româneşti, Nomenclatura geometrică română, Prima trigonometrie română, Matematica în Regulamentul organic, Cuvântare la Serbarea de 40 de ani de existenţă a Gazetei Matematice, Contabilitatea şi Matematica, Munca matematică, Maşinile de calcul (privire istorică), Ştiinţa şi Naţionalismul, Invăţământul matematicilor în Şcolile secundare, ISSAC NEWTON, ANDRÉ-MARIE AMPÈRE.

Volumul e închinat „Memoriei Doctorului CONSTANTIN C. ISTRATI, întemeietorul Societăţii de Ştiinţe şi al Asociaţiei Române pentru înaintarea şi răspândirea ştiinţelor dela care, eu, ca şi mulţi alţii, am primit impulsul de a scrie ştiinţă pentru ştiinţă şi pentru răspândirea ei în ţara noastră".

Ideea d-lui prof. ION IONESCU de a strânge în volum conferinţele ţinute cu diferite ocazii şi articolele răspândite timp de peste patru decenii este cât se poate de fericită. In modul acesta cetitorul e dispensat de a căuta prin biblioteci revistele care cuprind articolul ce-l interesează, având la îndemână întreaga colecţie. De altfel se ştie că lectura unui articol trezeşte curiozitatea de a ceti şi pe cel următor şi aceasta duce adesea la consultarea întregului volum, ceea ce în cazul de faţă nu poate fi decât spre folosul cetitorului.

A populariza problemele de ştiinţă nu este un lucru tocmai uşor, a populariza matematicile însă este chiar o problemă foarte grea. Dovadă e numărul extrem de mic de publicaţii de acest gen. Broşurile d-lui ION IONESCU vin să umple la noi acest gol, care se simte atât de mult.

După cum se vede din tabla de materii, subiectele tratate sunt foarte variate. O parte din ele tind la popularizarea unor chestiuni de matematici, altele prezintă biografii ale oamenilor de ştiinţă, în sfârşit altele cuprind cercetări originale privitoare la trecutul matematicei româneşti. Articolele sunt scrise fără formule, teorii şi demonstraţii matematice, putând fi cetite de oricine posedă cultura generală din liceu. Merită să relevăm în deosebi pe cele ce se referă la trecutul matematicei la noi, d-l I. IONESCU fiind cel mai vechi cercetător şi cel mai bun cunoscător al trecutului matematic la români.

Povestirile Ştiinţifice vor fi cetite cu profit mai ales de generaţia tânără, dar ele vor produce momente plăcute pentru oricine se interesează de problemele de matematici. Suntem convinşi împreună cu autorul că atenţia dată de pătura noastră cultă acestor Povestiri „va contribui la ridicarea nivelului ştiinţific în ţara noastră şi la extinderea aplicaţiunilor folositoare desvoltării economiei naţionale".

VICTOR MARIAN.

CERERI

316. La Şcoala Normală „Vasile Lupu“ din Iaşi a funcţionat multă vreme ca Profesor de matematici CONSTANTIN FAUR. S'a publicat undeva o Biografie a lui?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

THEODOR CRIVETZ. Expunere critică a unei propoziţii geometrice. Bucureşti, 1901.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

THEODOR CRIVETZ. Demonstraţia postulatului lui EUCLIDE. Două metode. Bucureşti, 1919.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4618. *Se dă triunghiul* ABC *dreptunghic isoscel cu catetele* AB, AC *egale cu 1. Fie* O *mijlocul lui* AB *şi* M *un punct mobil pe* BC. *Se proiectează* M *în* P *pe* BC *şi* P *în* Q *pe* OM. *Să se găsească locul lui* Q *şi să se separe curba locului după poziţiile lui* M *pe ipotenuza* BC *sau pe prelungirile ei.*

G-L GH. BUICLIU.

Problema aceasta este un caz particular al problemei 2809, propusă de D-l G-L GH. BUICLIU şi rezolvată la pag. 27, Vol. XXXV, *Gazeta Matematică*. In problema 2809 se cere locul aceluiaşi punct Q pentru cazul când $AB \neq AC$ şi de lungimi oarecare. Luând ca axe cateta AC şi perpendiculara pe mijlocul D al catetei AC s'a găsit că locul lui Q este cubica

$$cy^3 + bxy^2 + cx^2y + bx^3 - bcy^2 + c^2xy + bcx^2 = 0 \qquad (1)$$

în care c şi b sunt jumătăţile catetelor.

S'a arătat la finele soluției problemei 2809 că deoarece ecuația 1) se pune sub forma

$$F(x,\ y,\ x^2+y^2)=0$$

rezultă că (1) este podara unei conice.

Notă. 1°. Problema 2809 a fost rezolvată și pe o prea elegantă cale geometrică de D-l AD. GHEORGHIU, la pag. 458, Vol. XXXVI. D-l AD. GHEORGHIU a mai dat la pag. 374, Vol. XXXII și o frumoasă construcție geometrică a asimptotei la locul lui Q.

2°. D-l Prof. GH. TH. GHEORGHIU în articolul său *« Asupra curbelor de gradul IV »*, publicat la pag. 449, Vol. XXXVIII a arătat pe o cale analitică că ecuația (1) este podara unei conice și apoi a construit geometric acea conică, care este o parabolă.

3°. Am citat punctele 1° și 2° precedent pentru a arăta interesul pe care l-a prezentat problema 2809 colegilor din societate, D-nii AD. și GH. TH. GHEORGHIU, și aplicațiile frumoase pe care D-lor au știut să le facă.

Cu toate cele publicate asupra problemei 2809, de problema 4618 nu s'au ocupat decât 2 corespondenți, D-l E. MARCOVICI (student Iași) care a găsit ecuația exactă pentru cazul particular $b=c=\frac{1}{2}$ și un alt corespondent mai recent care după ce stabilește o ecuație greșită conchide că locul este *o curbă* ca și cum s'ar fi așteptat la altceva în plan.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5246. *Fie* $A_1B_1C_1$ *triunghiul pedal al punctului* I, *față de triunghiul* ABC, A′ *punctul de intersecție al paralelelor duse din* B_1 *și* C_1 *respectiv la* CC_1 *și* BB_1.

Să se arate că:

1°. *Triunghiurile* A′B′C′ *și* $A_1B_1C_1$ *sunt invers omotetice.*

2°. *Triunghiurile* A′B′C′ *și* ABC *sunt omologice.*

3°. I′ *fiind centrul de omotetie al triunghiurilor* A′B′C′, $A_1B_1C_1$, *iar* G_1 *centrul de greutate al triunghiului* $A_1B_1C_1$, *punctele* I, I′, G_1 *sunt colineare.*

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

Soluție dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU, C. V. PANTELIMON și MIRCEA D. POPA (lic. milit. Iași).

1°. $B_1C' \parallel IA_1 \parallel C_1B$, şi deci $B'C' \parallel B_1C_1$

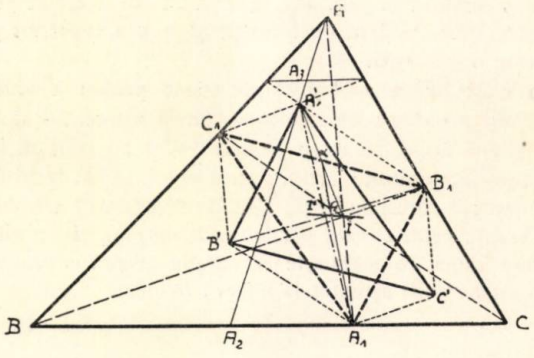
2°. B″, C″ fiind intersecţiile (C_1A', AC), (B_1A', AB) avem:

$$\frac{AB''}{AB_1} = \frac{AC_1}{AB} \quad ; \quad \frac{AC''}{AC_1} = \frac{AB_1}{AC}$$

şi împărţind:

$$\frac{AB''}{AC''} = \frac{AC}{AB}$$

adică $B''C'' \parallel BC$.



Considerând în triunghiul AB″C″, cevienele punctului A′, avem:

$$\frac{C_1C''}{C_1A} \cdot \frac{B_1A}{B_1B''} \cdot \frac{A_3B''}{A_3C''} = -1$$

şi cum:

$$\frac{C_1C''}{C_1A} = \frac{CB_1}{CA} \quad ; \quad \frac{B_1A}{B_1B''} = \frac{BA}{C_1B}, \text{ iar } \frac{A_3B''}{A_3C''} = \frac{A_2C}{A_2B}$$

rezultă:

$$\frac{A_2C}{A_2B} = -\frac{AC}{BA} \cdot \frac{BC_1}{CB_1}$$

şi analog:

$$\frac{C_2B}{C_2A} = -\frac{CB}{CA} \cdot \frac{AB_1}{BA_1} \quad ; \quad \frac{B_2A}{B_2C} = -\frac{BA}{BC} \cdot \frac{A_1C}{C_1A} \cdot$$

Immulţind:

$$\frac{A_2C}{A_2B}\cdot\frac{C_2B}{C_2A}\cdot\frac{B_2A}{B_2C}=\frac{C_1B}{C_1A}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{A_1C}{A_1B}=-1.$$

3°. Dacă α este mijlocul lui B_1C_1, ţinând seamă de 1°, atunci IA′ trece prin α. In triunghiul AIA_1 se vede imediat că II′ şi $A_1\alpha$ sunt mediane şi că deci centrul de greutate al său este şi centrul de greutate al tr. $A_1B_1C_1$ şi se află pe II′.

CPT. I. GH. Z.

PROBLEMA 5345. *Două bare fără greutate alcătuesc un unghiu drept rigid* AOB, *ce se poate roti în jurul centrului* O, *fix, al unui cerc vertical de rază* r.

Un inel foarte mic D, *prin care trece atât cercul cât şi bara* OA, *este legat de un punct* C, *fix, al cercului* (OC *face* 45° *cu verticala în sus*) *cu un fir elastic, ce trage inelul cu o forţă proporţională cu lungimea lui. La capetele* A *şi* B *sunt atârnate respectiv greutăţile* P *şi* Q.

Neglijând orice frecare se cere unghiul α *făcut de* OA *cu verticala (în jos), în cazul echilibrului, precum şi reacţiunea din* O.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de d-nii: NICOLAE P. BĂDULESCU, EM. S. MODÂLCĂ (elevi-ingineri Bucureşti), PAUL P. DRĂGHICESCU şi MIRCEA D. POPA (elevi liceul militar Iaşi).

Pentru a determina poziţia de echillibru vom lua momentele în raport cu punctul O. Să ne ocupăm de momentul dat de forţa firului elastic. Observăm că $\sphericalangle COD = 135^0 - \alpha$ şi că forţa firului este $\vec{F} = k \cdot \vec{DC}$, deci momentul în raport cu O va fi:

$$\mathfrak{M}_0\vec{F} = k \cdot 2 \text{ aria } ODC = k \cdot r^2 \sin(135^0 - \alpha) = kr^2 \sin(45^0 + \alpha)$$

$$\therefore \quad \mathfrak{M}_0 F = \frac{\sqrt{2}}{2} kr^2 (\sin\alpha + \cos\alpha).$$

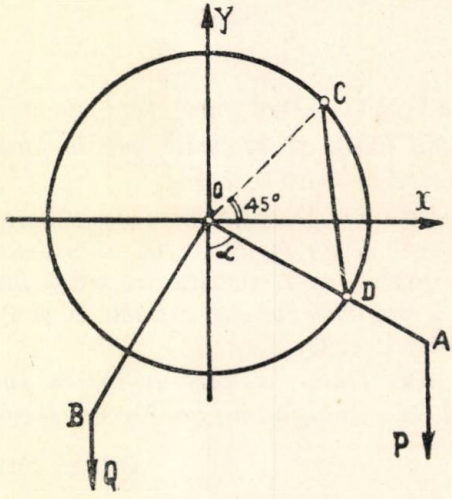
Anulând suma momentelor în raport cu O găsim

$$(\overline{OA} = a \ ; \ \overline{OB} = b):$$

$$Pa \sin\alpha - Qb \cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}(kr^2 (\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$$

$$\therefore \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{Qb\sqrt{2} + kr^2}{Pa\sqrt{2} + kr^2} \cdot \qquad (1)$$

Ca verificare, pentru $k = 0$ obţinem cazul cunoscut, iar pentru $k = \infty$, D vine în C, ceea ce trebue să se întâmple în mod evident.



Pentru a determina reacţiunea din articulaţia O, o vom desface în două componente pe cele două axe: X şi Y. Proiectând pe Ox avem:

$$X + pr._{Ox}\, k \,.\, \overrightarrow{DC} = 0$$

însă:

$$pr._{Ox} k \,.\, \overrightarrow{DC} = k\,(x_c - x_d) = k\,(r\cos 45^0 - r\sin\alpha) = kr\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\alpha\right)$$

$$\therefore \quad X = -k \,.\, r\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\alpha\right) = kr\left(\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \qquad (2)$$

Prolectând pe Oy:

$$Y + pr._{Oy} - k \,.\, \overrightarrow{DC} - P - Q = 0.$$

Dar

$$pr._{Oy} \cdot k \cdot \overrightarrow{DC} = k(y_c - y_d) = k[r \cdot \cos 45^0 - r\cos(180 - \alpha)]$$

$$= kr\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha\right)$$

$$\therefore \qquad Y = P + Q - k \cdot r\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha\right). \qquad (3)$$

Cunoscând din (1) pe α, găsim din (2) şi (3) pe X şi Y, deci reacţiunea e determinată.

PROBLEMA 5446. *Să se calculeze, pentru* $n = \infty$, *limita expresiei*

$$E = n\left[\left(1 + \frac{}{n}\right)^{n+2} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+2}\right].$$

M. GHERMĂNESCU.

1°. *Soluţie* dată de D-l B. MARCUS. Expresia dată se mai scrie, dacă punem $u_n = n^n$,

$$E = \frac{1}{n}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}\left[\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right].$$

Insă

$$\lim \frac{1}{n}\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

deci

$$\lim E = e \lim\left[\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right].$$

Să punem

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad w_n = n;$$

avem

$$\lim E = e \lim \frac{v_{n+1} - v_n}{w_{n+1} - w_n} = e \lim \frac{v_n}{w_n} = e^2,$$

conform unei teoreme a lui CESARO [1]).

---

1) M. GHERMĂNESCU, *Curs de Algebră superioară*, p. 145—146, sau G. M., Vol. XLI, p. 89.

2°. *Generalizare.* Să calculăm limita expresiei mai generală

$$E = n\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^{n+p} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{p(n+1)}\right],$$

pe care o mai putem scrie

$$E = n\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{p}{n}\right)^{p} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{pn}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

Stabilim în prealabil identitatea

$$(1+u)^{v} = e^{uv}\left(1-\frac{u^2v}{2}+\frac{u^3v}{3}-\frac{u^4v}{4}+\frac{u^4v^2}{8}+u^5w\right),$$

unde w tinde către o constantă când u tinde către zero. Această identitate ne dă

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{n} = e^{p}\left(1-\frac{p^2}{2n}+\frac{8p^3+3p^4}{24n^2}+\ldots\right),$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{pn} = e^{p}\left(1-\frac{p}{2n}+\frac{8p+3p^2}{24n^2}+\ldots\right),$$

unde termenii neînscrişi conţin la numitori puteri ale lui n mai mari ca a doua; avem deci

$$\lim E = e^{p}\lim n\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^{p}\left(1-\frac{p^2}{2n}+\ldots\right)\right.$$
$$\left.-\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{p}{2n}+\ldots\right)\right]$$

deci, desvoltând după formula binomului,

$$\lim E = \frac{p(p-1)}{2}e^{p}.$$

Notă. 1°. D-l B. MARCUS a mai dat o soluţie pentru cazul particular $p=2$ în sensul celei de mai sus, dar a mai dat şi o generalizare foarte interesantă, deşi extrem de lungă, în spiritul primei soluţii a D-sale.

2°. S'au mai primit trei soluţii inadmisibile, cu erori ca cele semnalate cu ocazia soluţiei problemei 4600, G. M., XLII, p. 269.

M. G.

PROBLEMA 5423. *Un cunoscut îmi spunea zilele trecute: Am avut cândva vârsta egală cu suma cifrelor anului în care mă găseam şi voi avea odată etatea egală cu produsul cifrelor anului în care voi fi atunci.*

In ce an s'a născut acea persoană?

I. B. FLORESCU.

Soluţie dată de D-şoara LIDIA M. TUDORAN (Şc. Centrală de fete „Marica Brâncoveanu", Bucureşti).

Trebuie să presupunem că cunoscutul din enunţ este încă în viaţă în anul în care produsul cifrelor este egal cu vârsta lui din acel an. In această presupunere anul respectiv nu poate depăşi dincolo de 1999 căci în anii de forma $20ab$ produsul cifrelor este *zero*, ceea ce nu este o vârstă pentru persoana care la data propunerii problemei, 15 Ianuarie 1941, îşi mărturisea vârsta prin o frază aşa de complicată. Dincolo de 2100 nu mai este probabil să trăiască nimeni din cei în viaţă actualmente.

Deci anul în care vârsta cunoscutului din enunţ va fi egală cu produsul cifrelor, va fi $19zu \geqslant 1942$. Vârsta va fi atunci egală cu $9 \times z \times u$ unde $z \geqslant 4$. Dau pe rând lui z valorile 4, 5,.. 9 şi lui u valori aşa în cât produsul $9 \times z \times u$ să reprezinte maximum 150, vârsta cea mai mare pe care ar atinge-o un muritor. Scăzând pe $9 \times z \times u$ astfel determinat din $19zu$, corespunzător, se vor găsi numele între care trebuie căutat răspunsul enunţului. Construim astfel tabloul următor:

z	4		5		6		7	8	9
u	2	3	1	2	1	2	1	1	1
$9 \times z \times u$	72	108	45	90	54	108	63	72	81
$19zu$	1942	1943	1951	1952	1961	1962	1971	1981	1991
Anul probabil de naştere	1870	1835	1906	1862	1907	1854	1908	1909	1910

Fie acum $1abc$ anul în care vârsta persoanei era $1 + a + b + c$ şi $1a'b'c'$ anul de naştere. Conform enunţului

$$1abc - 1a'b'c' = 1 + a + b + c$$

$$\therefore \quad 99a + 9b = 1 + a'b'c' = 9m \qquad (1)$$

Rezultă că din numerele înscrise în ultima linie a tabloului precedent, sunt acceptabile numai acelea în care suma ultimelor

3 cifre sporită cu 1 este un multiplu de al lui 9. Răspund la această condiţie numerele 1854 şi 1908.

Inlocuind în (1) pe $a'b'c'$ respectiv prin 854 şi 908, iar pe a prin 8 şi 9 găsim pentru b valorile 7 şi 2.

Avem în definitiv rezultatele înscrise în tabelul:

Persoanele născute în anul	Au avut		Au azi vârsta de ani	Vor avea	
	în anul	Vârsta de ani		în anul	Vârsta de ani
1854	$187c$	$1+8+7+c$	88	1962	$9\times 6\times 2=108$
1908	$192c$	$1+9+2+c$	34	1971	$9\times 7=63$

Intru cât se citează des oameni în vârstă de 108 ani, rezultă că problema are două soluţii. Pentru identificarea anului de naştere a cunoscutului din enunţ, ne mai trebuie deci unele date, sau cel puţin o fotografie recentă pentru a putea preciza dacă acea persoană este în vârstă de 88 sau de 34 de ani.

Se vede că c poate avea pe oricare din valorile $0, 1, 2, \ldots 9$ aşa că persoana din enunţ s'a bucurat 10 ani dearândul de beneficiul de a avea vârsta egală cu suma cifrelor anului în care se afla.

Notă. 1°. Au rezolvat bine problema, dând ambele soluţii D-nii: M. D. STOENESCU (Şc. Ofiţeri de aviaţie, Bucureşti), I. C. NEGRESCU (Lc. „Sp. Haret", Bucureşti); C. GR. NICOLAU (Lc. „Gh. Lazăr", Bucureşti); V. BÂRLEA-SUHĂŢEANU (Col. „N. Filipescu", Predeal).

Primii doi au dat şi soluţiile 1800, 1818 fără a ţine seamă de longevitatea oamenilor.

2°. Au rezolvat bine problema dând numai soluţia 1908, D-nii: P. P. DRĂGHICESCU, A. GH. ANDREI, N. N. POPA, M. ANDREESCU D. VASILIU (Lc. militar, Iaşi); M. C. NICULESCU (Lc. „T. Maiorescu", Bucureşti); D. D. BOIANGIU (Elev ing. Bucureşti).

3°. Propunătorul problemei notează cu $19rs$ anul naşterii, cu $19ab$ şi $19cd$ anul anterior şi posterior anului în care a propus problema, scrie condiţiile.

$$19ab - 19rs = 1 + 9 + a + b$$

$$19cd - 19rs = 1 \times 9 \times c \times d$$

şi ajunge la relaţia

$$9 \times c \times d + 9 \times a = 10 + 10c + d$$

de unde scoate $c = 7$, $d = 1$ şi găseşte soluţia unică $19rs = 1908$.

4°. Soluţia a fost redijată după soluţia *impecabilă ca formă* şi foarte bună ca fond, primită de la D-şoara L. M. TUDORAN.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5543. *Un mocan murind lăsă cu limbă de moarte ca, oile sale să fie împărțite între copiii săi după cum urmează:*

Primul copil să ia 10 oi și $^1/_9$ din oile ce au mai rămas; al doilea copil să ia 20 oi și $^1/_9$ din oile ce au mai rămas; al treilea copil să ia 30 oi și $^1/_9$ din oile ce au mai rămas și așa mai departe. Câți copii *și câte* oi *a avut mocanul știind că fiecare copil a luat același număr de oi?*

(Să se dea o soluție aritmetică).

ION S. ANTONIU.

Această problemă face parte dintr'o clasă de probleme rezolvate în *Culegerea de probleme de Aritmetică* de I. IONESCU, Partea I, *Aritmetica Rațională* (Problema 13, pag. 95 și problema 15, pag. 97).

Soluția problemei de față este: 640 oi și 8 copii.

Au rezolvat problema direct D-ra LYDIA TUDORAN (Cl. 7 Școala Centrală de Fete, București) și D-nii Col. Ing. EUG. MANOIL (S. S. I. A.); ALEXANDRU ST. IEȘAN (Cl. 5 Liceul Matei Basarab, București); DAN F. DUMITRESCU (Cl. 6 Colegiul Național Sf. Sava, București); D. GH. VASILIU (Cl. 6 Liceul Militar, Iași); GH. D. OPREA (Cl. 7 Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timișoara); EMIL I. CONSTANTINESCU (Liceul Gh. Șincai, București); MARCEL D. COTARIU (Brăila); CLAUDIU SENI (Liceul Titu Maiorescu, București); RADU P. VOINEA (Bacalaureat, Craiova); D. D. BOIANGIU, CĂLIN ION, C. DUMITRIU, C. D. EFTIMIE, MIRCEA A. GHIȚESCU și ION PANDELE VASILESCU (elevi Politechnica din București).

I. S. A.

PROBLEMA 5550. *Pe latura* BC *a triunghiului* ABC *se ia un punct mobil* M *și se consideră mijloacele* B′ *și* C′ *ale segmentelor* MB *și* MC. *Perpendicularele în* B′ *și* C′ *întâlnesc pe* AB *și* AC *respectiv în* B_1 *și* C_1. *Să se afle locul centrului cercului* AB_1C_1.

P. TROFIM.

Soluție dată de D-nii: R. P. VOINEA (Bacalaureat, Craiova); A. N. LUPU, VIOREL I. MARINESCU, CL. SENI (Lic. „T. Maiorescu", București); C. CRUCERU (Elev-inginer, Politechnica, București); M. D. IACOMI, Z. C. IVAN, A. N. POPA, D. VASILIU (Lic. militar, Iași).

Raportăm figura la axa BC și înălțimea AD. Vom avea

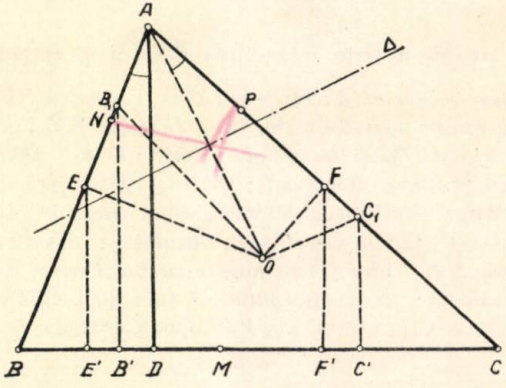
$$A(0, a),\ B(b, 0),\ C(c, 0),\ M(\lambda, 0),\ B'\left(\frac{b+\lambda}{2}, 0\right),\ C'\left(\frac{c+\lambda}{2}, 0\right)$$

$$(B'B_1)\quad x = \frac{b+\lambda}{2} \quad \text{și} \quad (C'C_1)\quad x = \frac{c+\lambda}{2}$$

$$(AB)\quad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \quad \text{și} \quad (AC)\ \frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1.$$

Din aceste patru ecuații se scoate

$$B_1\left[\frac{b+\lambda}{2},\ \frac{a(b-\lambda)}{2b}\right] \quad \text{și} \quad C_1\left[\frac{c+\lambda}{2},\ \frac{a(c-\lambda)}{2c}\right].$$



Dacă N și P sunt mijloacele lui AB_1 și AC_1 atunci din cele precedente rezultă

$$N\left[\frac{b+\lambda}{4},\ \frac{3ab-a\lambda}{4b}\right],\quad P\left[\frac{c+\lambda}{4},\ \frac{3ac-a\lambda}{4c}\right],$$

iar ecuațiile perpendicularelor în N și P pe AB și AC sunt respectiv

$$(1)\qquad y - \frac{3ab-a\lambda}{4b} = \frac{b}{a}\left(x - \frac{b+\lambda}{4}\right)$$

$$(2)\qquad y - \frac{3ac-a\lambda}{4c} = \frac{c}{a}\left(x - \frac{c+\lambda}{4}\right).$$

Eliminând pe λ între ecuațiile (1) și (2), se găsește că locul centrului cercului AB_1C_1 este dreapta

$$4a^2(b+c)x - 4a(a^2-bc)y + 3a^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2 - 4a^2bc = 0.$$

Când triunghiul este isoscel, deci când

$$a + b = 0$$

locul precedent devine dreapta

$$4a(a^2+b^2)y + b^4 - 3a^4 - 2a^2b^2 = 0$$

perpendiculară pe înălțimea AD.

Notă. Problema se poate rezolva geometric pe cale elementară. Fie O centrul cercului ABC; E și F mijloacele laturilor AB și AC; E', B', F', C' proiecțiile punctelor E, B_1, F, C_1 pe BC. Din construcțiile figurii se vede că

$$\frac{EB_1}{E'B'} = \frac{AB}{BD} \quad \text{și} \quad \frac{FC_1}{F'C'} = \frac{AC}{CD}.$$

Cum $ABD \sim AOF$ și $ADC \sim AOE$, avem

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AO}{OF} \quad \text{și} \quad \frac{AC}{CD} = \frac{AO}{OE}$$

și deci

$$\frac{EB_1}{E'B'} = \frac{AO}{OF} \quad \text{și} \quad \frac{FC_1}{F'C'} = \frac{AO}{OE}. \tag{1}$$

Prin construcție avem

$$B'C' = \frac{BC}{2} \quad \text{și} \quad E'F' = \frac{BC}{2}$$

$$\therefore \quad E'B' = F'C'. \tag{2}$$

Ținând seamă de (2) și împărțind rapoartele (1) membru cu membru se obține relația

$$\frac{EB_1}{FC_1} = \frac{OE}{OF}$$

care arată că triunghiurile dreptunghice OEB_1 și OFC_1 sunt asemeni, de unde rezultă

$$\sphericalangle OB_1E = \sphericalangle OC_1F$$

ceea ce înseamnă că patrulaterul OB_1AC_1 este inscriptibil.

Cercul AB_1C_1 trecând prin punctele fixe A și O, locul centrului lui este perpendiculara pe mijlocul lui AO.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5592. *Care este mia de numere consecutive, cele mai mici, în care nu se găseşte nicio putere perfectă ?*

I. IONESCU.

Primele patrate perfecte consecutive care diferă între ele cu peste 1000 sunt 250 000 şi 251 001. Insă în intervalul lor se află numărul 250 047 care este un cub perfect (63^3).

Să cercetăm intervalul imediat următor, adică numerele dintre 251 001 şi 252 004. Avem:

$2^{17} = 131\,072$ iar $2^{18} = 262\,144$, care iese din interval.
$3^{11} = 177\,147$, iar 3^{12} se vede *apriori* că iese din interval.
$4^8 = 65\,536$ iar $4^9 = 262\,144$, care iese din interval.
$5^8 = 390\,625$ iese din interval.
$6^6 = 46\,656$ iar $6^7 = 279\,936$, care ese din interval.
$7^6 = 117\,649$, iar 7^7 va ieşi din interval.
$8^6 = 262\,144$, care ese din interval.
$9^5 = 59\,049$, iar 9^6 va ieşi din interval.
$11^5 = 161\,051$, iar 11^6 va ieşi din interval.
$12^5 = 248\,832$ iar 12^6 va ieşi din interval.
$13^4 = 28\,561$ iar 13^5 va ieşi din interval.
$14^4 = 38\,416$ iar 14^5 va ieşi din interval.
$15^4 = 50\,625$, iar 15^5 va ieşi din interval.
$16^4 = 65\,534$, iar 16^5 va ieşi din interval.
$17^4 = 83\,521$, iar 17^5 va ieşi din interval.
$18^4 = 14\,976$, iar 18^5 va ieşi din interval.

Privind o tablă cu pătratele şi cuburile numerelor, constatăm că în interval nu se găseşte niciun cub perfect.

Deci intervalul căutat este *251 002 — 252 003.*

CLAUDIU SENI.
(Elev, Liceul Titu Maiorescu, Bucureşti).

PROBLEMA 5603. *Un proiectil de greutate* P *este asvârlit sub unghiul de tragere* α *cu iuţeala* v_0. *Ajungând în punctul cel mai înalt, proiectilul explodează spărgându-se în trei schije. Prima schije de greutate* P_1 *urmează mai departe traiectoria pe care ar fi avut-o proiectilul în cazul când n'ar fi făcut explozie. Schija a doua de greutate* P_2 *cade pe verticală fără iuţeală iniţială.*

Să se studieze mişcarea schijei a treia.

Să se arate că în tot timpul mişcării cele trei schije se găsesc pe o orizontală.

Rezistenţa aerului se va neglija.

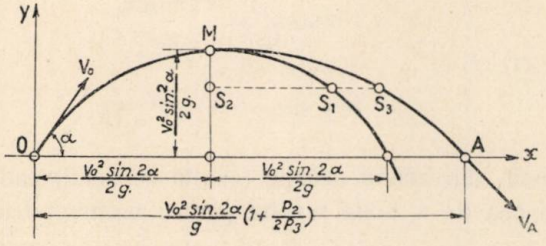
ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de D-nii MIRCEA I. STĂNCULESCU, Sublocot. PAUL DOBRESCU, PAVEL TH. EUGENIU şi D. D. BOIANGIU (elevi ai Politechnicei din Bucureşti).

Luând în planul de tragere drept axe de coordonate *orizontala* Ox şi *verticala ascendentă* Oy, O fiind *gura tunului*, ecuaţiile mişcării proiectilului înainte de explozie sunt:

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$



Timpul în care proiectilul ajunge în punctul M cel mai înalt al traiectoriei sale este dat de relaţia:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt = 0 \quad ; \quad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g},$$

iar coordonatele x_m, y_m ale acestui punct sunt respectiv:

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad ; \quad y_m = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Proiectilul ajuns în M, explodează spărgându-se în trei schije S_1; S_2; S_3 de greutăţi respectiv P_1; P_2; $P_3 = P - P_1 - P_2$; să notăm cu (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) coordonatele acestor schije, *la un moment oarecare* t.

Explozia fiind un fenomen interior, înseamnă că asupra sistemului format de cele trei schije nu a intervenit nicio forţă

exterioară, deci centrul lor de greutate G (*x*, *y*) *va urma să străbată traiectoria dinaintea exploziei ca şi cum nimic nu s'ar fi întâmplat.*

Aplicând *teorema momentelor statice în raport cu axele de coordonate* avem:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = Px \qquad (1)$$

$$P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 = Py \qquad (2)$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = P. \qquad (3)$$

Dar, prima schijă S_1 urmează mai departe traiectoria pe care ar fi avut-o proiectilul în cazul când n'ar fi făcut explozie.

Rezultă deci:

$$x_1 = x \quad \text{şi} \quad y_1 = y.$$

Pentru schija a doua S_2 care cade liber pe verticală:

$$x_2 = \text{constant} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$y_2 = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = y.$$

In adevăr, din prima ecuaţie rezultă că schija cade pe verticală, iar din cea de a doua rezultă pentru momentul iniţial:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \; ; \; y_2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \; ; \; \frac{dy_2}{dt} = v_{y_2} = 0$$

adică schija cade liber din M, fără iuţeală iniţială.

Introducând aceste valori în (1) şi (2) obţinem:

$$x_3 = \frac{P - P_1}{P_3} \cdot x - \frac{P_2}{P_3} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$y_3 = \frac{Py - P_1y - P_2y}{P_3} = y.$$

Rezultă deci:

$$y_1 = y_2 = y_3 = y$$

prin urmare *cele trei schije în mişcare se găsesc întotdeauna pe o orizontală.*

Ecuaţiile mişcării schijei a treia S_3 sunt:

$$x_3 = \frac{P - P_1}{P_3} v_0 t \cos\alpha - \frac{P_2}{P_3} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$y_3 = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Această schije va atinge în A orizontala Ox la timpul dat de:

$$y_3 = 0 \quad ; \quad t_3 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

şi va avea *bătaia:*

$$OA = \frac{P - P_1}{P_3} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - \frac{P_2}{P_3} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Sau ţinând seama de (3):

$$OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \left[1 + \frac{P_2}{2P_3}\right] = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \left[1 + \frac{P_2}{2(P - P_1 - P_2)}\right].$$

Componentele iuţelii schijei S_3 în A sunt respectiv:

$$v_{x_3} = \frac{P - P_1}{P_3} \cdot v_0 \cos\alpha = \left(1 + \frac{P_2}{P_3}\right) v_0 \cos\alpha$$

$$v_{y_3} = - v_0 \sin\alpha,$$

iar *iuţeala totală de izbire:*

$$v_A = v_0 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(1 + \frac{P_2}{P_3}\right)^2 \cos^2\alpha} > v_0.$$

AL. ST.

EXERCIŢII

1. Fie M mobil pe cercul O de diametru fix AB. Se ia pe MA o lungime MC egală cu MO. Să se arate că perpendiculara în C pe MA rămâne tangentă cercului B (BO).

G-L GH. BUICLIU.

R. S'a văzut la exerciţiul 23, pag. 531 G. M., Vol. XLVII că C descrie melcul lui PASCAL cu punctul dublu în A, trecând prin O şi având pe AO ca axă. Conform definiţiei melcului lui PASCAL rezultă că perpendiculara în pe MA este tangentă cercului B (BO).

PROBLEME PROPUSE

5691. Să se găsească două fracţii aşa ca numărătorul uneia din ele să fie patratul numitorului celeilalte. Care din acele fracţii poate fi ireductibilă?

I. IONESCU.

5692. Care este numărul numerelor prime cu 200 şi mai mici ca el, care în acelaşi timp sunt prime şi cu 231?

COMANDOR I. LINTEŞ.

5693. Trei lucrători A, B, C, lucrând împreună, termină o lucrare în n zile. Lucrând numai B cu C împreună, ar termina-o în a zile, iar A cu C în b zile. Să se determine numerele întregi a, b, n aşa fel ca fiecare dintre cei trei lucrători, lucrând singur, să termine lucrarea într'un număr întreg de zile.

Cum s'ar prezenta problema similară în cazul când s'ar da numărul zilelor de lucru a, respectiv b, c pentru fiecare din cele trei perechi de lucrători B cu C, C cu A, A cu B?

V. VÂLCOVICI.

5694. Un patrat ABCD este împărţit, printr'o dreaptă paralelă cu două laturi opuse, în dreptunghiurile AMND şi MNCB. Cunoscând raportul ariilor acestor dreptunghiuri şi lungimea $\overline{MD}$, să se reconstruiască patratul.

VIRGIL GHIŢESCU.

5695. Pe dreapta Δ, paralelă cu OX, se ia un punct mobil A. Fie B proiecţia lui A pe OX, C proiecţia lui B pe OA şi D intersecţia lui BC cu perpendiculara în O pe OX. Se uneşte O cu simetricul E al lui D faţă de B şi se notează cu F intersecţia lui OE cu AB.

Să se demonstreze că, dacă A se mişcă pe Δ, învelitoarea perpendicularei în C pe FC este totuna cu locul geometric al lui C.

G-L GH. BUICLIU.

5696. Se consideră trei triunghiuri (Ti) $(i = 1, 2, 3)$ înscrise în aceeaşi conică (E) şi astfel ca triunghiurile (T_1) şi (T_2) să fie circumscrise aceleiaşi parabole (P_3), iar triunghiurile (T_1) şi (T_3) altei parabole (P_2). Să se demonstreze că:

1°. Triunghiurile (T_2) şi (T_3) sunt de asemeni circumscrise unei parabole (P_1).

2°. Cercurile circumscrise celor trei triunghiuri (T_i) au un punct comun φ, situat pe conica (E).

3°. Perechile de tangente duse din φ, parabolelor (P_1), (P_2), (P_3) determină pe conica (E) trei coarde paralele.

In particular, ce devine această proprietate, când conica (E) este un cerc?

ŞERBAN GHEORGHIU.

5697. Se dă un cerc de diametru $\overline{AB} = a$. In punctul A se roteşte o dreaptă, care taie cercul în D şi tangenta la cerc din B, în punctul T. Se ia pe DA, dela D spre A, lungimea $\overline{DL}$ egală cu $\overline{DT}$, iar de o parte şi de alta a punctului L, pe dreapta AD, lungimile $\overline{LQ_1}$ şi $\overline{LQ'}$ egale cu $\overline{BT}$. Se cere să se construiască locul punctelor Q_1 şi Q'.

GENERAL GH. I. LITEANU.

5698. Să se rezolve sistemul:

$$\sin(x-y)+\cos(x+y)=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

La problema aceasta înlocuind partea a doua a ecuaţiilor prin a şi b şi socotindu-le drept coordonatele unui punct din plan, să se determine regiunile pentru care sistemul:

$$\sin(x-y)+\cos(x+y)=a$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=b$$

este posibil.

GH. D. SIMIONESCU.

5699. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^2\left(\frac{\pi x}{1+x+x^2}\right) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{1+x+x^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{1+x+x^2}\right).$$

C. MIHU.

5700. Să se determine un punct M din interiorul triunghiului ABC, pentru care suma

$$\Sigma \mid \overline{MB_1}^2 - \overline{MC_1}^2 \mid$$

este maximă, A_1, B_1, C_1 fiind proiecţiile lui M pe laturile triunghiului.

TIBERIU POPOVICIU.

5701. Să se determine mişcările rectilinii, ale căror elemente satisfac relaţiei:

$$4v^4 dv dx^2 + x(xdv + 2vdx)^3 = 0,$$

x fiind spaţiul, iar v viteza. Să se demonstreze că printre acestea există şi o mişcare tautocronă.

M. GHERMĂNESCU.

5702. Se povesteşte despre un învăţat că începând o problemă pe spatele unei trăsuri ce staţiona, a continuat-o şi după plecarea trăsurii, alergând în urma ei.

Asimilând spatele trăsurii unui plan vertical şi presupunând că acest învăţat a trasat cu creta cu iuţeala v în raport cu trăsura, un cerc de raza r, un diametru orizontal şi un diametru vertical în timp ce trăsura mergea cu iuţeala constantă v_0 pe un drum rectiliniu orizontal, să se determine curbele trasate de vârful cretei faţă de un observator ce privea scena nemişcat. Să se studieze problema şi în cazul când trăsura ar fi avut o mişcare rectilinie uniform accelerată cunoscută.

ALEXANDRU STOENESCU.

BURSE ŞI PREMII DIN FONDURILE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

REGULAMENTUL FONDULUI « ANGHEL SALIGNY »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea D-lui *I. Ionescu,* constitue — în conformitate cu dorinţa donatorului — un fond denumit fondul „*Anghel Saligny*“ al cărui venit să servească la publicarea de cărţi tehnice conform art. 6 din actul de donaţie şi în consecinţă înfiinţează o „*Bibliotecă tehnică a Gazetei Matematice*“.

Art. 2. — Toate cărţile tipărite din acest fond vor purta pe copertă în frunte următoarea titulatură: „*Biblioteca tehnică a Gazetei Matematice*“ (tipărită din fondul „*Anghel Saligny*“).

Art. 3. — Biblioteca va avea formatul 120×185 sau 175×260 mm., după felul şi întinderea manuscriselor. Dimensiunile se înţeleg pentru cărţile broşate şi tăiate.

Art. 4. — Volumele se vor da în comerţ legate în pânză de culoare cenuşiu închis şi vor avea imprimate în auriu, inscripţiunile ce se vor stabili pentru fiecare publicaţiune în parte.

Art. 5. — Manuscrisele se adresează delegaţiunii, care convoacă o Adunare generală extraordinară pentru a alege o Comisiune de 3 membri, care se completează cu casierul şi care dă în mod definitiv avizul dacă lucrarea poate să fie tipărită din fondul „*Anghel Saligny*“; aceasta atât din punct de vedere financiar cât şi din punct de vedere al valorii ştiinţifice a lucrării.

Art. 6. — Comisiunea nu ia în considerare decât lucrările complete de matematici aplicate sau cuprins tehnic în legătură cu aceste ştiinţe.

Art. 7. — Dacă la prezentarea manuscrisului nu sunt sume disponibile din venitul fondului „*Anghel Saligny*“ pentru tipărire şi dacă Comisiunea însărcinată cu cercetarea lui opinează că e bine să fie tipărit, atunci delegaţiunea Societăţii va putea împrumuta cu dobândă de 5% cu aprobarea unei Adunări generale suma necesară tipăririi, din numerarul disponibil al „*Gazetei Matematice*“.

Art. 8. — Odată cu depunerea manuscrisului, autorul este obligat să declare în scris că se va supune dispoziţiilor acestui

regulament şi ale actului de donaţie al fondului şi că nu va tipări o a doua ediţie înainte de epuizarea ediţiei tipărită în această bibliotecă.

Art. 9. — In regulă generală se preferă lucrările membrilor Societăţii „*Gazeta Matematică*".

Art. 10. — Comisiunea pentru cercetarea lucrării, hotărăşte pentru fiecare ediţiune tipărită conform acestui regulament numărul volumelor, formatul (conform art. 3), inscripţiunile (conform art. 4) şi preţul. De asemenea Comisia va urmări tipărirea şi va lua la timp dispoziţii speciale necesare.

Art. 11. — (art. 4 din actul de donaţie al fondului „*Anghel Saligny*"). — Sumele ce se încasează din vânzarea cărţilor după ce se scot din ele cheltuelile de cost, comision şi expediţie, se distribue în modul următor:

a) 10% autorului respectiv;

b) 20% Societăţii „*Gazeta Matematică*" pentru sporirea capitalului ei;

c) 20% fondului „*Anghel Saligny*" pentru sporirea lui continuă, şi

d) 50% drept venit al fondului „*Anghel Saligny*", întrebuinţându-se prin urmare pentru noui publicaţiuni.

Art. 12. — Autorul primeşte gratuit câte 10 volume din lucrările lui, la fiecare ediţie.

REGULAMENTUL BIBLIOTECII «GEORGE ŢIŢEICA»

Art. 1. — Pentru cinstirea memoriei Profesorului GEORGE ŢIŢEICA, Societatea *Gazeta Matematică*, primind donaţiunea făcută de către familia lui, a hotărît înfiinţarea unei biblioteci de Matematici Elementare, care să permită elevilor să-şi completeze şi să-şi desvolte cunoştinţele de matematici căpătate în şcoli.

Art. 2. — Biblioteca va purta numele de „*Biblioteca Matematică George Ţiţeica*" şi va fi alcătuită din broşuri cu formatul 120×183 mm., fiecare broşură conţinând 50 până la cel mult 100 pagini, inclusiv titlurile şi tabla de materii, cuprinzând monografii cu diferite chestiuni de matematici elementare cu referinţe istorice şi aplicaţii teoretice şi practice.

Art. 3. — Toate broşurile din această bibliotecă vor purta titulatura:

GAZETA MATEMATICĂ

BIBLIOTECA MATEMATICĂ „GEORGE ŢIŢEICA"

şi vor avea un număr de ordine.

Art. 4. — Pentru pregătirea broşurilor din această bibliotecă Delegaţia Societăţii se va adresa la membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, fixându-le subietul ce urmează a trata.

Conform dorinţei donatorilor, prima monografie va trata un subiect de geometrie elementară.

Art. 5. — Manuscrisele pregătite pentru tipărire se vor da în cercetare unei comisii compusă dintr'un delegat şi doi membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, de specialitatea chestiunilor tratate în manuscris.

Comisiunea îşi va da avizul, printr'un raport colectiv prezentat Delegaţiei, asupra admisibilităţii tipărirei şi a eventualelor modificări, pe care le-ar găsi necesare.

Această comisiune, completată cu autorul manuscrisului, se va îngriji de tipărire.

Art. 6. — Comisiunea prevăzută la art. 5, precedent se alege în Adunările Generale, sau în şedinţele lunare, alegerea punându-se expres la oridea zilei.

Art. 7. — Fondul pentru tipărirea Bibliotecii Matematice GEORGE ŢIŢEICA poate să fie sporit şi prin alte donaţii în afară de prevederile dela art. 1.

Art. 8. — Când venitul fondului, completat eventual cu alte sume donate sau cu disponibil din fondurile Societăţii *Gazeta Matematică*, va putea acoperi cheltuelile de tipărire a unei broşuri, Delegaţia Societăţii va îngriji pregătirea unui manuscris în conformitate cu acest regulament.

Art. 9. — Pentru a se începe cât mai neîntârziat tipărirea Bibliotecii Matematice GEORGE ŢIŢEICA, donatorii au oferit a suporta cheltuelile tipăririi primei monografii.

Art. 10. — Manuscrisele pentru Biblioteca Matematică GEORGE ŢIŢEICA vor fi înaintate Societăţii *Gazeta Matematică* în trei exemplare.

Art. 11. — Din sumele realizate din vânzarea broşurilor, se vor acoperi cheltuelile de tipărire, expediere, taxe, comision de vânzare, etc. Din rest se va lua de către Societatea *Gazeta Matematică,* pentru acoperirea cheltuelilor de administrarea fondului, cota prevăzută de regulamentul general al administrării fondurilor Societăţii *Gazeta Matematică.* Restul va constitui venitul net al Bibliotecii Matematice GEORGE ŢIŢEICA.

Art. 12. — Din venitul net se dă autorului 10% pentru cheltuelile făcute cu alcătuirea manuscriselor, scrierea la maşină, desemnarea figurilor, etc.

Art. 13. — Din restul venitului net, jumătate se dă pentru sporirea fondului Biblioteca Matematică GEORGE ŢIŢEICA şi jumătate pentru sporirea sumelor destinate tipăririi noilor broşuri.

Art. 14. — Autorii monografiilor nu vor primi nici-o remuneraţie pentru dreptul de autor. Ei vor primi 10 broşuri gratuite.

Art. 15. — Autorii monografiilor vor da, odată cu prezentarea manuscriselor, o scrisoare prin care se declară complet de acord cu prevederile prezentului regulament şi prin care se obligă a nu tipări, ei şi urmaşii lor, noi exemplare şi a nu publica monografia în alte reviste române sau străine, până când Societatea *Gazeta Matematică* nu va fi terminat vânzarea broşurilor ce posedă, sau a ediţiilor următoare, dacă Societatea hotărăşte publicarea de noi ediţii.

Numai printr'o renunţare în scris a Societăţii *Gazeta Matematică,* autorul sau urmaşii lui sunt deslegaţi de această obligaţie.

Art. 16. — La publicarea unei noi ediţii, Societatea *Gazeta Matematică* se poate adresa pentru revederea monografiei unui alt membru al Societăţii *Gazeta Matematică,* atunci când autorul monografiei nu mai este în vieaţă sau când fiind în vieaţă declară înscris că nu doreşte să se ocupe de revederea sau tipărirea unei noi ediţii a monografiei sale.

Art. 17. — Când Societatea *Gazeta Matematică* nu va mai putea îndeplini cerinţele acestui regulament, fondul Bibliotecii Matematice GEORGE ŢIŢEICA se va da Academiei Române, cu rugămintea de a continua publicarea bibliotecii, conform cu acest regulament, dacă va fi posibil, în caz contrar, fondul va rămâne la dispoziţia Academiei Române.

Art. 18. — In fiecare an, la prima Adunare Generală, Comisia prevăzută la art. 11 din Regulamentul General al administrării fondurilor *Gazetei Matematice*, va face darea de seamă asupra veniturilor şi cheltuelilor făcute şi asupra realizărilor din cursul anului.

REGULAMENTUL FONDULUI BURSEI «PROFESOR ION IONESCU»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primeşte să administreze fondul instituit de un grup de foşti elevi ai D-lui Profesor *Ion Ionescu*, reprezentat prin D-nii *Gh. Em. Filipescu*, *A. Ioanovici*, *H. Theodoru* şi *D. Stan*, membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, din venitul căruia să se acorde o bursă anuală elevilor „Politehnicei“ din Bucureşti.

Bursa va purta numele: *Bursa Profesor Ion Ionescu* şi este menită, în conformitate cu dorinţa donatorilor, să perpetueze tradiţia muncii şi disciplinei introduse de D-nul Prof. *Ion Ionescu* în vechea Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele şi continuate în „Politehnică“.

Art. 2. — Fondul iniţial este constituit din efecte publice 3% (Renta consolidării) în valoare nominală de 1.000.000 lei.

Art. 3. — Venitul acestui fond, micşorat cu cotele prevăzute la art. 7 din Regulamentul general al Administrării Fondurilor *Gazetei Matematice*, se acordă sub formă de bursă, plătită lunar, în rate egale, timp de 9 luni, unuia din elevii cei mai merituoşi ai Secţiei de Construcţii dela „Politehnica“ din Bucureşti, care satisface următoarele condiţii:

a) Să fie român.

b) Să fi fost cel puţin 2 ani corespondent al *Gazetei Matematice.*

c) Să fie elev în anul III sau IV al Şcoalei.

d) Să fi promovat anii anteriori în timpul minim regulamentar.

Art. 4. — Bursa este unică şi indivizibilă.

Art. 5. — Dacă într'un an nu se poate acorda bursa, ea se va acorda în anii următori elevilor care urmează în îndeplinirea condiţiilor dela art. 3. In nici un caz venitul fondului nu se capitalizează.

Art. 6. — In cazul când elevul care a avut bursa în anul III termină toate îndatoririle din programul Şcoalei înainte de începerea cursurilor anului IV, el va continua să primească bursa, în mod automat, şi în anul IV.

Bursa poate fi suprimată în cursul anului, dacă elevul căruia i s'a atribuit, dă vădite dovezi că nu-şi mai îndeplineşte toate îndatoririle şcolare. In acest caz bursa poate fi acordată altui elev pentru restul anului.

Art. 7. — Bursa se acordă de o Comisiune, compusă din: 2 membri ai *Gazetei Matematice* dintre care unul trebue să facă parte din Delegaţie, desemnaţi de prima Adunare generală anuală; toţi profesorii şi conferenţiarii Şcoalei Politehnice dela Secţia Construcţiilor, activi şi onorari, care sunt membri ai *Gazetei Matematice.*

Aceeaşi Comisiune va hotărî şi asupra cazurilor de retragere a bursei, prevăzute la art. 6.

Art. 8. — Bursa se achită de Casierul *Gazetei Matematice* direct elevului, la 15 a fiecărei luni, începând cu 15 Octomvrie şi terminând cu 15 Iunie.

Art. 9. — Fondul iniţial poate fi mărit prin donaţiuni ulterioare, acceptate de Societatea *Gazeta Matematică*, conform cu prevederile ei statutare. Veniturile produse de aceste sporiri, se vor capitaliza până ce vor permite acordarea unei burse de valoare egală, în condiţiunile acestui Regulament.

Art. 10. — In caz de disolvare a Societăţii *Gazeta Matematică*, fondul se va trece în Administrarea „Politehnicei" din Bucureşti, cu acelaşi regulament.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE ARITMETICĂ

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*" acordă un premiu anual de aritmetică în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la aritmetică dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulți ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri și un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 7 al *„Gazetei Matematice“*, care apare în luna Martie.

REGULAMENTUL PREMIULUI «GHEORGHE ȚIȚEICA»

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria marelui *„Profesor Gheorghe Țițeica“*, Societatea *„Gazeta Matematică“* acordă un premiu anual de geometrie elementară în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil și se decerne autorului unor lucrări referitoare la geometrie elementară, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din țară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulți ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri și un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 11 al *„Gazetei Matematice“*, care apare în luna Iulie.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE ALGEBRĂ

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică“* acordă un premiu anual de algebră în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la algebră, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 9 al „*Gazetei Matematice*“, care apare în luna Mai.

REGULAMENTUL PREMIULUI « VASILE CONTA »

Art. 1. — In dorinţa de a permanentiza acordarea unui premiu anual pentru lucrări de filosofia matematicilor, în memoria ilustrului filosof român *Vasile Conta*, premiu instituit de către *Ana Conta Kernbach*, sora ilustrului filosof, în timpul vieţii ei, prin o contribuţie viageră anuală la Societatea „*Gazeta Matematică*“, aceasta va acorda în continuare, în fiecare an, un premiu denumit „*Vasile Conta*“ în valoare de 4.000 (patru mii) lei.

Art. 2. — Premiul se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul fiecărui an până la 1 Iulie.

Dacă până la acea dată nu se prezintă nicio lucrare, se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Art. 3. — Prima Adunare generală anuală alege o Comisiune compusă din doi membri şi un delegat, care examinează lucrările; mandatul acestei Comisiuni este limitat la un an, chiar dacă nu se acordă premiul.

Art. 4. — Comisiunea prezintă celei de-a doua Adunări generale din acel an, un raport prin care propune spre premiere una din lucrările prezentate, justificând alegerea.

Art. 5. — In cazul neacordării premiului într'un an sau în mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se, după propunerea Comisiunii şi aprobarea Adunării generale, unul sau mai multe premii de valoare minimă dela art. 1.

Art. 6. — Autorii lucrărilor trebue să fie români şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Art. 7. — Raportul Comisiunii se publică în numărul din Noemvrie al *„Gazetei Matematice“*.

REGULAMENTUL PREMIULUI « SPIRU HARET »

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria marelui profesor şi reformator al învăţământului, *Spiru Haret*, primul român doctor în ştiinţele matematice, Societatea *„Gazeta Matematică“* acordă în fiecare an un premiu denumit *„Spiru Haret“*, în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu va fi constituit din venitul sumelor adunate pentru fondul *„Spiru Haret“*, completat eventual de noi donaţii sau de Societatea *„Gazeta Matematică“* din venitul fondului său general de premii, până la suma de mai sus.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unei lucrări de mecanică sau astronomie, dintre cele publicate în *„Gazeta Matematică“*, în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politehnică sau student la o Facultate de ştiinţe din ţară.

Art. 4. — In cazul când într'unul sau mai mulţi ani de-a-rândul premiul n'ar putea fi decernat, valoarea lui pe acel an sau pe acei ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisiune, compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiei se publică în Nr. 12 al *„Gazetei Matematice“*, care apare în luna August.

REGULAMENTUL PREMIULUI «V. CRISTESCU»

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria Inginerului *V. Cristescu*, membru fondator al „*Gazetei Matematice*", în jurul căreia a animat şi activat intens şi neîntrerupt peste 33 ani, Societatea „*Gazeta Matematică*" acordă un premiu anual denumit „*Vasile Cristescu*" în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu va fi constituit din venitul sumelor donate de D-nii: *Gheorghe, Miron* şi *Alexandru Niculescu* şi din venitul altor eventuale donaţiuni, completate până la suma de mai sus, din venitul fondului general de premii al Societăţii „*Gazeta Matematică*".

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unei lucrări referitoare la trigonometrie dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*" în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politehnică, sau student la o Facultate de ştiinţe din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor raportul indicând lucrarea ce se propune spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiei se publică în Nr. 10 al „*Gazetei Matematice*" care apare în luna naşterii Inginerului *V. Cristescu.*

Art. 7. — In cazul când Societatea nu şi-ar mai putea îndeplini obligaţiunea acordării premiului de mai sus, atunci sumele donate de D-nii *Alexandru, Miron* şi *Gheorghe Niculescu* şi alţi eventuali donatori, se vor remite Liceului Naţional din Iaşi, care a avut pe *V. Cristescu* ca elev, iar dacă acest liceu n'ar mai exista, Liceului cel mai vechi din Iaşi, în funcţiune. In acest caz, din venitul sumelor acestea se va acorda un premiu anual, celui mai bun elev la matematici al liceului.

REGULAMENTUL PREMIULUI « INGINER H. CAPRIEL »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă un premiu în valoare de 1000 lei, din venitul fondului „*Inginer H. Capriel*“, adunat în urma propunerii dela 2 Iunie 1912 a *Inginerului Ştefan Mirea* şi din venitul fondului general de premii.

Art. 2. — Premiul se acordă din 5 în 5 ani celei mai bune lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, ce se va prezenta Societăţii de către studenţii Universităţilor, de către elevii Şcolilor Politehnice, sau de către elevii Şcolilor Militare pregătitoare şi de aplicaţie din ţară.

Art. 3. — Lucrarea se propune de o Comisiune aleasă în acest scop şi va consta dintr'o chestiune de matematici pure sau de matematici aplicate, din programele Facultăţilor de Ştiinţe şi Şcolilor speciale de Ingineri şi Ofiţeri.

Art. 4. — Comisiunea se compune din doi membri şi un delegat şi se alege de către prima Adunare generală din anul în care începe o perioadă de 5 ani. Această Comisiune pregăteşte chestiunile până în luna Mai a anului următor când se vor publica în „*Gazeta Matematică*“.

Aceleaşi chestiuni se vor publica în fiecare an în numărul „*Gazetei Matematice*“ din luna Mai, până la expirarea anului al 4-lea din perioada de 5 ani pentru care au fost propuse.

Art. 5. — Lucrările — semnate de autor — se trimit Societăţii cel mai târziu până la 1 Mai al anului care precede decernarea premiului. Decernarea se face de a doua Adunare generală a celui al 5-lea an, în urma raportului Comisiunii dela art. 4, publicându-se rezultatul în numărul din Octomvrie următor.

Art. 6. — Premiul este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă, valoarea lui se adaugă la premiul perioadei sau perioadelor următoare de 5 ani, până la decernare.

REGULAMENTUL
FONDULUI « GENERAL SC. PANAITESCU »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea *Generalului Scarlat Panaitescu*, înfiinţează un fond denumit fondul „*General Scarlat Panaitescu*“, din venitul căruia, şi în conformitate

cu dorința donatorului, să se acorde un premiu celei mai bune lucrări de matematică aplicată la științele militare, publicată *în decurs de 5 ani.*

Art. 2. — Studiile în manuscris care se aduc la cunoștiința Societății pe orice cale, se iau și ele în considerație la acordarea premiului.

Art. 3. — Premiul poartă numele: *„Premiu pentru lucrări de matematică aplicată la științele militare“.*

Art. 4. — Autorii publicațiilor prezentate trebue să fie români și să-și fi făcut cultura matematică în țară.

Art. 5. — Premiul este indivizibil și se acordă neapărat la fiecare 5 ani. In cazul când nu se găsește nicio lucrare de premiat sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voiește a primi suma fixată, ea se dă uneia din revistele militare în care se publică și chestiuni de matematică aplicată la științele militare.

Art. 6. — Prima Adunare generală din fiecare an alege o Comisiune compusă dintr'un delegat al Societății și doi membri, între care cel puțin un ofițer, Comisiune care examinează lucrările apărute în cursul anului. Mandatul acestei Comisiuni este limitat la un an chiar când premiul nu se decerne.

Art. 7. — Comisiunea prezintă celei de a doua Adunări generale un raport asupra lucrărilor publicate în cursul anului expirat sau asupra manuscriselor aduse la cunoștința Societății în același timp. Comisiunea anului în care se face decernarea premiului, trebue să propună în raportul său, spre premiare, lucrarea cea mai meritoasă ajunsă la cunoștința Societății în cursul ultimilor 5 ani; această Comisiune va avea deci să țină seamă de cele patru rapoarte anterioare.

Art. 8. — Raportul Comisiunii din anul în care se face decernarea premiului, se publică în numărul *„Gazetei Matematice“* din Septemvrie următor Adunării generale care a aprobat decernarea.

REGULAMENTUL
FONDULUI « LT.-COLONEL GH. A. TĂNĂSESCU »

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică“* primind legatul decedatului *Al. Tănăsescu*, înființează un fond denumit fondul *„Lt.-Colonel G. A. Tănăsescu“*, în memoria fiului său.

Art. 2. — Din venitul acestui fond se vor da cărţi de matematici celui clasificat întâiul la concursurile anuale ale *Gazetei Matematice.*

Art. 3. — In anii când aceste concursuri nu au loc, veniturile vor mări fondul.

REGULAMENTUL PREMIULUI «NICOLAE G. BOTEA»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea D-lui Profesor *G. Botea,* pentru a cinsti memoria fiului său *Nicolae G. Botea,* fost distins corespondent al *Gazetei* şi membru al Societăţii, constitue un fond denumit fondul „*Nicolae G. Botea*“, din al cărui venit să se acorde un premiu anual, constând din cărţi de ştiinţă, autorului celei mai bune lucrări (articol, notă, problemă rezolvată) de *geometria triunghiului şi a tetraedrului,* dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*“, în ultimul volum apărut.

Art. 2. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de şcoală militară, de Politehnică sau student de Facultate din ţară.

Art. 3. — Fondul se poate mări atât de donator cât şi de alte persoane. Toate sumele atribuite fondului se transformă în rente de Stat sau efecte garantate de Stat.

Art. 4. — Premiul se va acorda în orice caz în fiecare an.

Art. 5. — Prima Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă celei de-a doua Adunări generale din acelaşi an raportul indicând autorul şi lucrarea ce se propune spre premiare. In acelaşi raport se vor specifica şi cărţile ce vor constitui premiul.

Art. 6. — Raportul Comisiei, aprobat de Adunarea generală se publică în Nr. 5 al *Gazetei Matematice,* care apare în luna Ianuarie.

Art. 7. — In cazul când Societatea nu s'ar mai putea obliga cu realizarea dorinţei donatorului, atunci fondul adunat până în acel moment, va fi trecut Comitetului şcolar al Colegiului Naţional Sft. Sava din Bucureşti, pentru ca din venit să se dea la finele fiecărui an şcolar, cărţi de ştiinţă, celui mai silitor elev din clasa III-a A a acelui colegiu.

REGULAMENTUL PREMIULUI «INGINER ALEXANDRU ROȘU»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*", primind donațiunea D-lui *Alexandru A. Roșu*, pentru a cinsti memoria tatălui său Inginer *Alexandru Roșu*, fost corespondent neobosit și fost membru activ al *Gazetei Matematice*, constitue un fond denumit fondul „*Inginer Al. Roșu*" din al cărui venit să se acorde un premiu anual, în numerar.

Art. 2. — Premiul este indivizibil și se decerne *celui mai harnic corespondent* al *Gazetei Matematice*, elev de liceu, pentru activitatea depusă în cursul ultimului volum apărut.

Art. 3. — Premiul se va acorda în orice caz în fiecare an.

Art. 4. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisiune compusă din 2 membri și un delegat care prezintă primei Adunări generale a anului următor raportul indicând elevul premiat.

Art. 5. — Raportul Comisiunei se publică în Nr. 8 al *Gazetei Matematice*, care apare în luna decesului Inginerului *Alexandru Roșu*.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andarache I. (5205, 606); *Andrei A.* (5626); *Boldescu P.* (5688, P); *Căruntu D. Fl.* (5637, 44); *Constantinescu Em.* (5598); *Cotariu D. M.* (5584, 686, E, N, P); *Cubat H. A.* (5614, 77); *Donţu Gh. Gh.* (5136, 520, 66, 95, 99, 602, 10, 43, 44, 74, 86); *Drăghicescu P. P.* (4172, 5292); *Gloden A.* (5571, P); *Iacob Şt. E.* (E); *Iliescu C. C.* (5618); *Ionescu F. P.* (5363, 530, 618, 48); *Ionescu V. N.* (5626, 37); *Laptew P. P.* (5595); *Marcus B.* (5447); *Mihăescu S. Ştefan* (4393); *Mihăilescu Şt.* (5644); *Negrea A. M.* (5404); *Popescu I. Ad.* (N, P); *Popescu I. Gh.* G-l (A); *Puchiu T. Gh.* (5634, 44); *Seni Cl.* (5645, 87); *Vasiliu A. B.* (5545); *Vasiliu Gh. D.* (5588, P); *Wegener N. Eug.* (5606, 37, 44, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu**, *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 200

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 82.367.

BIBLIOTECA CENTRALĂ

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1942

SUMARUL

1. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
2. Un loc geometric elementar. . . . . *G-l Gh. Buicliu.*
3. Proprietăţi ale numerelor prime cu un număr dat . . . . . *C-dor I. Linteş.*
4. Concursul „Gazetei Matematice" din 1943. *Delegaţia Societăţii.*
5. Note matematice: 2 — 9.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 317.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2906, 4252, 4588, 5114, 5278, 5306, 5352, 5437, 5549, 5579, 5627, 5642.
10. Exerciţii: 2 — 4.
11. Probleme propuse: 5703 — 5714.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 547, Vol. XLVII)

Rotația superficială.

In cazul divergenței superficiale, am văzut că pot exista suprafețe pentru cari componenta normală a funcției vectoriale variază brusc; în cazul de față admitem că există suprafețe de discontinuitate pentru cari are loc o variație bruscă a componentei tangențiale a vectorului $\mathfrak{F}$ la acea suprafață. Pentru determinarea rotației superficiale, formăm integrale de linie a vectorului $\mathfrak{F}$ pentru linia închisă dl_1, $-\triangle h$, dl_2 și $\triangle h$ așa cum se ve vede din Fig. 59.

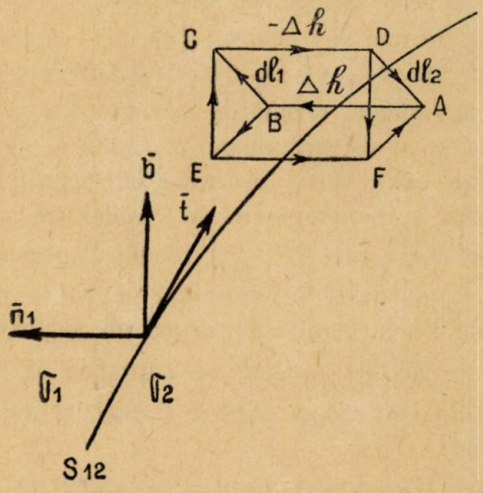


Fig. 59. Determinarea $\text{rot}_s \mathfrak{F}$.

Dacă descompunem însă pe $d\ell_1$ și $d\ell_2$ în componentele lor

$$d\ell_1 = -dl_t\bar{t} + dl_b\bar{b} \quad ; \quad d\ell_2 = dl_t\bar{t} - dl_b\bar{b}$$

atunci linia închisă va lua forma BECDFAB.

Integrala lui $\mathfrak{F}$ pentru linia închisă arătată mai sus, se mai poate descompune în două integrale de linii, pentru următoarele linii închise BEFAB și ECDFE, de oarece componenta integralului care corespunde liniei FE apare de două ori cu semn schimbat și deci se anulează.

Admiţând că $\triangle h$ tinde la limită către zero, vom neglija pe $(\mathfrak{F} \triangle h)$ faţă de $(\mathfrak{F} \triangle \ell)$ şi vom obţine pentru linia închisă BCDAB

$$(\mathfrak{F}_1 d\ell_1) + (\mathfrak{F}_2 d\ell_2) = (\{\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2\} d\ell_1) = \{-F_{1t} + F_{2t}\} dl_t +$$

$$+ \{F_{1b} - F_{2b}\} dl_b = (\text{rot}\,\mathfrak{F} \triangle h dl_t \bar{b}) + (\text{rot}\,\mathfrak{F} \triangle h dl_b \bar{t}) =$$

$$= (\text{rot}\,\mathfrak{F}\{dl_t \bar{b} + dl_b \bar{t}\}) \triangle h = (\text{rot}\,\mathfrak{F}[\bar{n}', d\ell_1]) \triangle h.$$

Pe de altă parte mărimea $(\{\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2\} d\ell_1)$ se mai poate exprima sub forma:

$$([\bar{n}_1', \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2][\bar{n}_1' d\ell_1])$$

ţinând seamă că $\bar{n}_1'$ e perpendicular pe $d\ell_1$.

Egalitatea de mai sus devine: $[\bar{n}_1', \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2] = \text{rot}\,\mathfrak{F} \triangle h$.

Admiţând aşa dar, că componenta tangenţială a funcţiei $\mathfrak{F}$ posedă o discontinuitate, rezultă că mărimea $[\bar{n}_1', \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2]$ reprezintă un vector cu o valoare numerică finită şi diferită de zero. Când $\triangle h$ tinde către zero, înseamnă că pentru orice punct al suprafeţei de discontinuitate avem $\text{rot}\,\mathfrak{F}$ infinit de mare.

Numim vectorul $[\bar{n}_1', \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2]$ rotaţia superficială a funcţiei vectoriale $\mathfrak{F}$ şi o vom nota în felul următor: $\text{rot}_s\,\mathfrak{F} = [\bar{n}_1', \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2]$.

După cum vedem $\text{rot}_s\,\mathfrak{F}$ reprezintă un vector perpendicular pe $\bar{n}_1'$ adică se găseşte tangent la suprafaţa de discontinuitate, şi are două componente una după $\bar{t}$ şi cealaltă după $\bar{b}$.

Se obţine:

$$[[\bar{b}\,\bar{t}]\{\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2\}] = -[\{\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2\}[\bar{b}\,\bar{t}]] =$$

$$= \{-F_{1t} + F_{2t}\}\bar{b} + \{F_{1b} - F_{2b}\}\bar{t}.$$

Când vectorul $\mathfrak{F}$ cade în direcţia lui $\bar{t}$ rotaţia superficială va lua forma $\{-F_{1t} + F_{2t}\}\bar{b}$.

Ceea ce e necesar de remarcat e faptul că în cazul rotaţiei superficiale nu se mai obţine o transformare a unui integral de linie într'un integral de suprafaţă ci $(\{\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2\} d\ell_1)$ se reprezintă prin $([\bar{n}_1', \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2][\bar{n}_1' d\ell_1])$ în care vectorul $[\bar{n}_1' d\ell_1]$ tot un element de linie este, însă perpendicular pe planul format de $\bar{n}_1'$ şi $d\ell_1$.

Rotaţia superficială a unei funcţiuni vectoriale, reprezintă aşa dar un câmp vectorial superficial, adică liniile de forţă al acelui câmp nu umplu un spaţiu cum e cazul câmpului vectorial rot $\mathfrak{F}$ ci se găsesc pe anumite suprafeţe numite suprafeţe de discontinuitate.

Figura 60 ne arată cazul, când la suprafaţa S_{12} are loc o variaţie bruscă a componentei tangenţiale a vectorului $\mathfrak{F}$. Componenta normală rămâne neschimbată. După cum vedem, datorită variaţiei brusce a componentei tangenţiale a vectorului linia de orţă care străbate suprafaţa S_{12} suferă o refracţie.

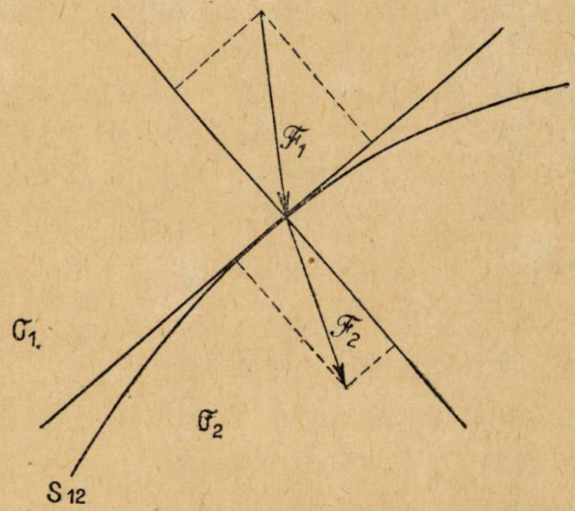


Fig. 60. Variaţia bruscă numai a componentei tangenţiale a vectorului $\mathfrak{F}$.

Vom vedea în curând că rotaţia volumetrică şi superficială a unei funcţiuni vectoriale $\mathfrak{F}$, reprezintă a doua condiţie de existenţă a câmpului $\mathfrak{F}$.

După cum am văzut mai sus noile condiţii de existenţă ale câmpului vectorial $\mathfrak{F}$, nu mai sunt mărimi scalare, ca în cazul divergenţei, ci mărimi vectoriale; ele formează anumite câmpuri vectoriale volumetrice şi superficiale, adică unele din liniile de forţă ale lor umplu un spaţiu, iar celelalte se găsesc pe anumite suprafeţe. Aceste câmpuri vectoriale poartă denumirea de turbioni şi anume există turbioni volumetrici şi turbioni superficiali, datorită cărora ia naştere câmpul vectorial $\mathfrak{F}$.

Cum se determină, câmpul vectorial $\mathfrak{F}$, în funcţie de turbioni o vom vedea mai târziu. Ceea ce e încă de remarcat e că turbionul rot $\mathfrak{F}$ e lipsit de sarcini, adică div. rot $\mathfrak{F} = 0$ de oarece avem:

$$(\nabla\,[\nabla\,\mathfrak{F}]) = ([\nabla\,\nabla]\,\mathfrak{F}) = 0.$$

Diferite operaţiuni cu vectorul nabla.

Inainte de a trece la determinarea câmpului vectorial $\mathfrak{F}$ atunci când se dau condiţiunile de existenţă ale lui, vom efectua o serie de operaţiuni cu vectorul nabla.

Mai întâi vom cerceta pe rând următoarele 12 cazuri importante în care se găseşte vectorul nabla.

1. $\mathcal{A}\,(\nabla\mathfrak{B})$
2. $(\mathcal{A}\nabla)\,\mathfrak{B}$
3. $(\mathcal{A}\,[\nabla\mathfrak{B}])$
4. $([\mathcal{A}\nabla]\,\mathfrak{B})$
5. $[\mathcal{A}\,[\nabla\mathfrak{B}]]$
6. $[[\mathcal{A}\nabla]\,\mathfrak{B}]$
7. $\nabla\,(\mathcal{A}\mathfrak{B})$
8. $(\nabla\mathcal{A})\,\mathfrak{B}$
9. $(\nabla\,[\mathcal{A}\mathfrak{B}])$
10. $([\nabla\mathcal{A}]\,\mathfrak{B})$
11. $[\nabla\,[\mathcal{A}\mathfrak{B}]]$
12. $[[\nabla\mathcal{A}]\,\mathfrak{B}]$.

Obţinem:

1. $\mathcal{A}\,(\nabla\mathfrak{B}) = \mathcal{A}$ div $\mathfrak{B}$
2. $(\mathcal{A}\nabla)\,\mathfrak{B} = \mathcal{A}$ grad. $\mathfrak{B} = A\bar{a}$ grad. $\mathfrak{B} = A\,\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial A}$
3. $(\mathcal{A}\,[\nabla\mathfrak{B}]) = (\mathcal{A}$ rot $\mathfrak{B})$
4. $([\mathcal{A}\nabla]\,\mathfrak{B}) = (\mathcal{A}\,[\nabla\mathfrak{B}]) = (\mathcal{A}$rot $\mathfrak{B})$
5. $[\mathcal{A}\,[\nabla\mathfrak{B}]] = \nabla\,\underset{\mathsf{T}}{(\mathcal{A}\mathfrak{B})} - (\mathcal{A}\nabla)\,\mathfrak{B}$

de unde deducem

$$\nabla\,\underset{\mathsf{T}}{(\mathcal{A}\mathfrak{B})} = [\mathcal{A}\text{ rot }\mathfrak{B}] + (\mathcal{A}\nabla)\,\mathfrak{B}.$$

Semnul T denumit *comez* ne indică că $\mathcal{A}$ nu va fi diferenţiat.

6. $[[\mathcal{A}\nabla]\,\mathfrak{B}] = -\,\mathcal{A}$ div $\mathfrak{B} + \nabla\,\underset{\mathsf{T}}{(\mathcal{A}\mathfrak{B})}$
7. $\nabla\,(\mathcal{A}\mathfrak{B}) = \nabla\,\underset{\mathsf{T}}{(\mathcal{A}\mathfrak{B})} + \nabla\,\underset{\mathsf{T}}{(\mathcal{A}\mathfrak{B})} =$

$$= [\mathcal{A}\text{ rot }\mathfrak{B}] + (\mathcal{A}\nabla)\,\mathfrak{B} + [\mathfrak{B}\text{ rot }\mathcal{A}] + (\mathrm{B}\nabla)\,\mathcal{A}$$

8. $(\nabla\mathcal{A})\,\mathfrak{B} = (\mathcal{A}\nabla)\,\mathfrak{B} + \mathfrak{B}$ div $\mathcal{A}$
9. $(\nabla\,[\mathcal{A}\mathfrak{B}]) = -\,(\mathcal{A}$ rot $\mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}$ rot $\mathcal{A})$
10. $([\nabla\mathcal{A}]\,\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}$ rot $\mathcal{A}) - (\mathcal{A}$ rot $\mathfrak{B})$

adică :

$$(\nabla\,[\mathcal{A}\mathcal{B}]) = ([\nabla\mathcal{A}]\,\mathcal{B}) = (\nabla\underline{\mathcal{A}}\mathcal{B})$$

11. $[\nabla\,[\mathcal{A}\mathcal{B}]] = (\nabla\mathcal{B})\,\mathcal{A} - (\nabla\mathcal{A})\,\mathcal{B} =$

$$= \mathcal{A}\,\mathrm{div}\,\mathcal{B} + (\mathcal{B}\nabla)\,\mathcal{A} - \mathcal{B}\,\mathrm{div}\,\mathcal{A} - (\mathcal{A}\nabla)\,\mathcal{B})$$

12. $[[\nabla\mathcal{A}]\,\mathcal{B}] = -\nabla\,(\mathcal{A}\mathcal{B}) + (\nabla\mathcal{B})\,\mathcal{A} =$

$$= -[\mathcal{A}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{B}] - (\mathcal{A}\nabla)\,\mathcal{B} - [\mathcal{B}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{A}] - (\mathrm{B}\nabla)\,\mathcal{A} +$$

$$+ \mathcal{A}\,\mathrm{div}\,\mathcal{B} + (\mathcal{B}\nabla)\,\mathcal{A} = -[\mathcal{A}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{B}] - (\mathcal{A}\nabla)\,\mathcal{B} -$$

$$- [\mathcal{B}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{A}] + \mathcal{A}\,\mathrm{div}\,\mathcal{B}.$$

In ce privește transformarea integralului de suprafață într'un integral de volum corespunzător egalității $\underline{d_\sigma} \to d\sigma\underline{\nabla}$ ea se mai poate verifica precum urmează.

Dacă se dă $\int[d_\sigma\,\mathcal{F}]$ și îl înmulțim scalar cu un vector constant rezultă

$$(\mathcal{C}\int[d_\sigma\,\mathcal{F}]) = \int d_\sigma\,[\mathcal{F}\mathcal{C}]) = \int d\sigma\,(\nabla\,[\mathcal{F}\mathcal{C}]) = (\mathcal{C}\int d\sigma\,[\nabla\mathcal{F}])$$

de unde deducem

$$\int[d_\sigma\,\mathcal{F}] = \int d\sigma\,[\nabla\mathcal{F}].$$

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Școala Politechnică din Timișoara.

UN LOC GEOMETRIC ELEMENTAR

1°. *Pe laturile* AB, AC *ale triunghiului* ABC *se iau lungimile egale*

$$BC_1 = CB_1 = \lambda.$$

Intersecția dreptelor CC_1, BB_1 *descrie o dreaptă când* λ *variază.*

Acesta este enunțul prescurtat al problemei 5024 rezolvată la pag. 474, Vol. XLVII, *Gazeta Matematică.* După cum s'a arătat la observațiunile dela finele soluției, problema este cunoscută. Ea se găsește la pag. 648 la exercițiul 1546 (*c*) din *Exercices de géométrie* par F. J. [1]).

1) Nu F. G. M. cum s'a citat la pag. 675, Vol. XLVII.

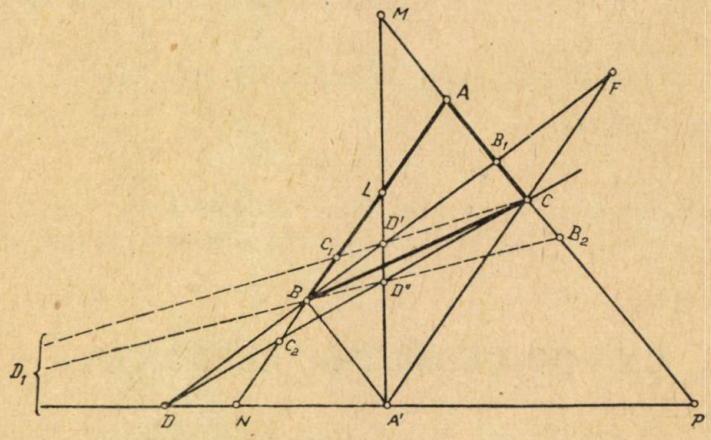
Nici în soluţia din G. M. nici în cea din geometria de F. J. soluţia nu este însă complectă pentrucă nu examinează cele două cazuri de figură care se pot prezenta şi anume atunci când λ se ia în acelaşi sens pe ambele laturi AB, AC şi atunci când λ se ia într'un senz pe AB şi în alt senz pe AC.

2°. Să ne ocupăm de acest din urmă caz şi vom arăta şi unele consecinţe interesante ale problemei, cazul întâi fiind tratat în diferite culegeri de probleme.

Fie deci B_1 luat pe CA şi C_2 pe AB aşa încât, în valoare absolută, să avem

$$(1) \qquad \overline{CB_1} = \overline{BC_2} = \lambda.$$

Complectăm paralelogramul BACA' şi fie F intersecţia dreptei DBB_1 cu preapta A'C.



Triunghiul A'FB tăiat de paralela CB_1 la A'B dă

$$(2) \qquad \frac{A'B}{A'F} = \frac{CB_1}{CF}.$$

Triunghiul CDF tăiat de C_2B, paralelă la CF dă

$$\frac{C_2B}{CF} = \frac{BD}{FD}$$

sau, ţinând seamă de (1) şi (2)

$$\frac{A'B}{A'F} = \frac{CB_1}{CF} = \frac{DB}{DF}.$$

Egalitatea dintre primul şi ultimul din aceste rapoarte arată că D este piciorul bisectoarei exterioare a unghiului A' din triunghiul BA'C. Punctul A' fiind fix locul lui D este dreapta DA'.

S'a dovedit, în locurile citate, că pentru cazul întâi locul intersecţiei dreptelor CC_1, BB_1 este bisectoarea interioară AD' a aceluiaşi unghiu A'. Acum enunţul complect al problemei este următorul:

Pe laturile AB, AC *ale triunghiului* ABC *se iau, în acelaşi senz sau în senzuri diferite, lungimile* CB_1, BC_1 *egale între ele. Locul geometric al intersecţiei dreptelor* BB_1, CC_1 *este format de bisectoarele unghiului* A' *al paralelogramului* BACA'.

3°. Punctul A' este un vârf al triunghiului anticomplimentar triunghiului ABC, prin urmare proprietatea se poate enunţa şi în felul următor, înglobând şi partea a doua a problemei 5024:

Pe laturile unui triunghiu se iau lungimile egale BC_a, CB_a *pe* AB *şi* AC. *La fel se obţin punctele* C_b, A_b *şi* A_c, B_c. *Punctele analoage cu acel de intersecţie al dreptelor* CC_a, BB_a *se găsesc pe bisectoarele interioare şi exterioare ale triunghiului anticomplimentar triunghiului* ABC.

4°. *Reciproc, fie* D *un punct pe bisectoarea unghiului* A' *al triunghiului anticomplimentar, triunghiului* ABC. *Notăm cu* B_1, C_2, F *intersecţiile* (DB, AC), (DC, AB) *şi* (DB, A'C). *Lungimile* BC_2 *şi* CB_1 *sunt egale între ele.*

In adevăr proprietatea bisectoarei dă

$$\frac{DB}{DF} = \frac{BA'}{FA'}$$

pe de altă parte ţinând seamă că $BC_2 \parallel CF$ şi $B_1C \parallel BA'$ putem scrie şirul de rapoarte

$$\frac{DB}{DF} = \frac{BC_2}{CF} = \frac{BA'}{FA'} = \frac{B_1C}{CF}$$

care arată că

$$\overline{BC_2} = \overline{CB_1}.$$

Dacă se consideră bisectoarea interioară A'D' şi intersecţia C_1 a lui CD' cu AB se arată la fel că

$$\overline{BC_1} = \overline{CB_1}.$$

5°. Proprietatea directă şi proprietatea reciprocă, aplicate la paralelogram, conduc la o frumoasă şi interesantă proprietate a paralelogramului, pe care o cred inedită.

Fie D *un punct pe bisectoarea exterioară a unghiului* A' *a paralelogramului* A'BAC. *Dreapta* DB *taie în* B_1 *pe* AC *şi în* D' *bisectoarea interioară a lui* A', *Dreapta* DC *taie în* C_2 *pe* AB *şi în* D'' *pe* AD'. *Fie* C_1, B_2 *intersecţia lui* AB *cu* CD' *şi a lui* AC *cu* BD''. *In fine fie* D_1 *intersecţia lui* CC_1 *cu* BB_2. *Avem*

$$\overline{BC_1} = \overline{BC_2} = \overline{CB_1} = \overline{CB_2}$$

oricare ar fi D, *iar* D_1 *se află pe* A'D.

In particular dacă L, M, N, P *sunt intersecţiile laturilor* AB, AC *cu bisectoarele unghiului* A' *atunci*

$$\overline{BL} = BN = \overline{AC} \quad \text{şi} \quad \overline{CM} = \overline{CP} = \overline{AB}.$$

Demonstrarea acestor proprietăţi sunt cuprinse în punctul 4° precedent. Se ajunge la aceleaşi rezultate plecând dela un punct D de pe bisectoarea interioară a unghiului A'.

G-L GH. BUICLIU.

PROPRIETĂŢI ALE NUMERELOR PRIME CU UN NUMĂR DAT

1. Fie N un număr dat şi $p_1, p_2, \ldots p_n$ numere prime cu N şi inferioare lui, ştiind că:

$$p_1 = 1 \quad \text{şi} \quad n = \varphi(N)$$

unde $\varphi(N)$ este indicatorul lui N, atunci îmi propun să arăt că avem:

1) $$p_1 + p_n = p_2 + p_{n-1} = \ldots = p_{i+1} + p_{n-i} = N.$$

In adevăr, prin definiţie numerele $p_1, p_2, \ldots p_n$ fiind prime cu N, atunci şi numerele $(N - p_1)$, $(N - p_2), \ldots (N - p_n)$ vor fi prime cu N. Cum însă nu putem avea două rânduri de numere

prime cu N şi mai mici decât el, urmează că aceste două şiruri de numere vor fi aceleaşi. Apoi cum avem:

$p_1 < p_2 < \ldots < p_n < N$ şi $N > N - p_1 > N - p_2 > \ldots > N - p_n$

înseamnă că trebuie să avem neapărat corelaţiile:

$$p_1 = N - p_n;\ p_2 = N - p_{n-1};\ \ldots\ p_n = N - p_1.$$

Dar acestea nu sunt altceva decât relaţiunile 1), ce ne-am propus a demonstra.

2. Fie un număr A mai mic decât N, atunci numerile prime cu N şi inferioare lui A sunt: $p_1, p_2, \ldots p_a$ unde:

$$p_a = A - x_a \quad \text{şi} \quad a = I_A(N)$$

$I_A(N)$ fiind indicatorul lui N faţă de A, iar: $1 \leqslant x_a \leqslant p_{a+1} - p_a$, cu condiţia ca p_a să fie numărul imediat inferior lui A şi prim cu N, iar p_{a+1} numărul imediat superior lui p_a.

Dar cum avem:

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_a < A$$

urmează că vom avea:

2) $$p_{i+1} + p_{a-i} = A \pm y_a$$

unde în general avem: $o \leqslant y_a \leqslant p_a - p_{a-1}$.

3) Fie un număr B mai mare ca N, atunci numerele prime cu N şi inferioare lui B sunt: $p_1, p_2 \ldots p_a \ldots p_n \ldots p_b$, unde:

$$p_b = B - x_b \quad \text{şi} \quad b = I_B(A).$$

In mod analog se deduce deci lesne că avem:

3) $$p_{i+1} + p_{b-i} = B \pm y_b$$

unde de asemenea $o \leqslant y_b \leqslant p_b - p_{b-1}$.

4) Fie acum numerele:

$$p_{a+1}, p_{a+2}, \ldots p_n, \ldots p_b$$

numerele prime cu N din intervalul de numere dela A la B, atunci numărul lor va fi:

$$b - a = I_{A \to B}(N) = I_B(N) - I_A(N).$$

Dar cum avem:

$$A \leqslant p_{a+1} < p_{a+2} < \ldots < p_n < \ldots < p_b < B$$

urmează că putem avea:

4) $$p_{a+i+1} + p_{b-i} = A + B \pm y_{ab}$$

unde $$o \leqslant y_{ab} \leqslant p_b - p_{b-1}.$$

Observaţiune. Valorile x_a, x_b, y_a, y_b, y_{ab} trebuesc studiate pentru cât mai multe cazuri numerice, numai astfel intervalele lor de variaţie vor fi determinate cu o precizie mai mare.

Câteva consecinţe ale relaţiunilor dela 1).

1°. Se observă lesne că:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \frac{1}{2} n \,.\, N = \frac{1}{2} N \,.\, \varphi(N) = \sigma(N)$$

unde $\sigma(N)$ este suma numerelor prime cu un număr dat şi inferioare lui.

Se vede astfel că formula care dă pe $\sigma(N)$ este stabilită pe o cale mult mai elementară.

2°. Inmulţind relaţiunile 1) avem:

$$(p_1 + p_n) \,.\, (p_2 + p_{n-1}) \ldots (p_{\frac{1}{2}n} + p_{\frac{1}{2}n+1}) = N^{\frac{1}{2}\varphi(N)}.$$

3°. Observăm apoi că:

$$p_1 \,.\, p_n + p_2 \,.\, p_{n-1} + \ldots + p_{\frac{1}{2}n} \,.\, p_{\frac{1}{2}n+1}$$

$$= p_1 \,.\, (N - p_1) + p_2 \,.\, (N - p_2) + \ldots + p_{\frac{1}{2}n} \,.\, (N - p_{\frac{1}{2}n})$$

$$= (p_1 + p_2 + \ldots p_{\frac{1}{2}n}) \,.\, N - (p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{\frac{1}{2}n}^2)$$

$$= p_n \,.\, (N - p_n) + p_{n-1} \,.\, (N - p_{n-1}) + \ldots p_{\frac{1}{2}n+1} (N - p_{\frac{1}{2}n+1})$$

$$= (p_{\frac{1}{2}n+2} + \ldots + p_n) \,.\, N - (p_{\frac{1}{2}n+1}^2 + p_{\frac{1}{2}n+2}^2 + \ldots + p_n^2).$$

4°. Din relaţiunile precedente se poate deduce prin adunare sau scădere că:

$$2 \,.\, (p_1 \,.\, p_n + p_2 \,.\, p_{n-1} + \ldots + p_{\frac{1}{2}n} \,.\, p_{\frac{1}{2}n+1}) = N \,.\, \sum_1^n p_i - \sum_1^n p_i^2$$

şi

$$(p_n^2 - p_1^2) + (p_{n-1}^2 - p_2^2) + \ldots + (p_{\frac{1}{2}n+1}^2 - p_{\frac{1}{2}n}^2)$$

$$= N \,.\, [(p_n - p_1) + (p_{n-1} - p_2) + \ldots + (p_{\frac{1}{2}n-1} - p_{\frac{1}{2}n})]$$

$$= \frac{1}{2} N^2 \,.\, \varphi(N) - 2 \,.\, N \,.\, \sum_1^{\frac{1}{2}n} p_i.$$

Şi astfel se pot deduce oricâte alte relaţiuni.

COMANDOR I. LINTEŞ.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1943

1. Societatea *Gazeta Matematică*, în Adunarea generală dela 27 August a. c., a hotărît ţinerea concursului tradiţional de matematici în anul 1943, între elevii liceelor civile şi militare din întreagă ţară.

Totodată se va ţine un concurs şi între studenţii anului I ai Politehnicei din Bucureşti.

Concursul va avea loc după sărbătorile Paştelui, înainte de reînceperea cursurilor. Dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidaţii, el se va ţine în Bucureşti, unde se va da examen scris şi oral; în caz contrar se va ţine în diferite centre din ţară, într'o Duminică din luna Mai, dându-se numai examen scris.

Hotărîrea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1943.

2. Elevii, cari doresc să se înscrie la concurs, sunt obligaţi să candideze la *două materii de matematici dintre acele menţionate aici pentru clasa în care urmează:*

Clasa IV-a: Algebra, geometria în spaţiu;

Clasa V-a: Aritmetica raţionată, algebra, geometria plană;

Clasa VI-a: Teoria numerelor, trigonometria, geometria în spaţiu;

Clasa VII-a: Algebra, geometria descriptivă şi proiectivă;

Clasa VIII-a: Mecanica, algebra, geometria analitică.

3. Societatea *Gazeta Matematică*, socotind că o temeinică pătrundere a artimeticei, teoriei numerelor şi mecanicei este absolut necesară unui bun absolvent de liceu, deci unui candidat la concurs, hotărăşte, că pentru elevii claselor V, VIII, una dintre cele două materii de concurs să fie *obligatorie* şi anume:

Aritmetica raţionată, pentru candidaţii clasei V-a;

Mecanica, pentru candidaţii clasei VIII-a.

4. Candidaţii vor da: *a) o probă scrisă teoretică* la una dintre materiile pentru care se prezintă la concurs, *b) o probă scrisă practică* la cealaltă materie, *c) un examen oral din ambele materii,* în cazul ţinerii concursului în Bucureşti.

Sub niciun motiv nu se acordă Candidaţilor scuze de nepregătirea unora dintre capitolele trecute în programul clasei lor, pentru obiectele la care trece concursul.

5. *Inscrierea la concurs* se face numai prin cerere individuală, scrisă personal de candidat şi se va trimete în plic recomandat, cel mai târziu până la 5 Ianuarie 1943, pe adresa Societăţii *Gazeta Matematică. Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.*

Nu se primesc cereri trimese de părinţi, corespondenţi, profesori sau şcoli, fiecare candidat fiind obligat a-şi face singur cererea.

6. Pentru a fi luată în considerare cererea de înscriere la concurs, candidatul trebuie să răspundă pe puncte, în ordinea de mai jos, la următoarele date:

a) Numele (de familie) şi pronumele.

b) Şcoala şi clasa în care urmează candidatul. (Cei pregătiţi în particular vor arăta şcoala la care au urmat în anul precedent sau la care au depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă).

c) Adresa personală:

— în timpul şcolii;

— în timpul vacanţei de Paşte.

d) Dacă dispune de mijloace de a veni în Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi intreţinut în timpul concursului sau dacă unul dintre aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea *Gazeta Matematică.*

(Cel care are nevoie de bani pentru drum, va arăta gara de unde va lua trenul pentru a veni în Bucureşti, precum şi gara la care se înapoiază după concurs).

e) Materia la care se înscrie să treacă proba scrisă teoretică şi materia la care se înscrie să treacă proba scrisă practică.

f) Activitatea depusă la *Gazeta Matematică* şi *Suplimentul cu Exerciţii al Gazetei Matematice*, arătând numerele de ordine ale problemelor şi ale exerciţiilor rezolvate şi publicate sau menţionate, precum şi activitatea la alte reviste de matematici din ţară sau din străinătate.

7. Candidaţii înscrişi la concurs, cari din diferite motive nu mai pot sau nu mai vor să se prezinte, sunt obligaţi să anunţe din timp Societatea printr'o scrisoare.

Părăsirea sălilor de concurs este interzisă înainte de predarea lucrărilor scrise.

In numărul 6 din Februarie 1943 al *Gazetei Matematice*, se va publica felul cum se va ţine concursul, localitatea, orele de prezentare, precum şi numele candidaţilor admişi să ia parte la concurs.

Numărul celor admişi la concurs se va hotărî ţinând seama de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică* pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia o vor arăta şi dovedi în cererile ce vor face.

8. Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi diplome, recompense, premii sau menţiuni.

Primul reuşit dintre toţi candidaţii liceelor va primi premiul „LT.-COL. G. TĂNĂSESCU", în cărţi, aşa cum se arată în numărul 1 din acest an, în articolul: *Premiile, bursele şi publicaţiile Societăţii „Gazeta Matematică"*.

Primul reuşit dintre studenţii anului I al Politechnicei din Bucureşti va primi premiul „ANGHEL SALIGNY", de 1000 lei, oferit de un membru al Societăţii noastre.

Comisia examinatoare se va compune din membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, cari nu au rude sau elevi printre candidaţi.

9. **Programa analitică a concursului.**

Clasa IV-a: 1. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus: Rezolvarea ecuaţiilor de gradul I cu una şi două necunoscute, cu coeficienţi literali.

2. *Geometria în spaţiu.* Toată materia prevăzută în programa analitică.

Clasa V-a: 1. *Aritmetica raţionată* (obiect obligator). Operaţiile aritmetice Divizori. Numere prime. Cel mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun. Fracţii ordinare, zecimale. Rădăcini pătrate. Rapoarte. Proporţii. Regula de trei. Dobânzi simple. Sconturi. Asociaţii. Amestecuri.

2. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

La radicali se va face raţionalizarea numitorilor cari cuprind radicali de ordinul al doilea şi superior.

La sistemele de ecuaţii de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare. Sisteme reductibile la gradul I şi II.

Transformarea expresiilor de forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

3. *Geometria plană.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Teorema lui MENELAUS şi CEVA şi reciprocele lor.

Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulatere inscriptibile.

Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte. Axă şi centru radical.

Relaţia metrică a lui STEWART. Aplicaţii.

Clasa VI-a: 1. *Teoria numerelor.*

Divizori; numărul, suma şi produsul divizorilor.

Indicatori. Teoremele lui FERMAT, EULER, WILSON.

2. *Trigonometria.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Aria unui triunghiu în funcţie de elementele lui.

Razele cercurilor: circumscris, înscris, exînscrise.

Identităţi, ecuaţii şi sisteme trigonometrice.

Problema hărţii.

3. *Geometria în spaţiu.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Unghiuri triedre. Cazurile de egalitate ale triunghiurilor sferice şi aria triunghiului sferic. Volumul produs de un sector poligonal plan, care se roteşte în jurul unei axe.

Volumul segmentului sferic (mărginit de zonă sau calotă).

Clasa VII-a: 1. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică pentru clasa VI şi VII. In plus:

Serii cu termeni pozitivi, seria numărului *e.* Principalele criterii de convergenţă. Logaritmi neperieni.

Derivata funcţiei logaritmice şi exponenţiale.

Nedeterminări. Regula lui HÔSPITAL.

2. *Geometria descriptivă şi proiectivă.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Metode: Schimbarea planelor de proiecţie, rotaţia şi rabaterea.

Inversiunea. Diviziuni şi fascicole anarmonice şi armonice. Pol şi polară în raport cu un unghiu şi în raport cu un cerc. Polare reciproce. Teoremele lui PASCAL şi BRIANCHON. Patrulatere complete.

Clasa VIII-a: 1. *Mecanica* (obiect obligator). Toată materia prevăzută în programa analitică pentru clasa VIII-a şi Cinematica prevăzută pentru clasa VII-a.

2. *Geometria analitică.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Pol şi polară.

Studiul geometric elementar al conicelor.

3. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Cantităţi complexe. Teorema lui MOIVRE. Ecuaţii binoame.

Anul I al Politechnicei din Bucureşti.

Candidaţii vor fi examinaţi din materia predată până la vacanţa Paştelui la două din materiile:

Algebră şi Analiză matematică, Geometrie analitică, Mecanică.

*

Orice candidat trebuie să cunoască toată materia respectiv a claselor precedente, cu adăogirile prevăzute în prezenta programă.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

2. *Suprafaţa triunghiului.* Formula clasică

$$(1) \qquad S = \frac{1}{2}\, a \times h_a$$

a suprafeţei triunghiului în funcţie de bază şi înălţimea AD se poate generaliza înlocuind înălţimea prin un segment oarecare AD, D fiind un punct pe BC. Se pot prezenta două cazuri de figură.

1°. D *este între* B *şi* C. Fie S_1, S_2, θ suprafeţele BAD, DAC şi unghiul BDA. Avem

$$S = S_1 + S_2 = \frac{BD \times AD}{2} \sin\theta + \frac{DC \times AD}{2} \sin(\pi - \theta)$$

sau, fiindcă $\sin\theta$ şi $\sin(\pi - \theta)$ sunt egale

$$(2) \qquad S = \frac{AD}{2}(BD + DC)\sin\theta = \frac{a \times AD}{2}\sin\theta.$$

Când AD este înălţime $\sin\theta$ este 1 şi formula (2) devine (1).

2°. D *este pe prelungirea lui* BC. Avem ca şi la 1°:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{AD}{2}(BD - DC)\sin\theta = \frac{a \times AD}{2}\sin\theta.$$

La fel se demonstrează când D este pe prelungirea lui CB.

G-L GH. BUICLIU.

3. *O particularitate a numerelor pitagorice.* Dacă avem

$$x^2 + y^2 = c^2$$

atunci avem şi

$$(y - x)^2 + (y + x)^2 = c^2 + c^2.$$

Punând

$$y - x = a \quad , \quad y + x = b$$

atunci avem

$$\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c-1}{2}, \frac{c-1}{2} \text{ şi } \frac{c+1}{2}, \frac{c+1}{2}, \frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}, n=1,3.$$

Se obţin astfel identităţi de forma

$$A + B + 2C = 2E + F + G$$
$$A^3 + B^3 + 2C^3 = 2E^3 + F^3 + G^3$$

unde

$$A + G = B + F.$$

Exemplu. $x = 8$, $y = 15$, $c = 17$ dă

$$7^2 + 23^2 = 17^2 + 17^2$$

şi punând $a = 7$ şi $b = 23$ obţinem după formula precedentă

$$4 + 12 + 2.8 = 2.9 + 3 + 11 = 2^2 + 12 + 2^4 = 2.3^2 + 3 + 11$$
$$4^3 + 12^3 + 2.8^3 = 2.9^3 + 3^3 + 11^3 =$$
$$= 2^6 + 12^3 + 2^{10} = 2.3^6 + 3^3 + 11^3.$$

Avem mai departe

$$A + B + 2C = 2E + F + g = Q^2$$
$$A^3 + B^3 + 2C^3 = 2E^3 + F^3 + g^3 = R^2 \quad \text{când } c - y = 1.$$

Exemplu. $x = 5$, $y = 12$, $c = 13$ dă

$$7^2 + 17^2 = 13^2 + 13^2$$

şi obţinem rezultatul

$$4 + 9 + 6 + 6 = 7 + 7 + 3 + 8 = 5^2$$
$$4^3 + 9^3 + 6^3 + 6^3 = 7^3 + 7^3 + 3^3 + 8^3 = 35^2$$

Dacă $c - y = 1$ atunci A şi B sunt patrate şi avem

$$C^2 - (AB)^2 = M^2 \quad \text{şi} \quad E^2 - (Fg)^2 = P^2.$$

A. MOESSNER.

4. *Asupra problemei 2394* [1]). Acestei probleme i se poate da o soluţie care reduce la minimum numărul încercărilor.

Din egalităţile

$$\alpha\beta\gamma^2 = abcde \quad , \quad \gamma\beta\alpha^2 = edcba$$

deducem prin scădere

$$99(\alpha - \gamma)[101(\alpha + \gamma) + 20\beta] = 9999(a - e) + 990(b - d)$$

sau, simplificând prin 99,

$$(\alpha - \gamma)[101(\alpha + \gamma) + 20\beta] = 101(a - e) + 10(b - d)$$

sau încă

$$101(\alpha^2 - \gamma^2 - a + e) = 10[b - d - 2\beta(\alpha - \gamma)].$$

Cum factorul care înmulţeşte pe 10 în membrul al doilea este inferior în valoare absolută lui 101 care este prim, egalitatea precedentă nu poate avea loc decât dacă

$$(1) \qquad \alpha^2 - \gamma^2 = a - e \quad , \quad 2\beta(\alpha - \gamma) = b - d,$$

care arată, în primul rând, că la $\alpha \geqslant \gamma$ corespunde $a \geqslant e$, $b \geqslant d$.

In al doilea rând, de oarece $\alpha\beta\gamma < 317$, rezultă $\alpha = 1, 2, 3$. Egalităţile (1) impun cazul $\alpha = \gamma$, pentru care $a = e$, $b = d$.

Pentru $\alpha = \gamma = 1$, găsim soluţiile

$$101^2 = 10201 \quad , \quad 111^2 = 12321 \quad , \quad 121^2 = 14641.$$

Pentru $\alpha = \gamma = 2$, găsim soluţiile

$$202^2 = 40804 \quad , \quad 212^2 = 44944.$$

Când $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, găsim soluţiile

$$100^2 = 10000, \quad 110^2 = 12100, \quad 120^2 = 14400, \quad 130^2 = 16900.$$

Când $\alpha = 2$, $\gamma = 0$, găsim soluţiile

$$200^2 = 40000, \quad 220^2 = 48400.$$

Când $\alpha = 2$, $\gamma = 1$, găsim soluţiile

$$201^2 = 40401, \quad 211^2 = 44521, \quad 221^2 = 48841.$$

Când $\alpha = 3$, $\gamma = 0$, găsim soluţiile

$$300^2 = 90000, \quad 310^2 = 96100.$$

Când $\alpha = 3$, $\gamma = 1$, găsim soluţiile

$$301^2 = 90601, \quad 311^2 = 10609.$$

Problema admite deci 18 soluţii.

M. G.

---

1) A se vedea soluţia dela pag. 417, Vol. XLVII.

5. *Asupra problemei Nr. 5446.* Prima soluţie dată acestei probleme la pag. 35 din N-rul trecut, trebuie completată cu demonstraţia existenţei limitei expresiei E, altfel teorema lui CESARO nu se poate aplica. Aşteptăm această demonstraţie dela corespondenţii noştri.

M. G.

6. *Asupra notei 54 Vol. XLVI pag. 580.* Rezultatele interesante pe care le dă D-l R. GEORGESCU în nota citată, sunt cunoscute şi se găsesc în *Traité de géométrie* par E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE, première partie, 1922.

In adevăr în nota III de la pag. 461, redactată de J. NEUBERG, se demonstrează că triunghiul podar al unui punct D faţă de un triunghiu ABC, are laturile proporţionale cu produsele laturilor opuse ale patrulaterului ABCD, adică tocmai produsele notate de D-l R. GEORGESCU prin *ax*, *by*, *cz*. In acelaşi loc se arată că şi triunghiul A, B, C, metaarmonic al lui ABC în raport cu D se bucură de aceeaşi proprietate.

Rezultă că există un triunghiu ale cărui laturi au ca valori produsele *ax*, *by*, *cz*. Acest triunghiu a fost numit de J. NEUBERG, *triunghiu asociat al patrulaterului* ABCD. Se deduce că acest triunghiu asociat nu degenerează într'un segment de dreaptă decât când cele patru puncte sunt conciclice.

P. BOLDESCU.

7. *Asupra problemei 5486.* O altă soluţie pe lângă cea dată la pag. 337, Vol. XLVII este următoarea:

Insemnând cu A valoarea parantezei a 2-a, putem scrie

$$(A + a^n + a^{n+1})\,A + a^n = A^2 + a^n A + a^{n+1} A + a^n =$$
$$= A(A + a^n) + a^n (Aa + 1) = (A + a^n)^2 =$$
$$= (1 + a + a^n + \ldots + a^{n-1} + a^n)^2,$$

întru cât

$$1 + Aa = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} + a^n = A + a^n .$$

Interpetare aritmetică. Oricare ar fi baza unui sistem de numeraţie, între următoarele patru numere, respectiv de $n+2$, n, n, $n+1$ cifre, avem egalitatea

$$\underbrace{111\ldots1}_{n+2} \times \underbrace{111\ldots1}_{n} + \underbrace{100\ldots0}_{n} = \underbrace{111\ldots1^2}_{n+1} .$$

VIRGIL GHIŢESCU.

8. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). 1°. La soluţiile, date de D-l G-L GH. BUICLIU ecuaţiei

$$6 \times N_6 = N$$

la pag. 413, 525, 575 Vol. XLV şi pag. 411 şi 527 Vol. XLVI, am mai găsit următoarele 84 soluţii:

N_6	N	N_6	N
127 543 903	0 765 293 418	410 328 975	2 461 923 850
152 894 307	0 917 365 842	417 905 283	2 507 431 698
152 940 873	0 917 645 238	419 508 273	2 517 049 638
153 078 942	0 918 473 652	419 578 230	2 517 469 380
153 087 294	0 918 523 764	421 957 830	2 531 746 980
179 420 583	1 076 523 498	429 850 731	2 579 104 386
180 579 432	1 083 476 592	431 957 280	2 591 743 680
183 094 572	1 098 567 432	432 719 508	2 596 317 048
205 784 931	1 234 709 586	432 790 518	2 596 743 108
205 794 318	1 234 765 908	450 781 923	2 704 691 538
209 845 731	1 259 074 386	450 819 273	2 704 915 638
210 579 843	1 263 479 058	452 718 309	2 839 710 546
230 987 451	1 385 924 706	475 103 289	2 850 619 734
231 084 957	1 386 509 742	485 107 923	2 910 647 538
275 489 013	1 652 934 078	489 031 275	2 934 187 650
275 489 130	1 652 934 780	490 851 273	2 945 107 638
278 904 315	1 673 425 890	517 904 283	3 107 425 698
278 915 043	1 673 490 258	517 932 804	3 107 596 824
281 790 543	1 690 743 258	518 079 432	3 108 476 592
289 430 157	1 736 580 642	518 279 043	3 109 674 258
294 170 583	1 765 023 498	520 784 931	3 124 709 586
301 578 942	1 809 473 652	520 794 318	3 124 765 908
305 784 921	1 834 709 526	521 079 843	3 126 479 058
308 495 721	1 850 974 326	528 493 107	3 170 958 642
310 987 245	1 865 923 470	528 493 071	3 170 958 426
315 078 942	1 890 473 652	529 041 783	3 174 250 698
324 589 710	1 947 538 260	529 843 071	3 179 058 426
325 478 910	1 952 873 460	529 843 107	3 179 058 642
328 975 410	1 973 852 460	529 874 310	3 179 245 806
329 058 471	1 974 350 826	530 784 921	3 184 709 526
405 293 178	2 431 759 068	531 270 984	3 187 625 904
405 327 918	2 431 967 508	532 908 471	3 197 450 826

1) Urmare la Nota dela pag. 508, Vol. XLVII.

N_6	N	N_6	N
532 941 708	3 197 650 248	578 493 021	3 470 958 126
532 941 807	3 197 650 842	578 493 102	3 470 958 612
532 970 841	3 197 825 046	579 418 032	3 476 508 192
540 293 178	3 241 759 068	579 431 802	3 476 590 812
541 790 328	3 250 741 968	579 842 031	3 479 052 186
541 803 279	3 250 819 674	579 843 021	3 479 058 126
543 279 018	3 259 674 108	580 179 432	3 481 076 592
543 290 178	3 259 741 068	581 794 302	3 490 765 812
570 284 931	3 421 709 586	584 790 321	3 508 741 926
578 492 103	3 470 952 618	584 902 713	3 509 416 278

2°. Soluţia $N_6 = 231\,587\,980$ dela pag. 525, Vol. XLV trebuie înlocuită prin $N_6 = 231\,587\,940$.

3°. Soluţia $N_6 = 318\,452\,709$ dela pag. 576, Vol. XLVI fiind eronată, trebuie radiată.

4°. Soluţiile 539 043 178, 571 092 843, 579 842 107, 572 843 102 şi 598 403 147 dela pag. 527 şi 529, Vol. XLVI trebuie rectificate şi înlocuite respectiv prin 529 043 178, 571 029 843, 579 842 103, 579 843 102 şi 598 403 127.

ST. CETĂŢEANU

9. *O octogradă cu câte 9 termeni în fiecare membru.* Din

$$[a_1, a_2, a_3] \overset{2,4}{=} [b_1, b_2, b_3]$$

rezultă

$$(1) \qquad [a_1, \pm a_2, \pm a_3, 2b_1, 2b_2, 2b_3]^p = [b_1, \pm b_2, \pm b_3, 2a_1, 2a_2, 2a_3], \quad p = 2, 4, 6, 8.$$

Dacă

$$a_1 + a_2 - a_3 = 2(b_1 + b_2 - b_3)$$

teorema scoborârii gradului unei multigrade arată că (1) rezultă din

$$(2) \quad [2a_1 - 3h, 2a_1 - h, 2a_2 - 3h, 2a_2 - h, 2b_3 + h]^{1,3,5} = [2a_3 + h, 2a_3 + h, 2b_1 - h, 2b_2 - h, 3h]$$

unde

$$a_1 + a_2 - a_3 = 4h.$$

Să presupunem că avem încă relaţia

$$a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = 2k.$$

Egalitatea de plecare se scrie, în aceste condiţii, sub forma

(3) $[a - k,\ a + k,\ 2a - 4h] \overset{2,4}{=} [b - k,\ b + k,\ 2b - 2h]$

cu următoarele egalităţi

(4) $2(a^2 - b^2) = (2b - 2h)^2 - (2a - 4h)^2$

(5) $6k^2 = (2b - 2h)^2 + (2a - 4h)^2 - (a^2 + b^2).$

Egalitatea (4) se mai poate scrie sub forma

$$6h^2 = (3b - 2h)^2 - (3a - 4h)^2$$

a cărei soluţie este

$$a = 3m^2 + 8mn - 2n^2\ ;\ b = 3m^2 + 4mn + 2n^2\ ;\ h = 6mn.$$

Cu acestea (5) dă

(6) $k^2 = 9m^4 - 36m^3 n + 8mn^3 + 4n^4$

Să căutăm în particular a găsi dacă sunt soluţii pentru care unul din termenii egalităţii (2) se anulează. Pentru aceasta trebuie verificată una din următoarele relaţiuni:

$2k = 2a \pm h\ ;\ 2k = 2a \pm 3h\ ;\ 2k = 2b \pm h\ ;\ 2b = h\ ;\ 2a = 3h\ ;\ 2a = h.$

Pentru prima din aceste relaţii avem

$$k = 3m^2 + mn + 2p^2$$

şi egalând valorile lui k^2 găsim

$$42m^2 + 13mn - 4n^2 = 0$$

care are rădăcinile raţionale

$$\frac{m}{n} = -\frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad \frac{m}{n} = \frac{4}{21}.$$

Prima din aceste rădăcini dă o soluţie banală, a doua dă

$$a = -27\ ;\ b = 211\ ;\ h = 84\ ;\ k = 169$$

$$[71,\ 98,\ 195] \overset{2,4}{=} [21,\ 127,\ 170]$$

şi în fine

$$[8,\ 50,\ 139,\ 148,\ 174] \overset{1,3,5,7}{=} [63,\ 119,\ 161,\ 169]$$

de unde rezultă o octogradă cu 9 termeni în fiecare membru.

AD. LETAC.

BIBLIOGRAFIE

Ştiinţă şi Progres. Această Revistă, a cărei apariţie încetase după ocuparea de inamici a Târgului Mureş, a reapărut la Liceul Militar „MIHA I VITEAZUL" din Timişoara. In anul acesta a apărut un număr, în care găsim şi articole privitoare la matematici şi anume: P. SERGESCU: Câteva din înfăptuirile Universităţii din Cluj. V. MARIAN: FR. VIÈTE, părintele algebrei moderne. TH. ANGHELUŢĂ: O clasă de neegalităţi. BAL LASCU: Asupra unor neegalităţi. Probleme propuse.

Revista Matematica Hispano-Americana. 1 Serie. Tome II. Nr. 4. 1942. Madrid. Comemorarea lui GALILEO în Spania. Opera astronomică a lui GALILEO GALILEI per ANTONIO RAMAÑA. GALILEO, fondator al Fizicei, per JULIO PALACIOS.

G. BRATU: *Cinci conferinţe de astronomie.* Seminarul de matematici al Universităţii din Cluj. Monografii matematice. Fascicula VIII, 1942.

Un gând pios a îndemnat pe profesorii Seminarului de Matematici al Universităţii din Cluj, provizoriu la Timişoara, să strângă din numeroasele manuscrise rămase pe urma profesorului G. BRATU, stins în refugiu la 1 Septemvrie 1941, şi să le publice pe acelea care erau complet redactate pentru tipar şi care prezentau un interes mai larg atât prin cuprinsul lor, cât şi prin expunerea limpede şi elegantă ce caracteriza scrisul regretatului profesor.

Inceputul s'a făcut prin tipărirea a cinci conferinţe de popularizare a astronomiei, pe care G. BRATU le-a ţinut atât la Cluj, cât şi în alte oraşe ardelene. Ea a fost ajutată băneşte de Consiliul Facultăţii de Ştiinţe din Timişoara, iar îngrijirea textului se datoreşte D-lui Prof. IOAN CUREA, fost elev şi colaborator apropiat al lui G. BRATU.

Subiectele tratate poartă titlurile: 1. Astronomia franceză; 2. GALILEU GALILEI; 3. Observatoarele astronomice de aiurea şi de la noi; 4. Cele mai noi lunete astronomice. Telescopul dela Palomar; 5. Ce ştim despre soare.

Profesorul BRATU a fost un entusiast. Atât la cursuri, cât şi în conferinţele publice punea atâta suflet şi atâta grijă încât vrăjea cu farmecul şi eleganţa expunerii sale pe auditori. Frumuseţea expunerii se simte şi la cetirea conferinţelor de faţă, pe care le recomand cu toată căldura celor ce doresc să cunoască marile probleme ale astronomiei moderne şi metodele ingenioase cu care ele se rezolvă.

G. BRATU: *Curs de astronomie,* 1942. Litografiat.

Din iniţiativa Seminarului de matematici al Universităţii din Cluj şi cu sprijinul material al D-nei ELENA GH. BRATU s'a pus în acest volum partea fundamentală a cursului de Astronomie, pe care profesorul GH. BRATU l-a ţinut timp de mai mulţi ani ca titular al catedrei de astronomie.

Revederea manuscrisului şi aranjarea materialului au căzut în sarcina D-lui IOAN ARMEANCA, astronom al observatorului din Cluj. Volumul cuprinde: 1. Trigonometria sferică; 2. Pământul, corp ceresc; 3. Teoria

instrumentelor astronomice; 4. Teoria Soarelui; 5. Reducerea observaţiilor astronomice. Paralaxa; 6. Planetele; 7. Luna; 8. Soarele.

La sfârşitul volumului sunt anexate următoarele capitole de mecanică cerească: I. Noţiuni de mecanică cerească; II. Legea lui NEWTON; III. Problema celor două corpuri izolate în spaţiu; IV. Potenţialul şi atracţia corpurilor; V. Problemele celor *n* corpuri.

Cursul se adresează în special studenţilor în matematici.

G. BRATU: *Curs de analiză matematică*, 1942. Litografiat.

In editura Seminarului de matematici al Universităţii din Cluj şi cu sprijinul generos al D-nei ELENA GH. BRATU a apărut acest curs de Analiză matematică, pe care profesorul BRATU l-a ţinut timp de un deceniu la Cluj şi pe care voise să-l tipărească încă din 1927.

Cursul, împărţit în patru părţi, cuprinde: Calculul diferenţial; Calculul integral; Ecuaţii diferenţiale şi Ecuaţii cu derivate parţiale.

Manuscrisul referitor la Calculul diferenţial şi Ecuaţiile diferenţiale a fost cercetat de D-l P. SERGESCU, iar restul de D-l G. CĂLUGĂREANU, profesori la Facultatea de Ştiinţe din Timişoara.

Rezultat al unei îndelungate experienţe la catedră, cursul lui GH. BRATU va fi un îndreptar util pentru studenţii ce studiază matematicele la şcolile superioare.

VICTOR MARIAN.

AL. PANTAZI. Elemente de Geometrie diferenţială proiectivă a curbelor şi a suprafeţelor. (Din Monografii Ştiinţifice ale Academiei Române Nr. V), Bucureşti 1942.

I. LINTEŞ. Probleme balisticei exterioare. (Extrase din *Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucarest*). Bucureşti 1942.

CERERI

317. S'a publicat la noi vreo carte în care să se găsească formule sau expresiuni algebrice scrise cu litere cirilice?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

C. ALASIA. Sul triangolo podario e antipodario. Livorno 1912. Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. JOSIAH WILLARTD GIBBS. In memoriam. Pavia 1905. Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2906. *Două mobile parcurg în același sens cu o mișcare uniformă o traiectorie rectilinie și se întâlnesc într'un punct* P. *Unde s'ar întâlni tot aceleași mobile dacă ar merge în sens contrar din punctele de pornire, fiecare păstrându-și însă viteza lui din primul caz? Discuție.*

L. TEODORIU.

Fie A_1 și A_0 pozițiile de plecare în sensul A_1A_0, ale mobilelor, $\overline{A_1A_0} = a$ distanța dintre ele și v_0 și v_1 vitezele respective. Pentru ca aceste mobile să se poată întâlni trebuește ca:

$$v_1 > v_0.$$

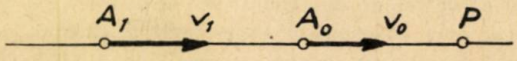


Fig. 1.

Timpul după care se va întâlni este evident:

$$t = \frac{\overline{A_1A_0}}{v_1 - v_0} = \frac{a}{v_1 - v_0},$$

iar punctul P de întâlnire este situat la distanțele:

$$\overline{A_0P} = v_0 t = a\frac{v_0}{v_1 - v_0}$$

$$\overline{A_1P} = v_1 t = a\frac{v_0}{v_1 - v_0}$$

față de punctele de plecare A_0 și A_1.

In cazul când cele două mobile străbat traiectoria rectilinie în *sensuri contrare*, sunt de studiat următoarele două ipoteze:

1) mobilul A_0 se mișcă în sensul $\overline{A_1A_0}$, iar mobilul A_1 se mișcă în sensul $\overline{A_0A_1}$. In această ipoteză cele două mobile se îndepărtează unul de altul începând din momentul plecării și deci nu se pot întâlni niciodată.

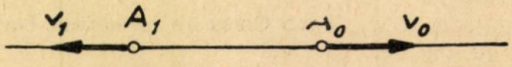


Fig. 2.

2) mobilul A_0 se mişcă în sensul $\overline{A_0A_1}$, iar mobilul A_1 se mişcă în sensul A_1A_0. In această ipoteză mobilele se întâlnesc după timpul:

$$t_1 = \frac{a}{v_1 + v_0}$$

în punctul P_1 situat la distanţele:

$$\overline{P_1A_0} = \frac{av_0}{v_1 + v_0}$$

$$\overline{P_1A_1} = \frac{av_1}{v_1 + v_0}$$

de A_0 şi A_1.

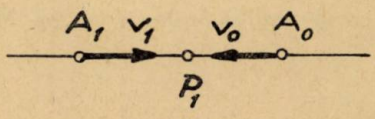


Fig. 3.

Problema se poate rezolva pe cale pur analitică, alegând ca axă Ox chiar traiectoria rectilinie a celor două mobile, notând cu x_0 şi x_1 abscisele punctelor de pornire A_0 şi A_1, cu v_0 şi v_1 iuţelile lor respective de direcţie oarecare şi cu t timpul şi scriind ecuaţiile mişcărilor lor corespunzătoare:

$$x = x_0 \pm v_0t \quad ; \quad x = x_1 \pm v_1t.$$

O altă soluţie se poate da construind diagramele spaţiului în funcţiune de timp în mişcările celor două mobile.

ALEXANDRU STOENESCU.

S'au primit bune soluţii numai pentru unul sau două din cele trei cazuri dela D-nii: E. BALAN, N. DINULESCU, A. MICLESCU, GR. MOISIL, FL. NEGRUTZU şi I. ŞERBĂNESCU.

PROBLEMA 4252. *Să se găsească două numere întregi, care adunate, scăzute şi înmulţite să dea trei patrate perfecte.*

O. N. ŢINO.

Pentru ca să fie două numere întregi a şi b care să satisfacă enunţului, este necesar să fie trei numere întregi x, y, z astfel ca sistemul

$$a+b=x^2 \quad ; \quad a-b=y^2 \quad ; \quad ab=z^2 \tag{1}$$

să aibă o soluţie întreagă; însă, în acest caz, numerele x, y, z, pe baza identităţii

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab, \tag{2}$$

formează o soluţie întreagă a ecuaţiei:

$$x^4-y^4=4z^2. \tag{3}$$

Cum ecuaţia (3) este imposibilă în numere întregi [1]), *toate diferite de zero*, urmează că nu se află două numere întregi diferite astfel ca *suma*, *diferenţa* şi *produsul* lor să fie patrate perfecte.

Problema nu admite decât soluţia banală: $a=b=2m^2$.

S'a primit o soluţie satisfăcătoare dela D-l MARCEL D. COTARIU (Brăila).

PROBLEMA 4588. *Să se rezolve ecuaţia*

$$Ax^2+Bx+(x-1)\,L\,(x-1)=0 \tag{1}$$

L *fiind simbolul logaritmilor neperieni.*

Discuţie.

ION S. ANTONIU.

Construind curbele

$$y_1=Ax^2+Bx \tag{2}$$

$$y_2=-(x-1)\,L\,(x-1) \tag{3}$$

rădăcinile ecuaţiunii (1) vor fi date de punctele de intersecţie ale curbelor (2) şi (3).

Construcţia curbei (2). Curba (2) reprezintă o parabolă trecând prin origină şi având ca axă dreaptă

$$x+\frac{B}{2A}=0 \tag{4}$$

şi ca tangentă la vârf dreapta

$$y+\frac{B^2}{4A}=0. \tag{5}$$

---

1) *Vezi*, de exemplu: ROBERT D. CARMICHAEL: *Analyse Indéterminée*. D. POMPEIU: „Raţionamentul aritmetic".

Vârful parabolei se va găsi în unul din cele 4 cadrane, poziția sa depinzând de semnul cantităților A și B, și anume:

In cadranul I dacă $A < 0$ și $B > 0$; curba are concavitatea în jos
„ „ II „ $A < 0$ „ $B < 0$; „ „ „ „ „
„ „ III „ $A > 0$ „ $B > 0$; „ „ „ „ sus
„ „ IV „ $A > 0$ „ $B < 0$; „ „ „ „ „

Parabola mai taie odată axa x-lor în punctul de abscisă

$$x = -\frac{B}{A}.$$

Construcția curbei (3). Această curbă are un sens numai pentru

$$x - 1 \geqslant 0 \quad \therefore \quad x \geqslant 1.$$

Pentru

$$x = 1$$

avem

$$y_2 = 0 \times -\infty = -0 \times \infty \quad \text{nedeterminare.}$$

Din (3) scriem

$$y_2 = -\frac{L(x-1)}{\frac{1}{x-1}}$$

și obținem

$$\lim_{x=1} y_2 = -\frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Aplicând regula lui L'HÔPITAL, obținem

$$\lim_{x=1} y_2 = \lim_{x=1}\left[-\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}\right] = \lim_{x=1}(x-1) = 0.$$

Curba se mai anulează pentru

$$L(x-1) = 0 \quad \therefore \quad x - 1 = 1 \quad \therefore \quad x = 2.$$

Derivata lui y_1 este

$$y_1' = -1 - L(x-1)$$

care se anulează pentru

$$L(x-1) = -1 \quad \therefore \quad x = 1 + \frac{1}{e}. \qquad (6)$$

Derivata 2-a a funcţiunii,

$$y_2'' = -\frac{1}{x-1}$$

este totdeauna negativă pentru $x > 1$; deci valoarea lui x din (6) ne va da un maximum pentru y_2, care va fi

$$y_{2\,\text{max.}} = \frac{1}{e}.$$

Pentru $x = +\infty$ se vede uşor că avem $y_2 = -\infty$
Tabloul de variaţie se construeşte imediat:

x	1	$1+\frac{1}{e}$	2	$+\infty$
y_2'	+	0	—	—
y_2	0	$\frac{1}{e}$ max.	0	$-\infty$

cu aceste elemente construcţia curbei nu prezintă nicio dificultate.

Pentru ca ecuaţia propusă să aibă rădăcini trebuie ca cele 2 curbe y_1 şi y_2 să se întretaie. Cum atât y_1 cât şi y_2 taie axa x, vom avea rădăcini numai atunci când aceste intersecţii sunt de aceeaşi parte a acestei axe. Dar y_2 este numai de partea pozitivă a axei x. Rezultă că nu vom avea nicio rădăcină dacă vârful parabolei se găseşte în cadranele II şi III, adică dacă A şi B au simultan acelaşi semn.

In celelalte cazuri vom avea sigur o rădăcină dacă

$$x_1 \geqslant x_2,$$

x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiilor y_1 şi y_2 luate individual.

Cum A şi B sunt de semne contrarii, iar

$$x_1 = -\frac{B}{A} \geqslant x_2 > 1$$

rezultă că x_1 este totdeauna pozitiv. Deci în valoare absolută va trebui să avem

$$|B| \geqslant |A|.$$

Ţinând seama că

$$y_2 = 0 \quad \text{pentru} \quad x_2 = 1 \quad \text{şi} \quad x_2 = 2,$$

discuţia rădăcinilor ecuaţiei se face uşor şi este rezumată în cele ce urmează:

1. Pentru

$$| B | = | A |$$

$$\therefore \quad x_1 = 1 \quad \text{şi} \quad x = x_1 = x_2 = 1.$$

2. Pentru

$$| A | < | B | < 2 | A |$$

$$\therefore \quad 1 < x_1 < 2.$$

Dacă $A > 0$ şi $B < 0$ $\therefore$ $x_1 < x < x_2 = 2.$

Dacă $A < 0$ şi $B > 0$ $\therefore$ $1 < x < x_1.$

3. Pentru

$$| B | = 2 | A |$$

$$\therefore \quad x_1 = 2 \quad \text{şi} \quad x = x_1 = x_2 = 2.$$

4. Pentru

$$| B | > 2 | A | .$$

$$\therefore \quad x_1 > 2.$$

Dacă $A > 0$ şi $B < 0$ $\therefore$ $x < x_1.$

Dacă $A < 0$ şi $B > 0$ $\therefore$ $x > x_1.$

Observaţiuni. 1°. Pentru ecuaţii numerice, aflarea rădăcinii in cazurile 2) şi 4) se face cu ajutorul metodei lui NEWTON.

2°. La această problemă nu s'a primit nicio soluţie.

I. S. A.

PROBLEMA 5114. *Dându-se ecuaţia:*

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b+c)(b+a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c+a)(c+b)} = m,$$

să se determine m *astfel încât rădăcinile ei să fie raţionale şi să se rezolve în acest caz.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluția I-a, dată de D-nii: PAUL DRĂGHICESCU (cl. 5-a lic. mil. Iași), CONST. I. PASCARU (lic. mil. Iași) și EUGEN GH. VIJELIE (cl. 7-a lic. mil. „N. Filipescu").

Gonind numitorii și grupând termenii obținem ecuația de gradul al II-lea

$$(1)\quad 2(a+b+c)x^2-2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)x+$$
$$-(m-1)(a+b)(b+c)(c+a)-2abc=0$$

al cărei discriminant (divizat prin 4) este

$$R=(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2+$$
$$+2(m-1)(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)+4abc(a+b+c)$$

sau făcând calculele și ordonând după puterile lui a de ex.:

$$R=a^4+2m(b+c)a^3+[4m(b+c)^2-b^2-c^2]a^2+$$
$$+2m(b+c)(b^2+c^2+3bc)a+b^4+c^4-b^2c^2+2mbc(b+c)^2.$$

Pentru că ecuația dată să aibă rădăcinile raționale, trebuie ca R să fie pătrat perfect. Vom pune:

$$R\equiv(a^2+pa+q)^2\equiv a^4+2pa^3+(p^2+2q)a^2+2pqa+q^2$$

și identificând cele două expresii ale lui R obținem

$$(2)\quad p=m(b+c);\quad p^2+2q=4m(b+c)^2-b^2-c^2;$$
$$pq=m(b+c)(b^2+c^2+3bc)\quad q^2=b^4+c^4-b^2c^2+2mbc(b+c)^2.$$

Valoarea lui p din prima ecuație, dusă în ecuația a treia dă:

$$m(b+c)q=m(b+c)(b^2+c^2+bc)\quad\therefore\quad m=0$$

sau
$$q=b^2+c^2+3bc.$$

Insă $m=0$ dă imediat $p=0$ și ducând aceste valori în ecuația a doua și a patra sistemul nu e verificat.

Luând $q=b^2+c^2+3bc$, ecuația a 4-a ne dă $m=3$ și $p=3(b+c)$, valori care verifică toate ecuațiile. Ecuația dată are deci rădăcini raționale pentru $m=3$.

In acest caz avem:

$$R \equiv (a^2 + pa + q)^2 \equiv (a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca)^2$$

şi rădăcinile ecuaţiei date vor fi:

$$x = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \pm (a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca)}{2(a + b + c)}$$

$$\therefore \quad x_1 = a + b + c \quad ; \quad x_2 = -\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}.$$

Soluţia II-a dată de D-l PAUL DRĂGHICESCU.

Termenul liber al ecuaţiei date este [fără semnul (—)]

$$T = (m - 1)(a + b)(b + c)(c + a) + 2abc.$$

Rădăcinile ecuaţiei trebuind să cuprindă divizori ai termenului liber, vom determina pe m astfel ca polinomul T să se descompună în factori. T fiind simetric şi omogen se va desface într'un produs de factori simetrici şi omogeni, unul de gradul întâi, care va fi $(a + b + c)$ şi altul de gradul al doilea. Dacă T e divizibil cu $(a + b + c)$ atunci vom înlocui:

$$a + b = -c \quad ; \quad b + c = -a \quad ; \quad c + a = -b$$

şi anulăm rezultatul:

$$-(m - 1)abc + 2abc = 0 \quad \text{deci} \quad m = 3.$$

Ecuaţia (1) devine:

$$(a + b + c)x^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)x + \\ -(a + b + c)(ab + bc + ca) = 0.$$

Şi se vede imediat că admite rădăcina $x_1 = a + b + c$.

A doua rădăcină rezultă din produsul rădăcinilor.

Observaţiuni. 1°. S'au primit cinci soluţii analoage soluţiei a doua însă niciunul din autori — cari sunt dela acelaşi liceu militar — *nu justifică* pentru ce determină pe m astfel ca T să se descompună în factori. S'au primit şi *trei* soluţii greşite.

2°. Dacă vrem să determinăm pe m funcţie de a, b, c cu aceeaşi condiţie din enunţ, atunci problema are o infinitate de soluţii. In adevăr să luăm $x = f(a,b,c)$ f fiind o funcţie *raţională*. Va rezulta o valoare raţională pentru m, depinzând de a, b, c. Deoarece prima rădăcină am luat-o raţională, a doua rădăcină va fi neapărat raţională.

PROBLEMA 5278. *Fie* A_1, B_1, C_1, *proiecţiile pe laturile unui triunghiu* ABC *ale unui punct* M *din planul triunghiului şi* ω, ω_1 *unghiurile lui* BROCARD *ale triunghiurilor* ABC, $A_1B_1C_1$.

Dacă $\cot\omega_1 = \lambda\cot\omega$, *punctul* M *descrie un cerc cu centrul pe dreapta* OK *şi raza:*

$$\rho^2 = R^2\frac{\lambda^2\cot^2\omega - 3}{(1+\lambda)^2\cot^2\omega}.$$

ION C. VASILIU.

Soluţie dată de D-l V. ECKSTEIN.

(1) Formula: $\cot\omega = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S} = \dfrac{\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C}{2\sin A\sin B\sin C}$

fiind cunoscută, iar α, β, γ fiind coordonatele normale absolute ale lui M, vom putea scrie în triunghiul $A_1B_1C_1$:

$$\cot\omega_1 = \lambda\cot\omega = \frac{\Sigma(\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\cos A)}{2\Sigma\beta\gamma\sin A}$$

De unde se deduce locul lui M:

(2) $$\Sigma\alpha^2 + \Sigma\beta\gamma\sin A(\cot A - \lambda\cot\omega] = 0.$$

Ecuaţia locului se mai poate scrie:

(3) $$\left(\Sigma\frac{\alpha}{\sin A}\right)(\Sigma\alpha\sin A) - (1+\lambda)\cot\omega(\Sigma\beta\gamma\sin A) = 0.$$

De unde se deduce că locul e un cerc (SALMON, *Sections coniques*, pag. 203).

Se citeşte pe ecuaţia (3) că axul radical al cercurilor-loc cu cercul circumscris este dreapta lui LEMOINE:

$$\frac{\alpha}{\sin A}+\frac{\beta}{\sin B}+\frac{\gamma}{\sin C} = 0.$$

Cercurile-loc trec deci prin două puncte fixe, intersecţia cercului circumscris cu dreapta lui LEMOINE, formează deci un fascicol.

Ecuația generală a unui cerc fiind:

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) + k(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) = 0$$

în cazul de față:

$$l = \frac{1}{\sin A}, \quad m = \frac{1}{\sin B}, \quad n = \frac{1}{\sin C}, \quad k = -(1+\lambda)\cot\omega.$$

Coordonatele centrului cercului se calculează după formulele date în SALMON, *Section coniques*, pag. 216:

$$\alpha_0 = k\cos A + l - m\cos C - n\cos B$$
$$= -(1+\lambda)\cot\omega \cos A + \frac{1}{\sin A} - \frac{\cos C}{\sin B} - \frac{\cos B}{\sin C}.$$

Sau, după efectuarea tuturor calculelor,

$$\alpha_0 = -(\lambda \cot\omega \cos A + \sin A) \ldots \text{ etc.}$$

Deci putem scrie:

$$\frac{\alpha}{\lambda\cot\omega\cos A + \sin A} = \frac{\beta}{\lambda\cot\omega\cos B + \sin B} = \frac{\gamma}{\lambda\cot\omega\cos C + \sin C}.$$

Se recunoaște că centrul cercului se găsește pe dreapta OK,

O [cosA, cosB, cosC] , K [sinA, sinB, sinC].

Pentru calculul razei, folosim formula dată în loc. cit.:

$$\frac{k^2}{R^2}\rho^2 = k^2 + 2k(\Sigma\, l\cos A) + (\Sigma\, l^2 - 2\Sigma\, mn\cos A).$$

$$\Sigma\, l\cos A = \Sigma \frac{\cos A}{\sin A} = \Sigma \cot A = \cot\omega.$$

$$\Sigma\, l^2 - 2\Sigma\, mn\cos A = \Sigma \frac{1}{\sin^2 A} - 2\Sigma \frac{\cos A}{\sin B \sin C}$$

$$= \Sigma \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A} - \Sigma \frac{2\sin A\cos A}{\sin A \sin B \sin C}$$

$$= 3 + \Sigma \cot^2 A - 4\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A \sin B \sin C} = (\Sigma \cot^2 A) - 1$$

$$= (\Sigma \cot A)^2 - 2\Sigma \cot B \cot C - 1 = \cot^2\omega - 3$$

$$\therefore (1+\lambda)^2 \cot^2\omega\, \rho^2 = R^2[(1+\lambda)^2 \cot^2\omega - 2(1+\lambda)\cot^2\omega + \cot^2\omega - 3] = R^2[\lambda^2 \cot^2\omega - 3]$$

$$\therefore \rho^2 = R^2 \frac{\lambda^2 \cot^2\omega - 3}{(1+\lambda)^2 \cot^2\omega}.$$

D-l DUMITRU RIPIANU a rezolvat problema luând ca axe de coordonate, latura BC şi înălţimea din A, dând naştere astfel la calcule laborioase.

Observaţiuni.

1. Intru cât minimul lui cotω este: $\pm\sqrt{3}$ (triunghiu echilateral), valoarea lui λ este dată de inegalitatea: $-\sqrt{3} \geqslant \lambda \cot\omega \geqslant \sqrt{3}$, ceea ce rezultă de altfel şi din condiţia realităţii valorii lui ρ. Valoarea negativă corespunde orientării negative a triunghiului, datorit senzului invers de circulaţie pe perimetru.

2. Dacă: $\lambda = 1$, ($\cot\omega_1 = \cot\omega$), locul lui M este cercul lui BROCARD, descris pe OK diametru având raza:

$$\rho^2 = R^2 \frac{\cot^2\omega - 3}{4\cot^2\omega}.$$

3. Dacă: $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{\cot\omega}$, $\cot\omega_1 = \pm\sqrt{3}$, tr. $A_1B_1C_1$ este echilateral, $\rho^2 = 0$. Iar coordonatele centrului cercului-loc al lui M sunt:

$$\frac{\alpha}{\sin(60^0 \pm A)} = \frac{\beta}{\sin(60^0 \pm B)} = \frac{\gamma}{\sin(60^0 \pm C)}$$

punctele isodinamice W_1 şi W_2 de pe dreapta OK, intersecţiile cercurilor lui APOLONIUS. Se regăseşte proprietatea că triunghiurile polare ale punctelor isodinamice sunt echilaterale.

4. Dacă triunghiul ABC e echilateral, $\cot\omega = \sqrt{3}$ locul lui M astfel ca: $\cot\omega_1 = \lambda\sqrt{3}$, este cercul descris din O ca centru şi cu raza dată

$$\rho^2 = \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda+1)^2} R^2 \quad \text{sau} \quad \rho^2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} R^2.$$

I. C. V.

PROBLEMA 5306. *Fie* G, O_9 *şi* H *centrul de greutate, centrul cercului celor nouă puncte şi ortocentrul triunghiului* ABC *înscris în cercul* O. *Perpendicularele coborîte din* O *pe* AG, AO_9, AH *intersectează perpendiculara ridicată la mijlocul lui* $\overline{AO}$ *în punctele* A_1, A_2, A_3. *Se obţin analog punctele* B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3. *Să se arate că grupele de puncte* A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 *sunt colineare şi că dreptele* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ *sunt paralele.*

TH. G. COCEA.

1. Fie cercul (O), un punct P în planul său, P'P" diametrul punctului P în cercul (O), dreapta (p) polara punctului P în raport cu cercul (O). Polul unei drepte oarecare (D), trecând prin P, în raport cu cercul (O) se găseşte pe polara (p) a punctului P, în particular polul dreptei OP în raport cu cercul (O) (adică punctul comun al tangentelor în P' şi P" la cercul (O)) este punctul dela infinit al polarei (p), deci (p) este paralelă cu tangentele în P' şi P" la cercul (O). Dacă punctul P se mută pe dreapta fixă OP, polara sa (p) se mută paralel cu ea însăşi.

2. Fie acum A', B', C' punctele unde un cerc (γ), concentric cu cercul (O), taie dreptele OA, OB, OC; perpendicularele în A', B', C' respectiv pe OA, OB, OC sunt tangente cercului (γ), iar triunghiul A' B' C' este omotetic cu triunghiul ABC, centrul de omoteţie fiind centrul O. Dacă G', O_9', H' sunt punctele omoloage punctelor G, O_9, H, atunci punctele G', O_9', H' aparţin dreptei OH, iar dreptele A' G', A' O_9', A' H' sunt respectiv paralele cu AG, AO_9, AH, etc.; ca urmare punctele A_1, B_1, C_1 sunt polurile dreptelor A'G', B'G', C'G', asemenea A_2, B_2, C_2 sunt polurile dreptelor A'O_9', B'O_9', C'O_9', iar A_3, B_3, C_3 polurile dreptelor A'H', B'H', C'H'. Aplicând acum proprietatea generală amintită mai sus, rezultă cele două proprietăţi enunţate în problema propusă.

D-l Paul P. Drăghicescu (Elev cl. VII, liceul militar Iaşi) a rezolvat problema şi a observat că proprietăţile enunţate subsistă chiar dacă

$$\overline{OA'} = \overline{OB'} = \overline{OC'} \neq \frac{1}{2}\,\overline{OA}.$$

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5352. *Câţi termeni are o progresie aritmetică, cu raţia 3, ştiind că se găsesc 56 termeni cari au pe 5 drept cel mai mare* **codivizor** *cu numărul de termeni?*

Comandor I. Linteş.

Dacă a, $(a+r)$, $(a+2r)$, ... $[a+(n-1)\,.\,r]$ sunt termenii unei progresii în număr de n, având raţia r primă cu n, atunci resturile

diviziunei acestei progresii prin n, într'o ordine oarecare vor fi: $0, 1, 2, \ldots (n-1)$; deoarece dacă $(a+x \,.\, r)$ şi $(a+y \,.\, r)$ unde $y > x$, adică doi termeni ai progresiei, divizaţi cu n, ar da acelaşi rest, atunci diferenţa lor $(y-x) \,.\, r = Mn$, ceea ce nu se poate căci r este prim cu n şi $(y-x) < n$ şi diferită de zero.

Deci numărul termenilor progresiei date, care sunt primi cu n este egal cu numărul termenilor primi cu n din şirul de resturi.

Apoi, se ştie că printre cei n termeni ai progresiei date dacă $n = d \,.\, \delta$, atunci numărul termenilor cari au cel mai mare *codivizor* egal cu δ, este acelaşi cu indicatorul lui d.

In adevăr, termenii multiplii lui δ sunt: $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots d\delta$; iar pentru ca, cel mai mare *codivizor* al unui termen oarecare $i \,.\, \delta$ din şir şi al lui $n = d \,.\, \delta$ să fie δ, trebuie ca i şi d să fie primi între ei. In consecinţă vom avea numai $\varphi(d)$ termeni primi cu d.

In cazul problemei 5352, cel mai mare *codivizor* între n şi 56 este 5, prin urmare vom avea $n = 5 \,.\, d$. Deci cei 56 termeni divizaţi cu 5 ne dau toate numerele prime cu d şi mai mici ca el, adică vom avea:

$$\varphi(d) = 56.$$

De aci rezultă că: $d = 87, 116, 174$.

In consecinţă: $n = 435, 580, 870$.

Cum însă raţia progresiei este 3 şi cum trebuie să fie primă cu n, căci altfel cele stabilite mai sus nu mai sunt valabile, atunci rezultă că:

$$n = 580.$$

Observaţii. 1. Au rezolvat problema, presupunând că cei 56 termeni sunt tot în progresie aritmetică, însă cu raţia $3 \times 5 = 15$, luând termenii din 5 în 5, fără a ţine seamă că aceşti termeni divizaţi cu 5, trebuie să dea numere prime cu numărul termenilor divizat cu 5: D-ra LYDIA TUDORAN şi D-nii: D. D. BOIANGIU, P. P. DRĂGHICESCU, C. MILEA, I. PINTILIE şi GH. PUCHIU.

2. Problema 5352 constitue o aplicaţie numerică a unor extensiuni a *„Teoriei Indicatorilor"* dată în *„Théorie des Nombres"* par E. LUCAS, pag. 396, 397.

I. L.

PROBLEMA 5437. *Dacă* p *şi* q *sunt două numere prime absolute consecutive (cu* $p < q$*) în şirul natural al numerelor prime, să se arate că, înafară de câteva excepţiuni, avem:*

$$p^3 > q^2.$$

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l MARIN GH. POPESCU (Liceul I. C. Brătianu, Piteşti).

Din neegalitatea dată scoatem

$$p\sqrt{p} > q.$$

Problema revine la a arăta că între p şi $p\sqrt{p}$ există un număr prim. Avem însă $\sqrt{p} > 2$ pentru $p \geqslant 5$. Deci $p\sqrt{p} > 2p$.

Ştim însă după teorema lui BERTRAND, demonstrată de TCHEBYCEFF că între p şi $(2p - 2)$ există un număr prim absolut. Acest număr prim satisface condiţiilor problemei, căci $q > p$ şi $q^2 < p^3$.

Excepţiile sunt pentru $p < 5$ şi acum:

$$2 < 3 \quad , \quad 2^3 < 3^2$$
$$1 < 2 \quad , \quad 1^3 < 2^2.$$

PROBLEMA 5549. *Să se construiască geometriceşte şi numai prin consideraţiuni geometrice un romb căruia i se cunoaşte un unghiu şi suprafaţa* k^2.

VIRGIL GHIŢESCU.

Soluţia 1-a dată de D-nii P. P. DRĂGHICESCU (bacalaureat, Lic. mil. Iaşi) şi D. VASILIU (elev cl. VI, Lic. mil. Iaşi).

Problema revine să construim un triunghiu dreptunghic căruia i se cunoaşte un unghiu ascuţit şi suprafaţa $\frac{k^2}{4}$.

Fie a, b catetele sale; avem $ab = \frac{k^2}{2} = l^2$.

Construcţia este următoarea:

Construim un unghiu xOy egal cu jumătate din unghiul dat al rombului. Pe Oy luăm un punct oarecare P, pe care-l proiectăm în Q pe Ox. Construim media geometrică a segmentelor $\overline{OQ}$ şi $\overline{QP}$. Luăm pe OQ segmentul $\overline{QR} = \overline{QP}$. Cercul descris pe $\overline{OR}$ ca diametru taie pe QP în S. Rezultă $\overline{SQ}^2 = \overline{OQ} \cdot \overline{QP}$. Ducem perpendiculara $\overline{MN} = l$ pe Ox, care taie pe SO în M şi pe Ox în N. Dreapta $\overline{MN}$ taie pe Oy in T.

Triunghiul ONT este cel cerut căci avem

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{NT}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{SQ}} .$$

De aci deducem:

$$\frac{\overline{MN}^2}{\overline{SQ}^2} = \frac{\overline{ON} \cdot \overline{NT}}{\overline{OQ} \cdot \overline{QP}} \quad \text{sau} \quad \frac{l^2}{\overline{SQ}^2} = \frac{\overline{ON} \cdot \overline{NT}}{\overline{OQ} \cdot \overline{QP}} ,$$

şi cum $\overline{SQ}^2 = \overline{OQ} \cdot \overline{QP}$ rezultă $l^2 = \overline{ON} \cdot \overline{NT}$.

Soluţia a 2-a dată de D-l RADU P. VOINEA (Elev-inginer, Bucureşti).

Se construieşte un romb asemenea cu cel dat. Fie $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$ diagonalele sale. Aria lui este

$$s = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$$

Notând cu S aria rombului cerut de problemă, avem:

$$\frac{S}{s} = \frac{k^2}{\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}}$$

Raportul de asemănare al celor două romburi va fi:

$$r = \frac{k}{\sqrt{\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}}}$$

Fie x diagonala rombului cerut, omoloagă lui $\overline{AC}$. Avem

$$\frac{x}{\overline{AC}} = \frac{k}{\sqrt{\overline{AC} \cdot \frac{\overline{BD}}{2}}}, \quad x = \frac{k \cdot \overline{AC}}{\sqrt{\overline{AC} \cdot \frac{\overline{BD}}{2}}}$$

Vom construi segmentul x, construind în prealabil media geometrică y a segmentelor $\overline{AC}$ şi $\frac{1}{2}\overline{BD}$, iar apoi a 4-a proporţională între segmentele k, $\overline{AC}$ şi y. Odată x determinat, rombul cerut se construeşte lesne.

Soluţia a 3-a dată de D-l MARCEL D. COTARIU (Brăila).

Fie ABCD rombul de construit. Ca în problema Nr. 558 pag. 769 din cartea F. G. M. *Exercices de géométrie*, construim triunghiul ACD căruia i se cunosc unghiurile şi suprafaţa $\frac{k^2}{2}$. Luând şi simetricul acestui triunghiu faţă de latura sa $\overline{AC}$, rezultă rombul cerut.

D-l Col. Ing. MANOIL EUGEN (S. S. I. A.), folosind şi consideraţiuni trigonometrice, obţine valoarea algebrică a semi-diagonalei rombului, şi deduce apoi construcţia propusă.

V. GH.

PROBLEMA 5579. *Fie un cerc de sârmă al cărui plan face un unghiu* α *cu planul orizontal. Pe cerc se mişcă un inel de greutate* G *de care e prins un fir, care trece peste un scripete fără frecare aşezat în centrul cercului. De cealaltă parte a firului atârnă o greutate egală tot cu* G. *Având frecare de coeficient* μ *între inel şi cerc, se cere să se determine regiunea în care inelul este în echilibru: (unghiul* θ *maxim pe care-l face firul cu linia de cea mai mare pantă a planului cercului).*

GABRIELA ŢIŢEICA.

Soluţie dată de D-l Col. Ing. MANOIL EUGEN.

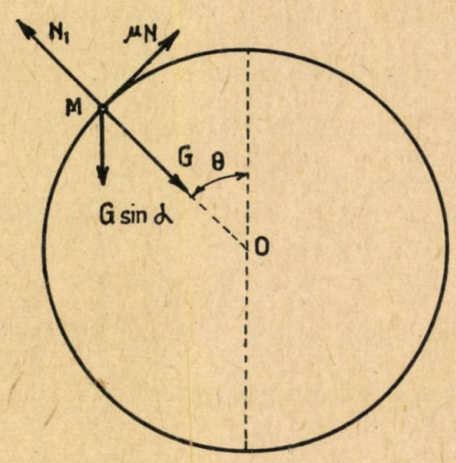
Considerăm inelul în punctul M de echilibru şi descompunem greutatea sa în două componente: după normala şi tangenta la planul înclinat.

Componenta lui G perpendiculară pe plan $= G\cos\alpha$

Componenta lui G în plan $= G\sin\alpha$.

Ocupându-ne acum de forţele din planul înclinat şi egalizând componentele după tangenta la cerc avem:

$$G\sin\alpha\sin\theta = \mu N. \qquad (1)$$



N fiind presiunea totală pe cerc, rezultantă din componenta perpendiculară pe plan a greutăţii şi din N_1 din planul cercului, pe care-l aflăm egalizând componentele după normala la cerc:

$$N_1 = G + G\sin\alpha\cos\theta.$$

Deci

$$N = \sqrt{G^2\cos^2\alpha + (G + G\sin\alpha\cos\theta)^2}.$$

Inlocuind această valoare în relaţia (1) căpătăm

$$\sin\alpha\sin\theta = \mu\sqrt{1 + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\theta + \sin^2\alpha\cos^2\theta}$$

de unde avem:

$$\cos\theta = \frac{-\mu^2 \pm \sqrt{(\mu^2+1)^2\sin^2\alpha - \mu^2}}{(\mu^2+1)\sin\alpha}.$$

S'a primit şi o soluţie dela D-l S-LT. P. DOBRESCU (Politehnica Bucureşti), care studiază şi cazul fără frecare şi arată că în acel caz $\theta = 0$ sau $\theta = \mu$. Adică în cele 2 puncte pe linia de cea mai mare pantă sunt singurele posibilităţi de echilibru.

G. T.

PROBLEMA 5627. *O bară de lungime 2l, de greutate neglijabilă este suspendată de un cui printr'un fir prins cu fiecare capăt de câte o extremitate a barei. Lungimea firului este 2a > 2l. La capetele barei atârnă greutăţile* P *şi* Q. *Să se găsească poziţia punctului de suspensiune precum şi tensiunile în fire în cazul când poziţia de echilibru a barei este orizontală.*

EMIL S. MODÂLCĂ.

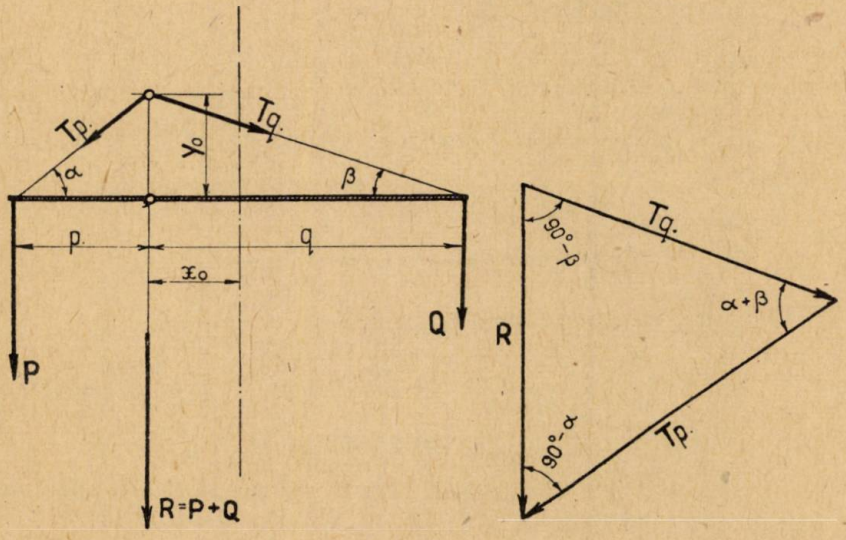
Soluţie. Rezultanta $R = P + Q$ a celor 2 greutăţi se află la distanţele p şi q de capetele barei $(p + q = 2l)$.

Avem:

$$P_p = Q_q$$

de unde deducem

$$(1) \qquad p = 2l \frac{Q}{P+Q} \quad ; \quad q = 2l \frac{P}{P+Q}.$$



Pentru echilibru punctul de suspensiune trebuie să se afle pe linia de acţiune a rezultantei. Lungimea firului fiind constantă, punctul de suspensie se va afla pe elipsa de focare în extremităţile barei şi axă mare $2a$.

Raportând elipsa la axele sale de simetrie, abscisa punctului de suspensie este

$$(2) \qquad x_0 = -l + p = \frac{Q - P}{Q + P}\, l.$$

Distanţa punctului de bară este

$$(2') \qquad y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} \qquad \text{unde } b = \sqrt{a^2 - l^2}.$$

Tensiunile T_p şi T_q din fire, împreună cu R sunt în echilibru. Deci:

$$\frac{T_p}{\sin(90^0 - \beta)} = \frac{T_q}{\sin(90^0 - \alpha)} = \frac{R}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$(3) \quad T_p = R\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad ; \quad T_q = R\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Se vede din figură că

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_0}{p} \quad ; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{q}.$$

Cum y_0, p, q sunt cunoscute, rezultă că şi T_p şi T_q sunt cunoscute.

Discuţie.

(*a*) $P = Q$, din (1) găsim $p = q = l$, din (2)

$$x_0 = 0\,; \quad y_0 = b \text{ şi } T_p \text{ şi } T_q = \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}\,P.$$

(*b*) $P = 0$, $Q \neq 0$; găsim $p = 2l$; $x_0 = l$, $\beta = 90^0$

$T_p = 0$, $T_q = Q$. Analog pentru $P \neq 0$, $Q = 0$.

(*c*) Când una din greutăţi (de ex. P) devine foarte mare în raport cu cealaltă, avem $p \to 0$; $x_0 \to -l$; $\alpha \to 90^0$.

T_q devine neglijabil, problema se reduce la cazul (*b*).

S'au primit soluţii dela D-nii D. Boiangiu (Politehnica Bucureşti), Oct. E. Gheorghiu şi P. P. Drăghicescu.

G. Ţ.

PROBLEMA 5642. *Să se înmulțească două numere așa ca la factori și la produs să se găsească toate cifrele neperechi câte o singură dată fiecare în total.*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU (Bacalaureat, Liceul Militar, Iași); G. G. DONȚU (Liceul de Aplicație, Iași); C. C. ILIESCU (Colegiul Bârlad); C. STAICU și P. F. IONESCU (Elevi clasa VII-a); M. D. COTARIU (Brăila), M. C. MANOLACHE (Bacalaureat); A. C. CUBAT (Liceul de Aplicație, Iași).

Avem cinci cifre neperechi 1, 3, 5, 7, 9 pe care să le însemnăm, în o ordine oarecare, prin a, b, c, d, e. Inmulțirea nu poate fi decât de forma:

$$ab \times c = de.$$

Nu putem lua $c = 1$, căci dă $e = b$ și $d = a$; nu putem lua $c = 5$, căci b fiind nepereche iese $e = 5$; nu putem lua $c = 9$, căci minimul lui ab fiind 13 iese $de > 100$. Deci c ar putea fi numai 3 sau 7.

$c = 3$. Nu putem lua $b = 1$, căci iese $e = c$. Nu putem lua $b = 3$, căci am avea $b = c$. Nu putea lua $b = 5$, căci iese $e = 5$.

Dacă luăm $b = 7$ iese $e = 1$ și atunci a e cel puțin 5 și $de > 100$.

Dacă luăm $b = 9$ iese $c = 7$ și ne mai rămâne pentru a cifrele 1 sau 7. Cu 7 iese $de > 100$, iar cu 1 iese soluția:

$$19 \times 3 = 57.$$

$c = 7$. Nu putem lua $b = 1$ căci iese $e = 7$; nu putem lua $b = 5$ căci iese $e = 5$. Nu putem lua $b = 3$, căci atunci $e = 1$, iar a e cel puțin 5 și ne iese $de > 100$. Nu putem lua $b = 9$ căci chiar de luăm $a = 1$ ne iese $de > 100$.

Problema admite dar singura soluție dată mai sus.

Notă. Problema mai admite soluția $3 \times 5 = 17$ în sistemul cu baza 8.

I. I.

EXERCIŢII

2. Intre elementele unui triunghiu avem

$$\frac{\Sigma\, a \sin A}{\Sigma\,(b+c)\sin A)} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4\,(p^2 - r^2 - 4Rr)}.$$

CPT. E. ŞT. IACOB.

R. Se pleacă dela relaţiile cunoscute

$$a = 2R \sin A \quad , \quad b = 2R \sin B \quad , \quad c = 2R \sin C$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 + r^2 + 4Rr$$

$$ab + bc + ca = 2\,(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

3. Să se stabilească relaţile

$$\sin^2(a+b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos(a+b)$$

$$\sin^2(a-b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos(a-b).$$

P. P. DRĂGHICESCU.

R. Prima relaţie se stabileşte desvoltând pe $\sin^2(a+b)$ şi grupând termenii convenabil. A doua relaţie se deduce din prima înlocuind pe b prin $-b$. Scăzând cele două relaţii una din alta se găseşte identitatea cunoscută

$$\sin^2(a+b) - \sin^2(a-b) = 4 \sin a \sin b \cos a \cos b.$$

4. In cercul O se dă diametrul fix AA′ şi diametrul mobil MM′. Se cere locul intersecţiei Q al perpendicularei din N pe MM′ cu perpendiculara din M′ pe AA′.

N. DONCIU.

R. Luăm ca axă de x pe AA′ şi origina în O. Dacă notăm cu φ unghiul MON atunci $M[R\cos\varphi, R\sin\varphi]$, $N[R\cos\varphi, 0]$, $M'[-R\cos\varphi, -\sin\varphi]$.

Ecuaţiile diametrului MM', al dreptei NQ şi al dreptei M'Q sunt respectiv

(1) $y - x\,\mathrm{tg}\varphi = 0$

(2) $y = -(x - \mathrm{R}\cos\varphi)\cot\varphi$

(3) $x + \mathrm{R}\cos\varphi = 0.$

Eliminând pe φ între (2) şi (3) găsim ca loc al lui Q cuartica

$$4x^4 + x^2y^2 - \mathrm{R}^2y^2 = 0$$

uşor de construit.

PROBLEME PROPUSE

5703. Să se rezolve sistemul:

$$x^2 = ay \quad , \quad y^2 = bz \quad , \quad z^2 = cx.$$

I. IONESCU.

5704. Să se demonstreze, că numărul, care se obţine intercalând n zeruri între cifrele numărului 1111, este divizibil prin 1111 când n este pereche.

C. C. MIHĂILESCU.

5705. Să se găsească numerele de două cifre, care împărţite prin 33 dau fracţia periodică simplă A, *abab*...., ştiind că răsturnatele lor împărţite prin acelaşi număr dau fracţia periodică simplă B, *baba*...

ION S. ANTONIU.

5706. Trei lucrători vor să facă o lucrare. Al doilea lucrător, dacă ar lucra singur, ar termina lucrarea cu *zece* zile mai târziu decât primul lucrător lucrând singur, dar cu *cincisprezece* zile mai curând decât al treilea lucrător lucrând singur. Dacă ar lucra împreună primul cu al doilea, s'ar termina lucrarea cu şase zile mai curând decât dacă ar lucra împreună al doilea cu al treilea lucrător.

Să se afle în câte zile ar putea termina lucrarea fiecare lucrător, dacă ar lucra singur.

EMIL MORȚUN.

5707. Să se demonstreze egalitatea

$$| 1 \quad (a+b)c \quad c^2 | = | 1 \quad c \quad c^3 |$$

folosind numai proprietățile determinanților

$$D = | 1 \quad ab \quad c^2 | \; ; \quad D' = | 1 \quad ab \quad a^2+b^2 | ,$$

celelalte linii ale determinanților obținându-se din prima prin permutare circulară a literelor a, b, c.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

5708. Se consideră un triunghiu (T) și un punct P în același plan. Se efectuează o transformare prin inversiune, oarecare. Fie (T′) triunghiul ce are ca vârfuri inversele vârfurilor triunghiului (T), iar P′ inversul lui P.

Să se demonstreze că triunghiul podar al punctului P, în raport cu (T), este asemenea triunghiului podar al punctului P′, în raport cu (T′).

ȘERBAN GHEORGHIU.

5709. Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul O. Fie A_1 proiecția lui A pe BC și A′ intersecția cercului O cu paralela dusă din A la BC. Se notează cu B′, C′ intersecțiile lui $A'A_1$ cu AC și AB, iar cu B_1, C_1 intersecțiile lui AA_1 cu CA′ și BA′.

1°. Presupunând pe B, C fixe și unghiul A constant, se cere să se găsească locul punctelor B′, C′, B_1, C_1.

2°. Locurile punctelor C′ și B_1, în afară de punctele B, C, se mai întâlnesc în M și N. Cercul O fiind dat, să se determine coarda BC așa încât suprafața BMCN să fie egală cu suprafața patratului înscris în cercul O.

G-L GH. BUICLIU.

5710. Un fir inextensibil de lungime l este fixat cu capătul A pe o masă orizontală, de formă poligonală, iar la celălalt capăt M este întins, cu ajutorul unei greutăţi, atârnând sub masă. Să se afle locul capătului M, când firul îşi schimbă continuu poziţia în jurul lui A. Să se dea şi o soluţie prin geometria elementară pură.

VIRGIL GHIŢESCU.

5711. Să se stabilească egalitatea:

$$\Sigma \sin A\left(\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{cotg}\frac{B}{2} - \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) + \frac{p^2}{r^2}\Sigma \operatorname{tg} A \cdot \Pi\left(1-\frac{b}{a}\right) = 0,$$

notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu.

EUG. N. WEGENER.

5712. Să se stabilească identităţile:

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\cos\frac{k\pi}{p} + \sin\frac{k\pi}{p}}{\cos\frac{k\pi}{p} + \sqrt{3}\sin\frac{k\pi}{p}} = \frac{p}{\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(p-1)\pi}{6}\right)}{\sin\frac{p\pi}{6}};$$

$$\prod_{k=0}^{p-1} \frac{\cos\frac{k\pi}{p} + \sin\frac{k\pi}{p}}{\cos\frac{k\pi}{p} + \sqrt{3}\sin\frac{k\pi}{p}} = \frac{(-1)^{p-1}}{2^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{\sin\frac{p\pi}{4}}{\sin\frac{p\pi}{6}}.$$

Să se verifice direct aceste identităţi pentru $p = 3$ şi $p = 5$.

V. ALACI.

5713. Să se trateze problema Nr. 4687, propusă de D-l Profesor ION IONESCU şi rezolvată la pag. 490, Vol. XLIII, considerând un baston compus dintr'o tijă rectilinie şi un mâner în în formă de arc de cerc de rază r şi lungime $r(\pi + 2a)$, a fiind un arc pozitiv.

Bastonul se va atârna de un cui O cu o curea flexibilă şi inextensibilă, de grosime şi greutate neglijabile, celălalt capăt al ei fiind prins într'un punct A al bastonului (care poate fi situat şi pe mâner unde cureaua ar putea aluneca).

Presupunând că tija rectilinie s'a rupt în două, să se determine poziţia lui A astfel ca tija să fie orizontală.

Care poate fi acum lungimea tijei?

RADU BĂDESCU.

5714. De un corp de greutate G, aşezat pe un plan, înclinat cu unghiul α pe orizontală, este prins un fir, care urcă paralel cu linia de cea mai mare pantă a planului înclinat, trece apoi peste un scripete de rază R_1, mobil în jurul axei fixe O_1, coboară după aceasta vertical şi prinde axa O_2 a unui al doilea scripete de rază R_2. Pe acest al doilea scripete este aşezat un alt fir de capetele căruia atârnă greutăţile P şi Q.

1°. Să se studieze mişcarea greutăţilor G, P, Q şi a scripetelor O_1 şi O_2.

2°. Să se determine tensiunile în fire în timpul mişcării.

3°. Să se determine condiţiile pentru care cu *toată mişcarea sistemului*, una din greutăţile P sau Q să *rămână fixă*.

Greutatea firelor, a scripetelor, frecările şi rezistenţa aerului se vor neglija.

Aplicaţie: $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

ALEXANDRU STOENESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andreescu M. (5531); *Andrei Gh. A.* (5531, 683); *Bârzescu M.* (5587, 93, 605, 07, 44, 49, 85); *Boldescu P.* (A); *Capverde I. Valeriu* (5649); *Căruntu D. Fl.* (5649); *Cetăţeanu St.* (A, E, P); *Ciumaşu V.* (5686); *Constantinescu Em.* (5549); *Cotariu D. M.* (5676, E); *Cubat H. A.* (5632); *Donţu Gh. G.* (4634, 5366, 593, 94, 609, 18, 26, 31, 32, 69, 92, P); *Drăghicescu P. P.* (4657, 5045, 464, 620, 32, N); *Eftimie D. C.* (5586, 614, 32, 53, 65, 66, 702); *Gaiu Gh. N.* (A); *Ganea N.* (5587); *Gligor N. I.* (4634, 765, 5172, 366, 418, 626, 37, 48, 59, 60); *Grumăzescu M.* Locot. (5610, 14, 32, 37, 48, 49, 59, 60); *Iacob Şt. E.* Căpit. (3867, 5047, 530, 88); *Ionescu F. P.* (5366, 626, 31, 98); *Ionescu V. N.* (5072, 694); *Manolache C. M.* (5599, 649, 84, 87); *Marcus B.* (5464, 531, 37, 47); *Marinescu Viorel* (5649); *Mehedincu V.* (A); *Mihăilescu C. C.* (5649, N); *Nache D.* (5531, 87); *Pantelimon C.* Subloc. (5648, 49, 56, 60); *Popescu I. Ad.* (5343, 618, 59); *Popescu Gh. M.* (5366, 686); *Puchiu T. Gh.* (5649); *Seni Cl.* (5631, 37); *Spinu A.* (5587); *Stelian Florica* (5660); *Thébault V.* (P); *Turculeţ T.* (5586, 635); *Vasiliu Gh. D.* (5640, 41, 63, 76, 87, N); *Wegener E.* (5586, 94, 674, 84).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele ***se vor lipi sau coase în partea stângă,*** împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. ***Foile vor avea format de sfert de coală,*** iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 200

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 82.737.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1942

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIU

SUMARUL

1. Galileo Galilei . . . . . *Gabriela Țițeica.*
2. Generalizarea unor identități ale lui Euler şi a D-lui Prof. A. G. Ioachimescu . . *N. V. Ghircoiașiu.*
3. O problemă de geometrie descriptivă . *Alexandru I. Guțu.*
4. Raportul comisiunii pentru acordarea premiului „Vasile Conta" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note matematice: 10 — 15.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2647, 4464, 4667, 5061, 5211, 5530, 5336, 5447, 5553, 5641, 5648, 5679.
10. Exerciții: 5 — 7.
11. Probleme propuse: 5580, 5715 — 5726.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica,** Inginer şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi; Al. D. Bunescu,** Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GALILEO GALILEI
(1564—1642)

Anul acesta se împlinesc trei secole dela moartea lui GALILEU, unul din spiritele universale cele mai distinse, care prin cercetările sale a deschis căile ştiinţei actuale.

Născut la Piza, începu prin a studia medicina în oraşul său natal, dar găsi curând că singură geometria pe care o studia după ARHIMEDE îi dădea o metodă sigură de gândire. Cercetarea naturii îl făcu să încerce studii de hidrostatică şi cercetări asupra centrelor de greutate astfel în cât inventă balanţa romană hidrostatică.

Curiozitatea spiritului său şi marea lui cultură clasică, precum şi cultura muzicală şi artistică îl făcură la început să ezite între o carieră literară şi una ştiinţifică. Au mai rămas dela el un sonet, un poem satiric, planul unei comedii. Insă de foarte tânăr chestiunile de fizică îl interesează mai presus de orice şi astfel studiind pendularea unei lămpi în catedrala din Piza descopere izocronismul bătăilor pendulului, şi prin experienţe asupra unor corpuri aruncate din vârful turnului oraşului său, arătă că viteza căpătată în cădere nu e proporţională ca greutatea corpului care cade.

La vârsta de 25 ani e numit profesor de matematici la Piza. In urma certurilor cu filosofii epocei sale, GALILEU care era în secret convins de exactitatea teoriei lui COPERNIC asupra mişcării universale, pleacă la Florenţa, unde ca profesor al tânărului duce de TOSCANA îşi începu activitatea de astronom, descoperind celebra „lunetă a lui GALILEU". Pentru prima oară se putea explora bolta cerească şi pentru prima oară fură văzuţi sateleţii lui JUPITER, iar în 1611 fură descoperite petele solare.

Dar duşmanii săi transformară chestiunile de fizică în chestiuni teologice şi în 1614 GALILEU începu să fie atacat în biserici ca fiind eretic şi necredincios.

Un călugăr chiar conchide că: „matematicile sunt invenţiile diavolului, iar matematicienii ar trebui să fie alungaţi din toate naţiunile creştine".

In urma acestor controverse cu preoţii catolici şi cu filosofii scolastici care nu admiteau existenţa sateliţilor lui JUPITER (consideraţi ca planete) căci spuneau ei: „Nu există decât 7 metale, candelabrul din templul lui SALOMON avea numai 7 braţe, capul

are numai 7 deschizături, de ce să fie mai mult de 7 planete?" GALILEU fu chemat la Roma şi primeşte ordinul de a abandona ideia că soarele e imobil şi pământul se mişcă.

Incurajat de KEPLER care-i cunoştea importanţa lucrărilor sale, GALILEU publică o lucrare asupra sistemului solar, în formă de dialog în care se discută teoria lui PTOLOMEU şi COPERNIC, aceasta ca o simplă ipoteză.

Succesul cu care fu primit acest dialog, înfurie pe duşmanii lui GALILEU atât teologi cât şi filosofi şi GALILEU, bătrân şi bolnav în vârstă de 70 ani fu adus iarna la Roma, judecat de inchiziţie, care-l condamnă să abjure erezia şi să fie închis pe un timp nedeterminat.

El fu exilat într'o fermă din care nu putea ieşi dar din care scria unui prieten.

„Acest spaţiu strâmt nu-mi încătuşează creerul, graţie căruia am mereu gânduri libere şi demne de un om".

In urma tratamentului rău GALILEU se îmbolnăvi şi încetul cu încetul îşi pierdu vederea (1638). In sfârşit la 78 ani, tot în exil, moare lăsând ştiinţei o moştenire nepieritoare, care să fie complectată şi desvoltată de posteritate căci precum spune el singur într'o scrisoare: „Cine ar putea pune stăvilar geniului omului? Cine ar îndrăzni să afirme că se ştie tot ce e de ştiut în lume?".

GABRIELA ŢIŢEICA.

GENERALIZAREA UNOR IDENTITĂŢI ALE LUI EULER ŞI A D-LUI PROF. A. G. IOACHIMESCU

In cadrul unei şedinţe de seminar la secţia de Matematici a Universităţii din Cluj [1]), un student a expus un articol al D-lui Prof. TH. ANGHELUŢĂ [2]) asupra formării câtului şi restului împărţirii a 2 polinoame, când împărţitorul este descompus în factori de gradul întâi. La sfârşitul şedinţei D-l Prof. TH. ANGHELUŢĂ a

1) Articolul a fost primit la redacţie la 20 Iunie 1939.

2) TH. ANGHELUŢĂ: *Gazeta Matematică*. Vol. XLV pag. 459, 505.

propus generalizarea identităţilor, datorite lui EULER şi D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU [1]), utilizate în lucrare. Pentru rezolvarea acestei probleme am procedat în modul următor:

Să considerăm fracţia raţională

$$\frac{x^{m-1+p}}{(x-a)\,(x-b)\ldots(x-l)}$$

unde $a \neq b \neq \ldots \neq k \neq l$ numărul acestor litere fiind m. Ne propunem să găsim descompunerea acestei fracţii raţionale în elemente simple. Partea fracţionară a descompunerii se găseşte uşor că este

$$\frac{a^{m-1+p}}{(a-b)\,(a-c)\ldots(a-l)}\,\frac{1}{x-a} + \frac{b^{m-1+p}}{(b-a)\,(b-c)\ldots(b-l)}\,\frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{l^{m-1+p}}{(l-a)\,(l-b)\ldots(l-k)}\,\frac{1}{x-l}.$$

Pentru a găsi partea întreagă a descompunerii utilizăm desvoltările

$$\frac{1}{1-\frac{a}{x}} = 1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \ldots + \frac{a^q}{x^q} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{b}{x}} = 1 + \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} + \ldots + \frac{b^q}{x^q} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{l}{x}} = 1 + \frac{l}{x} + \frac{l^2}{x^2} + \ldots + \frac{l^q}{x^q} + \ldots$$

unde am presupus $|x|$ mai mare decât fiecare din numerile $|a|, |b|, \ldots, |l|$, presupunere care nu restrânge generalitatea rezultatului ce vom obţine. Din aceasta deducem prin înmulţire

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)\cdots\left(1-\frac{l}{x}\right)} = 1 + \frac{S_1}{x} + \frac{S_2}{x^2} + \ldots + \frac{S_q}{x^q} + \ldots$$

1) A. G. IOACHIMESCU: *Gazeta Matematică*, Vol. VIII (1902—3), p. 130.

unde S_q este polinomul omogen de gradul q a literilor $a, b \ldots, l$, coeficienţii termenilor fiind toţi unitari, şi cu convenţia $S_0 = 1$. Insă avem

$$\frac{x^{m-1+p}}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)} = \frac{x^{p-1}}{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)\cdots\left(1-\frac{l}{x}\right)} =$$

$$= x^{p-1}\left(1+\frac{S_1}{x}+\frac{S_2}{x^2}+\ldots+\frac{S_q}{x^q}+\ldots\right)$$

deci partea întreagă căutată este

$$x^{p-1}+S_1\,x^{p-2}+S_2\,x^{p-3}+\ldots+S_{p-1}$$

şi prin urmare avem

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{x^{m-1+p}}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)} = x^{p-1}+S_1\,x^{p-2}+S_2\,x^{p-3}+\ldots \\ \ldots+S_{p-1}+\dfrac{a^{m-1+p}}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}\,\dfrac{1}{x-a}+ \\ +\dfrac{b^{m-1+p}}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)}\,\dfrac{1}{x-b}+\ldots \\ \ldots+\dfrac{l^{m-1+p}}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)}\,\dfrac{1}{x-l} \end{cases}$$

care este descompunerea căutată.

Cu ajutorul acestei descompuneri putem stabili o clasă de identităţi mai generale decât cele ale lui EULER şi ale D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU. Pentru aceasta observăm că avem

$$(2)\quad \begin{cases} (x-a)(x-b)\ldots(x-l) = x^m-\sigma_1\,x^{m-1}+ \\ \quad +\sigma_2\,x^{m-2}-\ldots+(-1)^i\,\sigma_i\,x^{m-i}+\ldots+(-1)^m\,\sigma_m \end{cases}$$

unde coeficientul σ_i este format din suma tuturor produselor, distincte, câte i a literelor $a, b, \ldots, l$. De exemplu

$$\sigma_1 = a+b+\ldots+l\ ;\ \sigma_2 = ab+ac+\ldots+al+bc+\ldots+bl+\ldots+kl.$$

Avem evident $\sigma_i = 0$ pentru $i > m$ precum şi $\sigma_0 = 1$. Inmulţind ambii membrii ai identităţii (1) cu produsul (2) şi identificând

coeficienții aceloraşi puteri a lui x, din ambii membrii, avem pentru puterile dela $m-1+p$ la m

$$(3)\quad \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = S_1 - \sigma_1 \\ 0 = S_2 - \sigma_1 S_1 + \sigma_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = S_{p-1} - \sigma_1 S_{p-2} + \sigma_2 S_{p-3} - \ldots + (-1)^i \sigma_i S_{p-i-1} + \ldots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1}, \end{cases}$$

iar pentru puterile $m-1$, $m-2, \ldots, 1, 0$ a lui x

$$(4)\quad \begin{cases} (-1)^q \sigma_q S_{p-1} + (-1)^{q+1} \sigma_{q+1} S_{p-2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{p+q-2} \sigma_{p+q-2} S_1 + (-1)^{p+q-1} \sigma_{p+q-1} + \\ + (-1)^{q-1} \dfrac{a^{m-1+p}}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} s^a_{q-1} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{q-1} \dfrac{l^{m-1+p}}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)} s^l_{q-1} = 0 \end{cases}$$

pentru $q = 1, 2, \ldots, m$ şi unde am notat cu s^a_i suma tuturor produselor câte i a literilor $b, c, \ldots, 1$, cu convenția $s^j_0 = 1$. Dar ultima identitate din (3) este adevărată, după cum se vede uşor, pentru orice p. In particular avem

$$S_{p+q-1} + (-1)\sigma_1 S_{p+q-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{q-1} \sigma_{q-1} S_p + (-1)^q \sigma_q S_{p-1} + (-1)^{q+1} \sigma_{q+1} S_{p-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{p+q-2} \sigma_{p+q-2} S_1 + (-1)^{p+q-1} \sigma_{p+q-1} = 0$$

cu ajutorul căreia (4) devine

$$(5)\quad \begin{cases} (-1)^{q-1} \dfrac{a^{m-1+p}}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} s^a_{q-1} + \\ + (-1)^{q-1} \dfrac{b^{m-1+p}}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} s^b_{q-1} + \ldots \\ \ldots + \dfrac{l^{m-1+p}}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)} s^l_{q-1} = \\ = S_{p+q-1} + (-1)\sigma_1 S_{p+q-2} + \ldots + (-1)^{q-1} \sigma_{q-1} S_p \end{cases}$$

pentru $q = 1, 2, \ldots, m$. Făcând în aceasta $q = 1$ şi

$$p = -1, -2, \ldots, -(m-1)$$

obţinem identităţile lui EULER

$$\frac{a^v}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} + \frac{b^v}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{l^v}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)} = 0 \quad , \quad v = 0, 1, 2, \ldots, m-2,$$

iar dacă $q = 1$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ identităţile D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU

$$\frac{a^{m-1+p}}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} + \frac{b^{m-1+p}}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{l^{m-1+p}}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)} = S_p .$$

Rezultă deci că identităţile (5) sunt o generalizare a acestora.

Putem pune şi sub altă formă identităţile (5) găsite, calculând coeficienţii polinoamelor din membrul 2. Obţinem astfel

$$(6)\quad \begin{cases} (-1)^{q-1} \dfrac{a^{m-1+p}}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} s^a_{q-1} + \\ + (-1)^{q-1} \dfrac{b^{m-1+p}}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} s^b_{q-1} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{q-1} \dfrac{l^{m-1+p}}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)} s^l_{q-1} = \\ = U^{q-1}_1 \sum a^{p+q-1} + U^{q-1}_2 \sum_{\substack{i_1+i_2=p+q-1 \\ i_1, i_2 \neq 0}} a^{i_1} b^{i_2} + \ldots + U^{q-1}_m \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_m=p+q-1 \\ i_1, i_2, \ldots, i_m \neq 0}} a^{i_1} b^{i_2} \ldots l^{i_m} \end{cases}$$

pentru $q = 1, 2, \ldots, m$ şi cu notaţia

$$(7) \qquad U^r_n = C^0_n - C^1_n + C^2_n - \ldots + (-1)^r C^r_n .$$

Se observă că în formula (6) primii $q+1$ coeficienţi sunt nuli, căci din (7) rezultă $U^r_n = 0$ pentru $r \geqq n$.

In cazul când $q = m$ relaţia (6) devine

$$(-1)^{m-1}\frac{a^{m-1+p}}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}s^a_{m-1}+$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{b^{m-1+p}}{(b-a)(b-c)\dots(b-l)}s^b_{m-1}+\dots$$

$$\dots+(-1)^{m-1}\frac{l^{m-1}}{(l-a)(l-b)\dots(l-k)}s^l_{m-1}=$$

$$=U^{m-1}_m\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=m+p-1\\ i_1,\,i_2,\dots,\,i_m\neq 0}}a^{i_1}b^{i_2}\dots l^{i_m}.$$

Insă ţinând seamă că

$$U^{m-1}_m=C^0_m-C^1_m+\dots+(-1)^{m-1}C^{m-1}_m=(-1)^{m-1}C^m_m=(-1)^{m-1}$$

şi împărţind ambii membrii cu $(-1)^{m-1}\,ab\dots l$ obţinem

$$\frac{a^{m-2+p}}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}+\frac{b^{m-2+p}}{(b-a)(b-c)\dots(b-l)}+\dots$$

$$\dots+\frac{l^{m-2+p}}{(l-a)(l-b)\dots(l-k)}=S_{p-1}$$

care sunt tot identităţile lui EULER sau ale D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU, respectiv pentru p egal cu $-1, -2, \dots, -(m-2)$ sau $0, 1, 2, \dots$ Această observare poate servi ca o verificare a calculelor făcute, deoarece acest lucru se vede imediat din (4) făcând $q = m$ şi împărţind peste tot cu $\sigma_m = ab\dots l$.

Exemple: In cazul $m = 3$ litere a, b, c avem din (6) $q = 1$

$$\frac{a^{2+p}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{2+p}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{2+p}}{(c-a)(c-b)}=S_p$$

pentru $p = -1, -2 \dots$ (EULER) şi $p=0, 1, 2, \dots$ (A. G. IOACHIMESCU)

$$q=2\ ,\quad p=1$$

$$\frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3(a+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=ab+ac+bc$$

$$q=2\ ,\quad p=2$$

$$\frac{a^4(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4(a+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4(a+b)}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc.$$

In cazul $m = 4$ litere a, b, c, d avem identitățile

$$q = 1$$

$$\frac{a^{3+p}}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^{3+p}}{(b-a)(b-c)(b-d)} +$$

$$+ \frac{c^{3+p}}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^{3+p}}{(d-a)(d-b)(d-c)} = S_p$$

$$q = 2 \quad , \quad p = 1$$

$$\frac{a^4(b+c+d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4(a+c+d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} +$$

$$\frac{c^4(a+b+d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4(a+b+c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} =$$

$$= ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

$$q = 2 \quad , \quad p = 2$$

$$\frac{a^5(b+c+d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^5(a+c+d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} +$$

$$+ \frac{c^5(a+b+d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^5(a+b+c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} =$$

$$= a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + c^2d + ab^2 + ac^2 + ad^2 + bc^2 +$$

$$+ bd^2 + cd^2 + 2(abc + abd + acd + bcd).$$

$$q = 3 \quad , \quad p = 1$$

$$\frac{a^4(bc+bd+cd)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4(ac+ad+cd)}{(b-a)(b-c)(b-d)} +$$

$$+ \frac{c^4(ab+ad+bd)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4(ab+ac+bc)}{(d-a)(d-b)(d-c)} =$$

$$= abc + abd + acd + bcd.$$

(Va urma) N. V. GHIRCOIAȘIU.

O PROBLEMĂ DE GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

In cele ce urmează ne vom ocupa de următoarea problemă: *Să se ducă printr'un punct* A *perpendiculara pe dreapta* (D).

Obişnuit problema se rezolvă în două feluri:

1. Se defineşte, în epură, planul [P], care trece prin punctul A şi este perpendicular pe dreapta (D). Acest plan se defineşte prin orizontala şi frontala punctului A, a căror proiecţii, respectiv orizontală şi verticală, sunt perpendiculare pe proiecţiile de acelaşi nume ale dreptei (D). Se determină punctul B de intersecţie a dreptei (D) cu planul [P], cu ajutorul unui plan proiectant al dreptei (D). Dreapta (AB) este perpendiculara căutată.

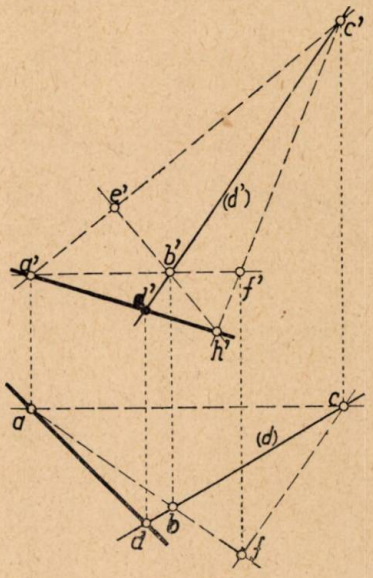


Fig. 1.

2. Se rabate planul definit de punctul A şi dreapta (D) pe un plan orizontal sau de front. Se construeşte, în rabatere, perpendiculara din punctul A pe dreapta (D). Se determină apoi proiecţiile acestei perpendiculare, adică se ridică în spaţiu figura construită în rabatare.

Vom arăta o altă construcţie, direct în epură, a perpendicularei dusă prin punctul A pe dreapta (D).

Presupunem că, în epură, dreapta (D) este definită prin proiecţiile ei.

Se definesc, în epură, prin proiecţiile lor, orizontala (AB) şi frontala (AC), care întâlnesc dreapta (D), adică orizontala şi frontala din planul [A, (D)], concurente în A, punctele B şi C fiind punctele unde aceste drepte particulare întâlnesc dreapta (D).

In triunghiul ABC înălţimea (BE) se proiectează, pe planul vertical de proiecţie, după înălţimea ($b'e'$) a triunghiului $a'b'c'$, deoarece (AC) este o frontală. Inălţimea (CF) se proiectează, pe planul orizontal de proiecţie, după înălţimea (cf) a triunghiului abc, deoarece (AB) este o orizontală.

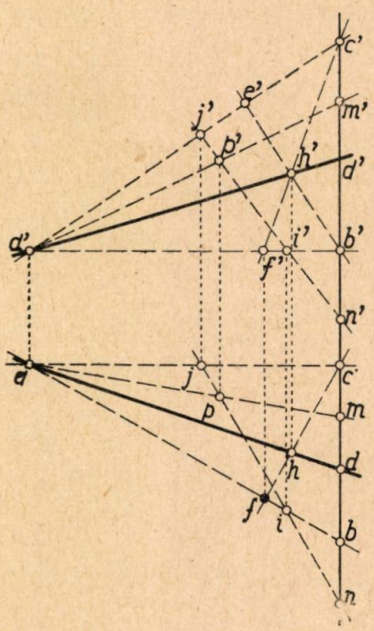


Fig. 2.

Se pot, prin urmare, construi în epură, uşor, dreptele (BE) şi (CF) din planul [ABC]. Punctul lor de întâlnire H, ortocentrul triunghiului ABC, defineşte dreapta (AH), care este perpendiculara căutată.

Dacă dreapta (D) este o dreaptă de profil definită în epură prin proiecţiile a două puncte ale sale M şi N, orizontala şi

frontală, din planul [A, (D)], concurente în A, se pot defini cu ajutorul unei alte drepte, oarecare, a acestui plan, dreaptă care să nu treacă prin punctul A.

In epura din figura 2, s'a definit dreapta (NP) a planului [A, (D)], punctul P fiind un punct al dreptei AM.

Punctul B şi C unde orizontala (AB) şi frontala (AC) taie dreapta de profil, pot fi determinate şi altfel, după una din metodele, prin care se determină pe o dreaptă de profil cealaltă proiecţiune a unui punct, când se dă una din proiecţiuni.

ALEXANDRU I. GUŢU.

RAPORTUL COMISIUNII PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „VASILE CONTA"

In conformitate cu art. 4 din regulamentul premiului « VASILE CONTA », avem onoare a vă aduce la cunoştinţa Dvs. următoarele:

Potrivit art. 2 din acelaşi regulament, premiul « VASILE CONTA » se ocordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul flecărui an până la 1 Iulie.

Deoarece până la data de mai sus nu s'a prezentat nicio lucrare, premiul în sumă de 4.000 lei nu se poate acorda şi se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta a asemenea lucrare.

Suma de mai sus urmează să se adauge la premiul anilor viitori.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI « VASILE CONTA »

PROF. O. ONICESCU, PROF. AL. PANTAZI, PROF. P. SERGESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea generală dela 27 August 1942.

NOTE MATEMATICE

10. *Asupra problemei 5119.* D-l I. IONESCU a cerut prin această problemă, rezolvată în G. M., Vol. XLVII, pag. 87 şi 479, *trei numere cu toate cifrele diferite astfel că înmulţind două din ele să nu se găsească la factori, la produsele parţiale şi la produsul total, de două ori aceeaşi cifră.*

Restricţia produselor parţiale impune ca unul din factori să fie numai de o cifră. Eliminând această restricţie şi căutând *trei numere cu toate cifrele diferite astfel ca unul din ele să fie egal cu produsul celorlalte două,* am găsit pe calea soluţiei problemei 5119, pe lângă soluţiile date la acea problemă, încă următoarele 97 soluţii, scrise în ordinea de mărime a produsului total:

15×24=360	27×34= 918	19×204=3876	13×546= 7098
15×26=390	15×62= 930	46× 85=3910	39×186= 7254
12×38=456	12×78= 936	59× 68=4012	15×486= 7290
12×39=468	18×52= 930	53× 76=4028	18×409= 7362
15×32=480	14×67= 938	52× 79=4108	15×492= 7380
12×48=576	14×68= 952	28×157=4396	69×108= 7452
18×32=576	13×74= 962	23×196=4508	48×159= 7632
16×37=592	18×54= 972	59× 78=4602	19×402= 7638
13×46=598	29×34= 986	19×253=4807	13×604= 7852
19×32=608	23×46=1058	53× 92=4876	48×165= 7920
15×42=630	24×57=1368	15×326=4890	59×136= 8024
12×57=684	32×49=1568	57× 86=4902	12×695= 8340
13×54=702	23×69=1587	68× 74=5032	19×453= 8607
18×39=702	38×42=1596	13×406=5278	26×345= 8970
12×59=708	34×52=1768	18×297=5346	54×168= 9072
15×48=720	34×58=1972	62× 87=5394	15×632= 9480
16×45=720	38×52=1976	32×169=5408	15×648= 9720
13×56=728	38×53=2014	12×483=5796	62×154= 9702
18×42=756	37×58=2146	42×138=5796	13×754= 9802
12×65=780	39×56=2184	34×178=6052	39×402=15678
12×67=804	38×65=2470	34×185=6290	54×297=16038
14×59=826	48×65=3120	74× 85=6290	27×594=16038
13×72=864	45×82=3690	59×108=6372	36×495=17820
26×35=910	58×64=3712	18×392=7056	45×396=17820

63 × 927 = 58401.

Se observă că la ultimele 5 soluţii se întrebuinţează toate cifrele câteodată fiecare.

Sunt interesante în particular numerele 702, 936, 5796, 6290, 16038 şi 17820, care se descompun în câte două feluri în doi factori astfel ca la factori şi la produs să nu se găsească de două ori aceeaşi cifră.

G-L GH. BUICLIU.

11. *Asupra problemei 2469* (G. M., Vol. XLII, p. 198). In această problemă se cere *maximul şi minimul expresiei*

$$E = tgA + tgB + tgC$$

ştiind că

$$(1) \qquad cotgA + cotgB + cotgC = k = \text{const.},$$

A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu.*

Soluţia dată este inexactă din cauză că s'au strecurat două greşeli în cursul demonstraţiilor:

O primă greşală s'a comis aplicând proprietatea: *produsul a trei numere a căror sumă este constantă este maxim dacă numerele sunt egale.*

Această proprietate nu se poate aplica decât dacă numerele rămân *pozitive sau nule,* ceeace nu are loc în cazul problemei 2469.

O a doua greşală este că se găseşte maximul pentru triunghiul echilateral, ceea ce evident e imposibil în general. Acest lucru nu ar putea avea loc decât dacă constanta *dată k* este egală cu $\sqrt{3}$.

Voi da acum soluţia exactă a problemei.

Avem

$$E = tgA + tgB + tgC = tgA\, tgB\, tgC,$$

$$\Sigma ctgA = \frac{\Sigma tgB\, tgC}{tgA\, tgB\, tgC} = k,$$

ceea ce arată că tgA, tgB, tgC sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^3 - Ex^2 + kEx - E = 0.$$

Această ecuaţie trebuie să aibă rădăcinile reale şi anume cel puţin două pozitive. Scriind aceste lucruri deducem $k > 0$ (regula semnelor) şi (semnul realizantului)

$$(2) \qquad (4 - k^2)\, E^2 + 2k\,(2k^2 - 9)\, E + 27 < 0.$$

De aici rezultă imediat discuția următoare:

Trebuie să avem $k \geqslant \sqrt{3}$.

I. Pentru $k = \sqrt{3}$, numai triunghiul echilateral verifică relația (1) deci E nu variază.

II. Pentru $\sqrt{3} < k < 2$, avem

$$\min. E = \frac{k(9 - 2k^2) - 2(k^2 - 3)\sqrt{k^2 - 3}}{4 - k^2},$$

$$\max. E = \frac{k(9 - 2k^2) + 2(k^2 - 3)\sqrt{k^2 - 3}}{4 - k^2}.$$

Aceste extreme sunt atinse de niște triunghiuri isoscele.

Minimul este atins de triunghiul în care

$$tgA = \frac{k - 2\sqrt{k^2 - 3}}{4 - k^2}, \quad tgB = tgC = k + \sqrt{k^2 - 3}$$

iar maximul în triunghiul în care

$$tgA = \frac{k + 2\sqrt{k^2 - 3}}{4 - k^2}, \quad tgB = tgC = k - \sqrt{k^2 - 3}$$

III. Pentru $k = 2$, avem

$$\min E = \frac{27}{4}, \quad \max E = +\infty.$$

Minimul este atins de triunghiul isoscel în care

$$tgA = \frac{3}{4}, \quad tgB = tgC = 3.$$

Maximul nu este atins, dar se poate găsi un triunghiu pentru care E este oricât de mare voim.

Pentru aceasta fie α un unghiu pozitiv mai mic decât $\frac{\pi}{4}$ și să luăm

$$(3) \qquad A = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad B = \beta, \quad C = \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta,$$

unde β este un unghiu cuprins între α şi $\frac{\pi}{2}$. Când β variază dela α la $\frac{\pi}{2}$, suma

$$\operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = \frac{2\cos\alpha}{\cos(B - C) + \sin\alpha}$$

variază continuu între

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} > 2 - \operatorname{tg}\alpha$$

şi

$$\frac{2\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} < 2 - \operatorname{tg}\alpha.$$

Rezultă că se poate alege β astfel ca

$$\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = 2$$

şi avem atunci

$$E > \operatorname{tg}A = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \tag{4}$$

care va fi foarte mare când α este foarte mic.

IV. Pentru $k > 2$, avem

$$\text{min. } E = -\infty, \quad \text{max. } E = +\infty.$$

Extremele nu sunt atinse. Există triunghiuri pentru care E este oricât de mare negativ sau oricât de mare pozitiv voim.

Pentru a vedea acest lucru se procedează ca mai sus la cazul III. Luăm un unghiu pozitiv mic α şi punem

$$A = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad B = \beta, \quad C = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta.$$

Se constată că există un unghiu β cuprins între 0 şi $\frac{\pi}{2} - \alpha$ astfel ca

$$\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = k. \tag{5}$$

Vedem atunci că E este foarte mare negativ.

Pentru maximum luăm (3) în care α este destul de mic pentru ca să avem

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} > k - \operatorname{tg}\alpha.$$

Se vede imediat că putem determina pe β astfel ca (5) să fie satisfăcut şi avem atunci (4).

Toată discuţia rezultă din studiul semnului trinomului din membrul întâi al inegalităţii (2).

Observare. Am ţinut să insist asupra celor spuse până aici deoarece problemele de maxim şi de minim sunt totdeauna delicate şi deoarece scăpări ca acele semnalate s'au produs şi la rezolvarea problemelor 1657 (XVI, p. 420), 1917 (XVIII, p. 423), 2246 (XXI, p. 262) sau la ultima parte a soluţiei problemei 2352 (XXV, p. 275). La primele două rezultatele rămân exacte cu condiţia ca să considerăm numai triunghiuri cu unghiuri ascuţite. Tot pentru aceleaşi motive soluţiile problemelor 1825 (XVIII, p. 190), 2013 (XIX, p. 311), 2084 (XXIV, p. 137) şi 2364 (XXIII, p. 114) nu sunt riguroase deşi rezultatele sunt aici exacte cum putem uşor verifica. S'au obţinut rezultate inexacte şi în nota 54 din vol. XVI, p. 449 tot prin aplicarea greşită a proprietăţii maximului unui produs.

Atrag atenţia cetitorilor în special asupra problemei 2246 care trebuie considerată ca nerezolvată. Soluţia exactă se poate obţine pe calea pe care am urmat-o la rezolvarea problemei 2469 din această notă.

TIBERIU POPOVICIU.

12. *Triunghiu mărginit de dreptunghiuri asemeni.* Fie $A_mB_mC_m$, $A_hB_hC_h$ triunghiul complimentar şi triunghiul ortic al triunghiului ABC de laturi a, b, c; A_1, B_1, C_1 şi A_3, B_3, C_3 centrele de simetrie ale unor dreptunghiuri asemenea construite exterior pe laturile triunghiului ABC; A_2, B_2, C_2, şi A_4, B_4, C_4 centrele dreptunghiurilor asemenea cu precedentele şi construite spre interior pe laturile aceluiaşi triunghiu; h_a, h_b, h_c lungimile înălţimilor AA_h, BB_h, CC_h.

k fiind un număr pozitiv şi arbitrar să notăm

$$A_mA_1 = -A_mA_2 = ka\ ,\quad B_mB_1 = -B_mB_2 = kh\ ,\quad C_mC_1 = -C_mC_2 = kc$$

$$A_mA_3 = -A_mA_4 = \frac{a}{4k}\ ,\quad B_mB_3 = -B_mB_4 = \frac{b}{4k}\ ,\quad C_mC_3 = -C_mC_4 = \frac{c}{4k}.$$

Fie β_1 şi γ_1 proiecţiile ortogonale ale punctelor B_1 şi C_1 pe BC, iar M şi N proiecţiile punctelor A şi B_1 respectiv pe mediatoarea laturii BC şi pe dreapta $C_1\gamma_1$. Se ştie că[1])

$$C_1N = B_1\beta_1 - C_1\gamma_1 = 2k \cdot A_mA_h \quad ; \quad B_1N = \beta_1\gamma_1 = \frac{a}{2} + 2kh_a .$$

Deci

$$\frac{AM}{MA_3} = \frac{2k \cdot A_mA_h}{\frac{a}{2} + 2kh_a} = \frac{C_1N}{B_1N}$$

şi în fine

$$\frac{B_1N}{MA_3} = 2k. \tag{1}$$

Triunghiurile dreptunghice B_1C_1N şi AMA_3 sunt deci asemenea cu raportul de asemănare egal cu $2k$. Rezultă că *ipotenuzele* B_1C_1 *şi* AA_3 *sunt dreptunghiulare.*

Raţionamentul precedent se aplică prin schimbarea lui k în $-k$ şi a lui $\frac{1}{4k}$ în $-\frac{1}{4k}$ dreptunghiurilor de centre A_2, B_2, C_2 şi A_4, B_4, C_4 construite interior pe laturile triunghiului.

La fel se arată că B_3C_3 şi AA_1, B_2C_2 şi AA_4, B_4C_4 şi AA_2 sunt dreptunghiulare.

In virtutea relaţiei (1) şi a analoagelor sale pentru celelalte dreptunghiuri avem:

$$\frac{B_1C_1}{AA_3} = 2k \quad ; \quad \frac{B_3C_3}{AA_1} = \frac{1}{2k}$$

$$\frac{B_2C_2}{AA_4} = -2k \quad ; \quad \frac{B_4C_4}{AA_2} = -\frac{1}{2k}$$

şi în fine

$$B_1C_1 \cdot B_3C_3 = AA_1 \cdot AA_3$$

$$B_2C_2 \cdot B_4C_4 = AA_2 \cdot AA_4 .$$

---

1) V. THÉBAULT. *Mathesis*, 1935 (supliment).

Când $k = \frac{1}{2}$, $A_1 \equiv A_3$, $A_2 \equiv A_4$ şi se regăseşte o proprietate veche relativă la figura formată de un triunghiu mărginit de patrate, unde patrulaterele $AA_1B_1C_1 \equiv AA_3B_3C_3$ şi $AA_2B_2C_2 \equiv AA_4B_4C_4$ sunt pseudo-patrate [1]).

V. THÉBAULT.

13. *Indicatori subordonaţi.*

1. Fie $\varphi(N)$ numărul numerelor prime cu N şi mai mici ca el. Să presupunem că din acest şir de numere prime cu N şi mai mici ca el, vom alege numai numerele prime cu un alt număr dat M, atunci numărul lor va fi notat cu $I_N(M.N)$ şi îl vom denumi *indicatorul lui* N *subordonat lui* M.

Expresia acestui *indicator subordonat* se deduce lesne, calea fiind aceeaşi. Astfel dacă admitem că factorii lui M.N sunt: $a', b', c', \ldots$ atunci avem:

$$(1) \qquad I_N(M.N) = N - \Sigma E\left(\frac{N}{a'}\right) + \Sigma E\left(\frac{N}{a'.b'}\right) - \Sigma E\left(\frac{N}{a'.b'.c'}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

unde $E(i)$ înseamnă întregii lui i.

2. De asemenea, dacă $I_{A \to B}(N)$ reprezintă numărul numerelor prime cu N din şirul de numere consecutive dela A la B, $(A < B)$ şi dacă dintre aceste numere alegem pe acelea prime şi cu un alt număr M, atunci $I_{A \to B}(M.N)$ va fi *indicatorul lui* N *din şirul* $A \to B$ *subordonat lui* M.

Expresia lui este:

$$(2) \qquad I_{A \to B}(M.N) = I_B(M.N) - I_A(M.N).$$

3. Dacă am subordona indicatorul lui N din şirul de numere $A \to B$, numerelor A şi B, atunci avem:

$$(3) \qquad I_{A \to B}(A.B.N) = I_B(A.B.N) - I_A(A.B.N).$$

---

1) C. A. LAISANT. A. F. A. G. 1877—150,

4. In sfârşit, într'un şir de N termeni ai unei progresii aritmetice de numere întregi şi pozitive, având drept raţie un număr prim cu N, numărul numerelor prime cu N şi subordonate unui alt număr dat M, adică prime şi cu M este egal cu $I_N(M \cdot N)$ a cărei expresie este dată în (1).

COMANDOR I. LINTEŞ.

14. *Asupra problemei 2575*[1]). 1°. Problema 2575, rezolvată în G. M., Vol. XLVII, pag. 174 admite o generalizare imediată:

„Fie ABC *şi* A'B'C' *două triunghiuri omologice. Notez intersecţiile:*

$$b \equiv (A'B', CA) \ ; \ a' \equiv (A'B', CB) \ ; \ c \equiv (B'C', AB);$$

$$b' \equiv (B'C', AC) \ ; \ a \equiv (A'C', BC) \ ; \ c' \equiv (A'C', BA).$$

Dacă a, b, c sunt picioarele a trei ceviene concurente, atunci şi a', b', c' sunt picioarele a trei ceviene concurente".

Intr'adevăr în exagonul *aa'bb'cc'* laturile opuse se întâlnesc în trei puncte colineare — pe axa de omologie — deci după reciproca teoremei lui PASCAL acest exagon este înscris într'o conică. Insă teorema lui TERQUEM spune că *„o conică ce trece prin picioarele a trei ceviene, intersectează laturile triunghiului în alte 3 puncte, ce sunt de asemenea picioarele a trei ceviene".* Aceasta justifică generalizarea de mai sus.

2°. Problema generală enunţată la 1° se poate studia în coordonate baricentrice. Fie ABC triunghiul de referinţă, $M(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ un punct în planul său şi

$$A'(\alpha_1, \beta_0, \gamma_0) \ ; \ B'(\alpha_0, \beta_1, \gamma_0) \ ; \ c'(\alpha_0, \beta_0, \gamma_1)$$

vârfurile unui triunghiu omologic cu el, centrul de omologie fiind în M.

Rezultă imediat:

$$a\ (0, \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\gamma_0, \gamma_1\alpha_1 - \gamma_0\alpha_0) \ ; \ b\ (\alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_0, 0, \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_0)$$

$$c\ (\gamma_1\alpha_0 - \gamma_0\alpha_0, \beta_1\gamma_1 - \beta_0\gamma_0, 0) \ ; \ a'\ (0, \alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_0, \gamma_0\alpha_1 - \gamma_0\alpha_0)$$

$$b'\ (\alpha_0\beta_1 - \alpha_0\beta_0, 0, \beta_1\gamma_1 - \beta_0\gamma_0) \ ; \ c'\ (\gamma_1\alpha_1 - \gamma_0\alpha_0, \beta_0\gamma_1 - \beta_0\gamma_0, 0).$$

1) A se vedea nota D-lui D. STOICA dela pag. 554, Vol. XLVII, precum şi nota D-lui G. D. SIMIONESCU, dela pag. 557, Vol. XLVII, asupra aceleiaşi probleme.

Se găseşte că atât a, b, c cât şi a', b', c' sunt picioarele a trei ceviene, dacă avem condiţia:

$$\alpha_0\beta_0\gamma_0(\alpha_0-\alpha_1)(\beta_0-\beta_1)(\gamma_0-\gamma_1)+$$
$$+(\alpha_1\beta_1-\alpha_0\beta_0)(\beta_1\gamma_1-\beta_0\gamma_0)(\gamma_1\alpha_1-\gamma_0\alpha_0)=0.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

15. *Asupra unei formule.* Numărând în două feluri punctele de intersecţie a diagonalelor unui poligon convex de $p+2$ laturi, să se stabilească formula:

$$(1)\quad C_p^2+2\,.\,C_{p-1}^2+3\,.\,C_{p-2}^2+\ldots+(p-1)\,.\,C_2^2\equiv C_{p+2}^4.$$

Presupunem că poligonul are n vârfuri ce le vom numerota dela 1 la n. Ştim că un poligon de n laturi se descompune în C_n^4 patrulatere; apoi că fiecare patrulater având 2 diagonale, ne va da 1 punct de intersecţie al diagonalelor şi că prin urmare vom avea tot C_n^4 puncte de tăiere a diagonalelor [1]).

Dar, aceste puncte de intersecţie a diagonalelor poligonului nostru se mai pot număra astfel: Din punctul 1, se pot duce $n-3$ diagonale, iar prima diagonală ce pleacă din vârful 2, va intersecta cele $n-3$ diagonale în $n-3$ puncte. A 2-a diagonală ce pleacă din vârful 2, va tăia cele $n-3$ diagonale numai în $n-4$ puncte, una din cele $n-3$ diagonale dusă din vârful 1, mergând la vârful $n-1$ unde merge şi diagonala din 2 şi ne mai dând puncte de intersecţie ş. a. m. d. Deci iată numărul punctelor de intersecţie cu diagonalele din vârful 2:

$$1+2+3,\ldots+n-3=\frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Numărul punctelor de intersecţie cu diagonalele din vârful 3 se va afla astfel: cea dintâi diagonală ce pleacă din vârful 3 va întâlni cele $n-3$ diagonale ce pleacă din vârful 1, în $n-4$ puncte.

---

1) A. G. IOACHIMESCU, *Culegere de probleme de algebră*, problemele 11 şi 12, p. 2.

Dar aceeaşi diagonală ce pleacă din vârful 3, va întâlni pe cele $n-3$ diagonale ce pleacă din vârful 2 în $n-4$ puncte, una din diagonalele plecând din vârful 2 şi cu una plecând din vârful 3 având aceeaşi extremitate. Deci în total diagonala I-a ce pleacă din vârful 3, întâlneşte diagonalele din 1 şi 2 în: $2(n-4)$ puncte. La fel se arată că a 2-a diagonală le întâlneşte în $2(n-5)$ puncte ş. a. m. d., ultima întâlnind în 2 puncte diagonalele din 1 şi 2. Deci suma punctelor de intersecţie e:

$$2+4+\ldots+2(n-4)=2\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

Judecând în acelaşi fel vom găsi:

$$3+6+\ldots+3(n-5)=3\cdot\frac{(n-4)(n-5)}{2}$$ puncte ş. a. m. d.

Ultimul punct din care se mai pot duce diagonale şi anume una singură distinctă, e vârful $n-2$ cu diagonala $(n-2,\ n)$. Această unică diagonală întâlneşte numai o singură diagonală din vârful 1, una din vârful 2 etc. şi una din vârful $n-3$, căci sau diagonalele-s comune, sau merg către aceeaşi extremitate ca diagonala din vârful $n-2$, sau se întâlnesc înafara poligonului convex.

Deci vom mai avea $n-3$ puncte de intersecţie.

In total deci avem:

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}+2\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$+3\frac{(n-4)(n-5)}{2}+\ldots\frac{(n-3)\cdot 2}{2}$$ puncte.

Sau:

$$C_{n-2}^2+2C_{n-3}^2+3C_{n-4}^2+\ldots+(n-3)C_2^2=C_n^4.$$

Punând $n-2=p$ avem formula din enunţ.

N. GAIU.

BIBLIOGRAFIE

Disquisitiones mathematicae et physicae. Tome II. Fasc. 2—4. Bucureşti 1942. Sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur (IV), par T. POPOVICIU. Sur les invariants topologiques attachés aux courbes et surfaces fermées, par G. CALUGAREANO. Sur les régions de monovalence des fonctions rationnelles, par P. POPOVĂŢ. Sur les invariants des espaces de Riemann singuliers, par G. VRANCEANU. Sur certaines classes de congruences W de l'espace elliptique, par R. M. ROŞCU. La notion de temps par E. C. G. STUECKELBERG v. BREIDENBACH. Remarques sur «l'anomalie» des absorbtions M. Possibilité de détermination des niveaux les plus extérieurs des atomes d'après leur spectres de rayons X de grande fréquence. Applications, par YVETTE CAUCHOIS.

Mathematica. Vol. XVIII. 1942. Timişoara 1942. Vieaţa şi opera matematică a lui EMILE PICARD de TH. ANGHELUŢĂ. Opera matematică a lui HENRI LEBESGUE, de S. STOILOV. Sur une généralisation de la condition de LIPSCHITZ d'ordre un, par I. FAVARD. Equations fonctionnelles du premier ordre, par M. GHERMĂNESCU. Sur une classe de surfaces, par GH. TH. GHEORGHIU. Sur la structure des transformations punctuelles du plan, par G. CALUGAREANU. Sur un système de nombres hypercomplexes dérivés des nombres de CLIFFORD, par G. PETIAN. Bemerkungen über Litter und Volumen von H. Handwiger. Sur une configuration de six pointes attachés à un tétraèdre coupé par trois planes parallèles à une face, par D. V. IONESCU. Le définition de l'holomorphie et la prolongement analytique, par D. POMPEIU. Perfectionnements, evolution, metamorphoses du concept de „coordonnées". Contribution à l'histoire de la géométrie analytique, par GINO LORIA. Sur les sections d'une surfaces par des plans menés par une tangente, ou par une droite passant par un point de la surface, par N. ABRAMESCU. Sur une problème au contour de la thèorié des marées, par C. IACOB.

Pozitiva Anul II, Nr. 7—10. Martie—Iunie 1942. Bucureşti. O teoremă de geometrie neeuclidiană, de D. BARBILIAN. Asupra ecuaţiei diferenţiale liniare LAPLACE, de G. G. CONSTANTINESCU. Construcţia centrului de curbură la curbele polar reciproce de A. GHEORGHIU. Asupra unor generalizări ale formulei lui PASCAL, de E. VIŞA.

Revista matematică din Timişoara. Anul XXII. Nr. 8. Octomvrie 1942. Un nou sistem de coordonate: „coordonate rombice" de V. ALACI.

GHEORGHE BRATU. *Curs de Analiză Matematică* predat la Universitatea din Cluj. Timişoara 1942.

GHEORGHE BRATU. *Curs de Astronomie* predat la Universitatea din Cluj. Timişoara 1942.

GHEORGHE BRATU. *Cinci conferinţe de Astronomie.* Timişoara 1942.

P. SERGESCU. *Un episod din bătălia pentru triumful calculului diferențial: polemica* ROLLE-SAUZIN 1702—1705. București 1942.

P. SERGESCU. *Sur une proposition de* CAYLEY (Extras din *„Bulletin scientifique de l'Ecole polytechnique de Timișoara"*. Timișoara 1942.

CERERI

Răspuns la Cererea Nr. 314. An. XLVII, pag. 518. Se cere o justificare a întrebuințării semnului × (crucea Sf. Andrei sau semnul înmulțiri) pentru a arăta nașterea cuiva. Cred că, dacă nu o fi o simplă întâmplare, atunci întrebuințarea acestui semn ar putea fi pusă în legătură cu recomandația biblică de a *„vă înmulți ca nisipul mării..."*. Deci dacă NEWTON (× 1642) înseamnă că NEWTON s'a născut la 1642, mai înseamnă și că la 1642 s'a înmulțit (!) populația adăugând (!) 1 la ceea ce era.

G-L GH. B.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

Dr. PAUL BACHMANN. Das Fermatproblem in seiner bisherigen Eutwicklung. Berlin 1919.

Donată de D-l I. B. FLORESCU.

F. AMODEA. Il trattato della coniche di FRANCESCO MARRABICO. Lipsca 1908.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

M. CH. MÉRAY. Les fractions et les quantités négatives. Paris 1890.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2647. *Se dau în plan cercurile* O_1 *și* O_2. *Fie* O *un cerc care taie pe* O_1 *după un diametru* AB *și este tăiat de* O_2 *după un diametru* CD. *Se cere să se găsească locul geometric al centrului* O *și înfășurătoarea diametrului* CD.

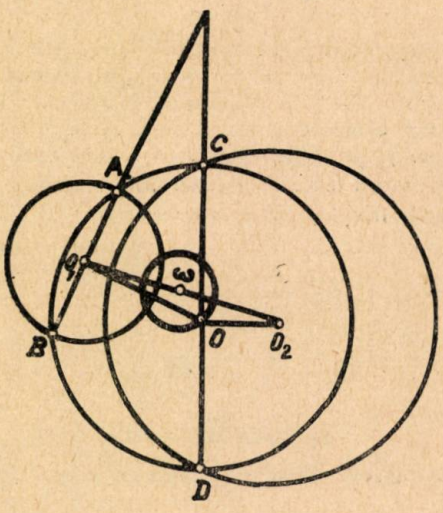
GH. BASACOV.

Soluție dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (Bacalaureat liceul militar, Iași).

Dacă se notează cu R_1, R_2, R razele cercurilor O_1, O_2, O, atunci se scoate din triunghiurile dreptunghice OO_1B și OO_2D

$$\overline{OO_1}^2 = R^2 - R_1^2 \quad \text{și} \quad \overline{OO_2}^2 = R_2^2 - R^2$$

$$\therefore \quad \overline{OO_1}^2 + \overline{OO_2}^2 = R_2^2 + R_1^2 = \text{const.}$$



Deci O descrie un cerc cu centru W în mijlocul lui O_1O_2 și cu raza ρ dată de

$$(1) \qquad \rho^2 = \frac{2(R_2^2 - R_1^2) - \overline{O_1O_2}^2}{4}.$$

Partea a doua a problemei revine la o chestiune cunoscută: Vârful unghiului drept DOO_2 se mișcă pe cercul w, iar latura OO_2 trece prin un punct fix. In acest caz se știe că OC înfășoară o conică Γ cu un focar în O_2 și al cărei cerc principal este cercul $w(\rho)$. Conica este elipsă sau hiperbolă după cum

$$\rho \gtrless \frac{\overline{O_1O_2}}{2}.$$

Sau ținând seamă de (1) după cum

$$R_2^2 > \overline{O_1O_2}^2 + R_1^2 \quad \text{sau} \quad R_2^2 < \overline{O_1O_2}^2 + R_1^2.$$

Dacă

$$S = \frac{\overline{O_1O_2}}{2} \quad \text{deci} \quad R_2^2 = \overline{O_1O_2}^2 + R_1^2$$

atunci $\overline{CD}$ trece prin punctul fix O_1.

O foarte bună soluție analoagă a dat D-l D. GH. VASILIU (Lic. militar, Iași).

PROBLEMA 4464. *Când laturile și raza cercului circumscris unui triunghiu* ABC *verifică relația*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6R^2$$

atunci cercul conjugat trece prin punctul lui LEMOINE *și reciproc.*

V. THÉBAULT.

I. *Soluție*, dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (Bacalaureat al liceul militar, Iași).

Fie H și K ortocentrul triunghiului și punctul lui LEMOINE, iar ρ raza cercului conjugat, care este dată de formula

$$\rho^2 = -4R^2 \cos A \cos B \cos C \tag{1}$$

pe când HK este dat de

$$\overline{HK}^2 = R^2 [\operatorname{tg}^2\omega - 4 \cos A \cos B \cos C (1 - \operatorname{tg}^2\omega)] \text{ [1]}. \tag{2}$$

ω fiind unghiul lui BROCARD.

Dacă ținem seamă de condiția din enunț, relația cunoscută

$$8R^2 (1 + \cos A \cos B \cos C) = a^2 + b^2 + c^2 \tag{3}$$

devine

$$4 \cos A \cos B \cos C = -1 \tag{4}$$

pe care ducând-o în valoarea lui $\overline{HK}$ obținem

$$\overline{HK}^2 = \rho^2 \tag{5}$$

ceea ce dovedește că cercul conjugat trece prin K.

---

1) C. ALASIA. *La recente geometria del triangolo.*

Reciproc din (5) se deduce, ţinând seamă de (2) şi (1)

$$R^2 [tg^2\omega - 4 \cos A \cos B \cos C (1 - tg^2\omega)] = -4R^2 \cos A \cos B \cos C$$

$$\therefore \qquad 1 + 4 \cos A \cos B \cos C = 0$$

şi deci

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6R^2.$$

II. *Soluţie*, dată de D-l MIREL D. STOENESCU (Şc. Ofiţeri de aviaţie, Bucureşti).

Relaţia cunoscută

$$abc = 4RS$$

se poate scrie

$$a^2b^2c^2 = 6R^2S^2 \quad \text{sau} \quad a^2b^2c^2 = R^2 (2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4)$$

aşa că condiţia din enunţ devine

$$(a^2 + b^2 + c^2)(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4) = 6a^2b^2c^2$$

$$\therefore \quad (b^2 + c^2 - a^2) a^4 + (c^2 + a^2 - b^2) b^4 + (a^2 + b^2 - c^2) c^4 = 0$$

relaţie care spune că cercul conjugat, a cărui ecuaţie este [1]):

$$(b^2 + c^2 - a^2) \alpha^2 + (c^2 + a^2 - b^2) \beta^2 + (a^2 + b^2 - c^2) \gamma^2 = 0$$

trece prin punctul $K(a^2, b^2, c^2)$, care este tocmai punctul lui LEMOINE al triunghiului ABC.

Reciproca este evidentă, căci plecând dela ultima ecuaţie, verificată de (a^2, b^2, c^2) şi făcând transformările în senz invers se ajunge la relaţia din enunţ.

Notă. 1°. Fie AA', BB', CC' şi H înălţimile şi ortocentrul unui triunghiu. Cercul cu centrul în H şi cu raza ρ, dată de

$$\rho^2 = HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC' = -4R^2 \cos A \cos B \cos C$$

se numeşte *cercul conjugat* sau *cercul înălţimilor* triunghiului ABC. Proprietăţile acestui cerc au fost semnalate iniţial în *Nouvelles Annales des mathématiques* în anii 1849, 1850, 1864, 1865. Acest cerc este locul geometric al centrelor hiperbolelor echilatere tangente laturilor triunghiului.

---

1) C. COŞNIŢĂ. *Coordonées barycentriques*, pag. 71.

2°. Relaţia (4) dela soluţia I arată că unul din unghiurile A, B, C este mai mare decât 90°, deci conchidem că relaţia din enunţ, şi proprietatea ce decurge din ea, nu are loc decât pentru unele triunghiuri obtuzunghice.

3°. Ţinând seamă de (4) relaţia (2) dela soluţia I se mai poate scrie

$$\overline{HK}^2 = R^2[tg^2\omega + 1 - tg^2\omega] = R^2$$

care arată că pentru triunghiurile speciale din enunţ, *cercul circumscris este egal cu cercul conjugat* şi *reciproc*.

4°. Fie A'B'C' triunghiul tangenţial al triunghiului ABC. Se găseşte uşor că

$$B'C' = R(tgB + tgC)$$

şi deci, semiperimetrul triunghiului A'B'C' este dat de

$$p' = R(tgA + tgB + tgC) = R\,tgA\,tgB\,tgC.$$

Dacă a', b', c', R', S' sunt laturele, raza şi suprafaţa triunghiului A'B'C', atunci avem succesiv

$$a'b'c' = 4R'S'$$

$$R' = \frac{a'b'c'}{4R^2\,tgA\,tgB\,tgC} = \frac{R^3(tgA + tgB)(tgB + tgC)(tgC + tgA)}{4R^2\,tgA\,tgB\,tgC}.$$

Dar

$$tgA + tgB = \frac{\sin(A + B)}{\cos A\cos B} = \frac{\sin C}{\cos A\cos B}$$

aşa că, înlocuind la numitor în R', tangentele în funcţie de *sin* şi *cos*, obţinem după simplificări

$$R' = \frac{R}{4\cos A\cos B\cos C}.$$

Ţinând seamă acum de relaţia (4) dela soluţia I, găsim

$$R' = -R$$

aşa că se poate enunţa următoarea proprietate interesantă: Dacă relaţia

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6R^2$$

este verificată atunci *cercul circumscris triunghiului* ABC *este egal cu cercul conjugat şi cu cercul circumscris triunghiului tangenţial* A'B'C' *şi reciproc.*

5°. Pe lângă precedentele, triunghiul special considerat se mai bucură de alte numeroase şi interesante proprietăţi, dintre care unele sunt date de D-l V. THÉBAULT în un supliment la *Mathesis*, Vol. XLVI, unde s'au strecurat câteva erori uşor de rectificat.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4667 [1]). *Jumătatea sumei sau diferenței patratelor a două numere este de asemeni o sumă sau o diferență de două patrate.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: MIHĂILESCU C. CONST., MODÂLCĂ EMIL, MUSCELEANU S. ȘTEFAN, ȘERBAN A. TEODOR și MUSCELEANU VINICIUS ION.

Fie $A = 2m + 1$, $B = 2n + 1$; avem

$$\frac{1}{2}(A^2 + B^2) = 2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1$$

$$= (m + n)^2 + (m - n)^2 + 2(m + n) + 1 = (m + n + 1)^2 + (m - n)^2,$$

deci

$$\frac{1}{2}(A^2 - B^2) = 2m^2 + 2m - 2n^2 - 2n = 2(m - n)(m + n + 1).$$

Dacă m și n sunt de aceeași paritate, numerele $m - n$ și $2(m + n + 1)$ sunt pare, așa că există doi întregi a și b, astfel ca

$$2(m + n + 1) = a + b \quad , \quad m - n = a - b,$$

deci

$$\frac{1}{2}(A^2 - B^2) = a^2 - b^2 = \left(\frac{3m + n + 2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3n + m + 2}{2}\right)^2.$$

Dacă m și n sunt de paritate diferită, atunci $2(m - n)$ și $m + n + 1$ sunt pare și vom avea la fel

$$\frac{1}{2}(A^2 - B^2) = \left(\frac{3m - n + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3n - m + 1}{2}\right)^2.$$

Notă. 1. Soluții numai pentru sumă și incomplect pentru diferență au dat D-nii: ALDEA V. VIRGIL, DRĂGHICESCU P. PAUL și NEGREA A. MIRCEA.

2. Soluții numai pentru sumă au dat D-nii: ȘTEFANOVICI I. MIRCEA și VIJELIE GH. EUGEN.

3. Prima parte este imediată pentru două numere de aceeași paritate căci orice divizor al unei sume de două patrate este o sumă de două patrate (FERMAT apoi LAGRANGE).

---

1) A se vedea nota din josul paginei 501, Vol. XLV, *Gazeta Matematică*

A doua parte este adevărată totdeauna atunci când jumătatea diferenței patratelor este impară sau divizibilă prin 4, căci atunci se poate descompune într'un produs de doi factori xy, ambii de aceeași paritate, ceea ce face ca sistemul

$$a + b = x \quad , \quad a - b = y$$

să aibă soluții întregi în a și b.

Problema este cunoscută, de sigur, dar noi am propus-o în vederea soluțiilor particulare ce i s'a dat.

M. G.

PROBLEMA 5061. *Să se arate că dacă* $\varphi(i)$ *reprezintă indicatorul lui* i, *atunci avem:*

$$n \cdot \varphi(n!) \leqslant n! \, \varphi(n).$$

Să se găsească o relație analogă pentru suma numerelor prime cu un număr dat și mai mic decât el.

CPT. C-DOR I. LINTEȘ.

Soluție și generalizare dată de D-l CĂLIN ION C. DIMITRIU (Șc. Politechnică București).

Fie $A > B$ două numere întregi alese astfel încât B are numai factori de ai lui A, atunci, dacă: $a_1, a_2, a_3 \ldots$ reprezintă factorii primi ai lui A, iar: $b_1, b_2, b_3, \ldots$ reprezintă factori primi ai lui B și dacă notăm simbolic:

$$\Pi i = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \ldots$$

atunci avem:

$$\varphi(A) = A \cdot \frac{\Pi(a-1)}{\Pi a}$$

$$\varphi(B) = B \cdot \frac{\Pi(b-1)}{\Pi b}.$$

Prin urmare relația devine:

$$B \cdot \varphi(A) \leqslant A \cdot \varphi(B)$$

sau:

$$\frac{\Pi(a-1)}{\Pi a} \leqslant \frac{\Pi(b-1)}{\Pi b}.$$

Cum factorii primi b se găsesc printre factori primi a şi cum $B < A$ urmează că neegalitatea este satisfăcută.

Egalitatea va avea loc numai dacă B va avea toţi factorii lui A.

In cazul sumei numerelor prime cu un număr dat şi mai mici ca el, avem relaţia:

$$B^2 - \sigma(A) \leqslant A^2 . \sigma(B).$$

In adevăr, ştim că:

$$\sigma(A) = \frac{1}{2} A . \varphi(A) \quad \text{şi} \quad \sigma(B) = \frac{1}{2} B . \varphi(B).$$

Deci înlocuind dăm, după simplificări, peste primul caz.

In cazul problemei 5061 avem:

$$A = n! \quad \text{şi} \quad B = n.$$

Notă. Se ştie şi chiar se poate demonstra cu uşurinţă că avem:

$$B\ \varphi(A) = \varphi(A.B)$$

$$B . \varphi\left(\frac{A}{B}\right) = \varphi(A).$$

De asemenea se vede lesne că avem:

$$B\,\sigma(A) > A.\sigma(B)$$

dacă $B < A$.

I. L.

PROBLEMA 5211. *Să se determine formele generale ale numerelor întregi şi pozitive* p *şi* α, *astfel ca expresia*

$$E \equiv 13^{3p} + 7.13^{2p} + 17.13^{p} + \alpha$$

să fie divizibilă cu 2244.

O. N. ŢINO.

Observăm dela început că: $2244 = 3 \times 4 \times 11 \times 17$ şi că având $13 \equiv +1 \pmod{12}$, vom avea oricare ar fi n întreg şi pozitiv: $13^n \equiv +1 \pmod{3}$; $13^n \equiv +1 \pmod{4}$; deci oricare ar fi p întreg şi pozitiv, avem pentru ca E să fie divizibil cu 3 şi cu 4:

$$\alpha + 1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ şi } \alpha + 1 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Apoi, având $13 \equiv +2 \pmod{11}$, avem $13^n \equiv 2^n \pmod{11}$ deci pentru divizorul 11, avem şirul periodic al resturilor

$$+2; +4; -3; +5; -1; -2; -4; +3; -5; +1$$

pentru puterile succesive ale lui 13, anume:

$$\begin{aligned} &13^{10m} \equiv +1\,;\ 13^{10m+1} \equiv +2\,;\ 13^{10m+2} \equiv +4\,;\\ &13^{10m+3} \equiv -3;\ 13^{10m+4} \equiv +5\,;\ 13^{10m+5} \equiv -1\,;\\ &13^{10m+6} \equiv -2\,;\ 13^{10m+7} \equiv -4;\ 13^{10m+8} \equiv +3;\\ &13^{10m+9} \equiv -5 \pmod{11}; \end{aligned} \tag{A}$$

asemenea, având $13 \equiv -4 \pmod{17}$, avem $13^n \equiv (-4)^n \pmod{17}$, deci pentru puterile succesive ale lui 13, avem:

$$\begin{aligned} &13^{4m+1} \equiv -4\,;\ 13^{4m+2} \equiv -1\,;\ 13^{4m+3} \equiv +4\,;\\ &13^{4m} \equiv +1 \pmod{17}. \end{aligned} \tag{B}$$

Vom considera valorile lui p faţă de divizorul 20.

1°. *Fie* $p \equiv 0$ (*mod. 20*). Ţinând seamă de relaţiile (A) şi (B), numărul întreg şi pozitiv α trebuie să satisfacă sistemului de congruenţe:

$$\alpha + 1 \equiv 0 \pmod{3};\ \alpha + 1 \equiv 0 \pmod{4};\ \alpha + 3 \equiv 0 \pmod{11};$$
$$\alpha + 8 \equiv 0 \pmod{17}.$$

Pentru a satisface ultimelor două congruenţe, punând:

$$\alpha = 11\,\beta - 3 \text{ şi } \alpha = 17\gamma - 8,$$

trebuie să avem:

$$17\gamma - 11\beta = +5 \tag{3}$$

Desvoltând pe 17/11 în fracţie continuă găsim soluţia particulară:

$$\gamma' = 2\ ,\ \beta' = 3, \quad \text{deci} \quad \gamma = 10\ ,\ \beta = 15,$$

ca urmare:

$$\beta = 17\,\theta' + 15\ ,\ \gamma = 11\,\theta' + 10, \tag{4}$$

pentru care avem:

$$\alpha = 187\,\theta' + 162. \tag{5}$$

Acum alegem pe θ astfel ca α să satisfacă primelor două congruenţe:

$$\alpha + 1 \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{şi} \quad \alpha + 1 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Luând pentru α valoarea $187\theta - 25$, avem:

$$187\theta - 24 \equiv 0 \pmod 3 \; ; \quad 187\theta - 24 \equiv 0 \pmod 4 \qquad (6)$$

sau încă:

$$187\theta \equiv 0 \pmod 3 \; ; \quad 187\theta \equiv 0 \pmod 4 \qquad (6')$$

deci

$$\theta = 12t. \qquad (7)$$

Aşa dar, pentru: $p = 20n$, avem $\alpha = 2244t - 25$ $(t \geq 1)$.

Procedând în acelaşi fel, avem încă următoarele valori de p şi α:

2°.	$p = 20n + 1$	$\alpha = 2244t + 887$
3°.	$p = 20n + 2$	$\alpha = 2244t - 805$
4°.	$p = 20n + 3$	$\alpha = 2244t - 601$
5°.	$p = 20n + 4$	$\alpha = 2244t + 1199$
6°.	$p = 20n + 5$	$\alpha = 2244t + 275$
7°.	$p = 20n + 6$	$\alpha = 2244t - 1009$
8°.	$p = 20n + 7$	$\alpha = 2244t - 805$
9°.	$p = 20n + 8$	$\alpha = 2244t + 519$
10°.	$p = 20n + 9$	$\alpha = 2244t + 1091$
11°.	$p = 20n + 10$	$\alpha = 2244t + 1031$
12°.	$p = 20n + 11$	$\alpha = 2244t + 623$
13°.	$p = 20n + 12$	$\alpha = 2244t + 383$
14°.	$p = 20n + 13$	$\alpha = 2244t + 1907$
15°.	$p = 20n + 14$	$\alpha = 2244t + 11$
16°.	$p = 20n + 15$	$\alpha = 2244t + 11$
17°.	$p = 20n + 16$	$\alpha = 2244t + 179$
18°.	$p = 20n + 17$	$\alpha = 2244t - 541$
19°.	$p = 20n + 18$	$\alpha = 2244t + 827$
20°.	$p = 20n + 19$	$\alpha = 2244t + 827.$

D-l PAUL P. DRĂGHICESCU (Lic. Milit. Iaşi) a dat o soluţie satisfăcătoare, rezultatele date de D-sa sunt în parte greşite.

Observare. Soluţia desvoltată a problemei a fost depusă în *Biblioteca Gazetei Matematice*, secţia Manuscrise.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5530. *Să se găsească un patrat de trei cifre a cărui rădăcină se obţine scriind, una după alta, una din cifrele sale şi suma celorlalte două cifre.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (Lic. militar, Iaşi).

Fie $100 \leqslant N^2 < 999$, patratul căutat. Suma cifrelor lui N^2 fiind aceeaşi cu a lui N, urmează că aceste numere sunt de aceeaşi formă faţă de divizorul 9. Ori căutând corespondenţa între N şi N^2 faţă de divizorul 9, găsim că ele sunt de aceeaşi formă numai când

$$N = 9n \quad \text{şi} \quad N = 9n + 1$$

şi cum $10 \leqslant N \leqslant 31$ urmează că N nu poate avea decât valorile 10, 18, 19, 27 şi 28, pe care ridicându-le la patrat găsim soluţiile

$$100 = 10^2 = [1 \times 10 + (0 + 0)]^2 \quad \text{şi} \quad 361 = 19^2 = [1 \times 10 + (3 + 6)]^2,$$

iar dacă considerăm şi numerele formale de 2 şi 3 cifre, mai găsim soluţiile

$$001 = 01^2 \quad \text{şi} \quad 081 = 09^2.$$

Notă. Ceilalţi rezolvitori au întrebuinţat căi mai lungi, care au necesitat numeroase încercări şi consideraţiuni asupra diverselor valori ale cifrelor lui N^2 şi N. Pe una din aceste căi diferite D-l S-LT. ŞT. TILICĂ a găsit 4 soluţii.

D-l G. G. DONŢU (Lic. de Aplicaţie, Iaşi) a dat 3 soluţii, omiţând pe 01^2.

Au găsit soluţiile 10^2 şi 19^2, D-nii: D. VASILIU, A. GH. ANDREI, T. TURCULEŢ (Lic. militar, Iaşi); A. H. CUBAT (Lic. de Aplicaţie, Iaşi); OCT. E. GHEORGHIU (Bucureşti) şi C. C. DEAC.

D-nii: A. N. POPA (Lic. militar, Iaşi), P. F. IONESCU (particular, Craiova) şi C. STAICU (Lic. militar, Iaşi) au găsit numai soluţia 19^2, iar D-l C. GH. CRUCERU (Lic. T.-Severin) numai pe 10^2.

Un student dela Politechnica Bucureşti, scriind complect *cinci* pagini de caiet a găsit soluţia $0^2 = 000$, pe care o putea găsi scriind cel mult trei cuvinte.

PROBLEMA 5336. *Intr'un triunghiu echilateral, triunghiul median este echilateral şi reciproc.*

Cum trebuie să fie un triunghiu, pentru ca triunghiul ortic să fie echilateral?

Cum trebuie să fie un triunghiu, pentru ca triunghiul format de picioarele bisectoarelor să fie echilateral?

O. N. ŢINO.

Proprietatea cunoscută, luată ca punct de plecare, se demonstrează observând că într'un triunghiu isoscel, triunghiul median este respectiv isoscel şi reciproc. Ca urmare triunghiul echilateral fiind de două ori isoscel, triunghiul median este de două ori isoscel, deci echilateral şi reciproc.

1. Fie BAC un triunghiu isoscel ($\overline{AB} = \overline{AC}$); AA', BB', CC' înălţimile lui. Să arătăm că triunghiul ortic B'A'C' respectiv, este de asemenea isoscel.

Observăm în primul rând că triunghiul BAC fiind isoscel, A' este mijlocul laturii $\overline{BC}$; de altă parte segmentele BC' şi CB' sunt egale, deci $\Delta A'BC' = \Delta A'CB'$, din care rezultă că $\overline{A'C'} = \overline{A'B'}$.

Reciproc. Să presupunem că fiind dat triunghiul ABC, triunghiul său ortic B'A'C' este isoscel, adică $\overline{A'B'} = \overline{A'C'}$. Dar înălţimea AA' a triunghiului ABC este bisectoarea triunghiului ortic isoscel B'A'C', deci ea este înălţime şi mediană în B'A'C', ca urmare B'C' || BC, deci A' este mijlocul laturii $\overline{BC}$, iar în acest caz AA' fiind înălţime şi mediană în triunghiul BAC, acest triunghiu este necesar isoscel.

Prin urmare, *dacă triunghiul ortic* B'A'C' *al unui triunghiu* ABC *este isoscel, triunghiul* ABC *este asemenea isoscel.*

Aşa dar, *condiţia necesară şi suficientă, pentru ca triunghiul ortic al unui triunghiu dat să fie isoscel este ca triunghiul dat să fie respectiv isoscel.*

Urmează că *pentru ca triunghiul ortic al unui triunghiu dat să fie echilateral, adică de două ori isoscel, este necesar şi suficient ca triunghiul dat să fie de două ori isoscel, adică echilateral.*

2. Fie triunghiul ABC isoscel ($\overline{AB} = \overline{AC}$); A', B', C' picioarele bisectoarelor interioare AA', BB', CC'.

Bisectoarea AA', este în acelaşi timp înălţime şi mediană în acelaş triunghiu BAC, deci $\Delta A'BB' = \Delta A'CC'$ (căci $\overline{A'B} = \overline{A'C}$, $\overline{BB'} = \overline{CC'}$, $\sphericalangle B'BC = \sphericalangle C'CB$), rezultă că $\overline{A'B'} = \overline{A'C'}$, adică *triunghiul* B'A'C' *este isoscel.*

Reciproc. Fie un triunghiu dat BAC ; AA', BB', CC' bisectoarele lui interioare, I punctul lor de întâlnire. Presupunem că avem $\overline{A'B'} = \overline{A'C'}$. Ducem perpendicularele $A'A_b$ şi $A'A_c$ respectiv pe laturile AC şi AB; avem $\overline{A'A_b} = \overline{A'A_c}$, punctul A' fiind pe

bisectoarea unghiului BAC. In acest caz, triunghiurile dreptunghiuri $A'A_bB'$ şi $A'A_cC'$ sunt egale $(\overline{A'B'} = \overline{A'C'}\ ;\ \overline{A'A_b} = \overline{A'A_c})$, deci $\overline{A_bB'} = \overline{A_cC'}$ şi cum $\overline{AA_b} = \overline{AA_c}$, deducem $\overline{AB'} = \overline{AC'}$. In triunghiul isoscel B'AC', bisectoarea AM este în acelaşi timp *mediană* şi *înălţime*, deci triunghiul B'IC' este şi el isoscel. Avem ca urmare:

$\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle AC'B'$, $\sphericalangle IB'C' = \sphericalangle IC'B'$, deci $\sphericalangle AB'B = \sphericalangle AC'C$;

dar:

$$\sphericalangle ABB' = 180^0 - \sphericalangle BB'A - \sphericalangle BAC \text{ şi}$$

$$\sphericalangle ACC' = 180^0 - \sphericalangle CC'A - \sphericalangle BAC$$

de unde:

$$\sphericalangle ABB' = \sphericalangle ACC'.$$

Cum însă $\sphericalangle ABC = 2 \sphericalangle ABB'$ şi $\sphericalangle ACB = 2 \sphericalangle ACC'$, deducem că: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$, adică triunghiul BAC este şi el isoscel.

Aşa dar, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca triunghiul determinat de picioarele bisectoarelor interioare să fi* isoscel, *este ca triunghiul dat să fie* isoscel.

Ca urmare, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca, într'un triunghiu dat, triunghiul determinat de picioarele bisectoarelor interioare să fie* echilateral, *este ca triunghiul dat să fie* echilateral.

D-l D. D. Boiangiu (Bacalaureat T. Severîn) a dat pentru cazul triunghiului ortic o demonstraţie geometrică exactă.

D-nii Gh. Gh. Bogdan, Paul P. Drăghicescu şi Aurel N. Popa (elevi liceul militar, Iaşi) au rezolvat problema cu ajutorul trigonometriei.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5447. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x(x+1)} = 0.$$

Gh. Popescu-Botoşani.

Ecuaţia dată se mai poate scrie

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = -\sqrt{x(x+1)}.$$

Ridic ambii membri la patrat şi găsesc

$$2\sqrt{x(x+1)} = x^2 - x - 1.$$

Ridicând din nou la patrat şi făcând toate reducerile avem

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0.$$

In această ecuaţie reciprocă fac substituţia

$$(1) \qquad u = x + \frac{1}{x}$$

şi obţin ecuaţia în u

$$u^2 - 2u - 7 = 0$$

ale cărei rădăcini sunt

$$u_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}.$$

Ducând aceste valori în (1) şi rezolvând în raport cu x găsim pentru x valorile

$$x_{1,2} = \frac{1+2\sqrt{2} \pm \sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{1-2\sqrt{2} \pm \sqrt{5-4\sqrt{2}}}{2},$$

Să caut dacă şi care din aceste rădăcini verifică ecuaţia propusă.

a) *Rădăcinile* $x_{1,2}$. Avem

$$(2) \qquad \sqrt{x_{1,2}} = \frac{\sqrt{2+4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{5+4\sqrt{2}}}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \pm \frac{R}{2}$$

unde

$$R = \sqrt{2\sqrt{2}-1}$$

deci

$$(3) \quad \sqrt{x_{1,2}+1} = \frac{\sqrt{2+4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{5+4\sqrt{2}+4}}}{2} = \frac{\sqrt{5+4\sqrt{2}}\pm 1}{2}.$$

Dar cum

$$5 + 4\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2 (2\sqrt{2}-1)$$

$$\sqrt{x_{1,2}+1} = \frac{(1+\sqrt{2})R}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Din aceste valori se deduce

$$(4)\quad \sqrt{x_{1,2}(x_{1,2}+1)} = \frac{1}{2}[2R+R\sqrt{2}\pm(2+\sqrt{2})]$$

$$= \frac{(2+\sqrt{2})(R\pm 1)}{2}.$$

Adunând (2) cu (3) şi cu (4) găsim o sumă diferită de zero, deci $x_{1,2}$ *nu* sunt rădăcini ale ecuaţiei propuse.

b) *Rădăcinile* $x_{3,4}$. Se vede că aceste rădăcini se obţin din $x_{1,2}$ înlocuind pe $\sqrt{2}$ prin $-\sqrt{2}$. Făcând aceste înlocuiri găsim

$$\sqrt{x_{3,4}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \pm \frac{R'}{2}$$

unde

$$R' = \sqrt{-2\sqrt{2}-1}$$

$$\sqrt{x_{3,4}+1} = \frac{(1-\sqrt{2})R'}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x_{3,4}(x_{3,4}+1)} = \frac{(2-\sqrt{2})(R'\pm 1)}{2}.$$

Nici suma acestor numere nu este nulă, deci rădăcinile găsite x_1, x_2, x_3, x_4 *nu verifică* ecuaţia propusă.

Dând alte semne radicalilor din enunţ am găsit că rădăcinile x_1, x_3 verifică ecuaţia

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x(x+1)}=0,$$

iar rădăcinile x_1, x_4 verifică ecuaţia

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x(x+1)}=0.$$

P. P. DRĂGHICESCU
Lic. militar, Iaşi.

Notă. 1°. D-l FL. POPESCU (Lic. „Marele Voevod Mihai", Bucureşti) a calculat valorile numerice ale rădăcinilor x_1, x_2 dovedind că ele nu verifică ecuaţia, apoi a *afirmat* fără a verifica sau demonstra că nici celelalte două rădăcini nu verifică ecuaţia dată.

2°. Au arătat că ecuația nu este verificată de rădăcinile reale, fără a examina și pe cele imaginare D-nii: Fl. N. Iorgulescu, C. Gr. Nicolau (Lic. „Lazăr", București); I. A. Badea (Lic. „Șaguna", Brașov); M. Ganea (Lic. „Sf. Andrei", București); O. E. Gheorghiu (Student, București); A. Mateescu (Lic. militar, Craiova).

3°. Au găsit valorile x_i, fără a verifica dacă ele satisfac sau nu ecuația D-nii: V. M. Ghiță, N. L. Pitiș (Colegiul militar, Predeal); D. Vasiliu, M. Andreescu (Lic. militar, Iași); I. C. Negrescu (Lic. „Spiru Haret", București); D. N. Pașoi M. Bârzescu, (Lic. militar, Craiova); I. N. Gligor (Șc. Of. rez. Craiova); C. Pantelimon (Șc. Of. Art. Antiaeriană, București); C. Mihăilescu (Student București); Gh. D. Oprea, N. Petrescu, Gh. Țonciu (Lic. militar, Timișoara); C. Gh. Cruceru (Lic. „Traian", T.-Severin); E. V. Dobrescu (Lic. „Petru Rareș", P.-Neamț); N. E. Moscovici (București); Cpt. E. Știacob; B. Marcus (Bacalaureat, București).

4°. D-l Gh. D. Sbârnea (Lic. „D. A. Sturdza", Tecuci) punând

$$\sqrt{x} = u \quad \text{și} \quad \sqrt{x+1} = v$$

a ajuns la sistemul

$$u + v + uv = 0 \quad ; \quad v^2 - u^2 = 0$$

pe care rezolvându-l a găsit cele 4 valori ale lui x, fără însă a le verifica.

5°. D-l M. Ganea a arătat că x_2, x_4 *verifică* ecuație

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+1} + \sqrt{x(x+1)} = 0$$

6°. D-l Fl. M. Iorgulescu consideră relațiunea

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0 \tag{1}$$

care făcută rațională devine

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0. \tag{2}$$

Făcând în (1) și (2)

$$a = x \quad , \quad b = x + 1 \quad , \quad c = x(x+1)$$

se obține ecuația din enunțul problemei 5447 și ecuația reciprocă care dă valorile lui x.

G-l Gh. B.

PROBLEMA 5553. *Să se construiască un triunghiu căruia îi sunt date:*

a) *Lungimile bisectoarelor unui unghiu;*

b) *Unghiul format de mediana și înălțimea adiacente bisectoarelor considerate.*

Discuție.

O. N. Țino.

Fie BAC triunghiul pe care îl considerăm construit; AI şi AI′ respectiv bisectoarea interioară şi exterioară ale unghiului A, I şi I′ fiind picioarele acestor două bisectoare, $\overline{AH}$ înălţimea vârfului A, iar $\overline{AM}$ mediana corespunzătoare laturii BC. Cercul circumscris triunghiului BAC taie bisectoarele, interioară şi exterioară, ale unghiului BAC respectiv în punctele N şi N′. Deoarece bisectoarele AI, AI′ sunt perpendiculare una pe alta, $\overline{NN'}$ este un diametru al cercului BAC şi fiindcă N şi N′ sunt mijloacele arcelor BNC şi BN′C, diametrul $\overline{NN'}$ este perpendicular în M pe latura BC.

Din aceste observări rezultă următoarea construcţie a triunghiului cerut. Cunoscând lungimile catetelor $\overline{AI}$ şi $\overline{AI'}$, construim triunghiul dreptunghiu IAI′; apoi construim înălţimea $\overline{AH}$, din A pe dreapta II′. Cunoscând încă unghiul MAH, pe care mediana AM îl face cu înălţimea AH şi ştiind că într'un triunghiu oarecare bisectoarea interioară şi mediana unui vârf sunt de aceeaşi parte a înălţimii aceluiaşi vârf, construim mediana $\overline{AM}$, având astfel mijlocul M al laturii BC. Perpendiculara în M pe $\overline{II'}$ taie respectiv bisectoarele AI şi AI′ în punctele N şi N′; mijlocul O a lui $\overline{NN'}$ este centrul cercului BAC, apoi din O socotit centru cu raza $\overline{OA}$ trasăm acest cerc, care determină pe $\overline{II'}$ vârfurile B, C. Unind punctele B, C cu A, avem triunghiul cerut.

Pentru ca problema să fie posibilă, este necesar ca unghiul dat MAH să fie mai mare decât unghiul IAH, căci este cunoscută proprietatea că *în orice triunghiu* BAC, *care nu este isoscel bisectoarea interioară a unghiului* A *este cuprinsă între înălţime şi mediană.* (Vezi articolul: *O proprietate a bisectoarei într'un triunghiu* de O. N. ŢINO (R. M. T. XXI, 82).

Asemenea unghiul dat MAH trebuie să fie mai mic ca un unghiu drept pentru un triunghiu BAC propiu zis.

Dacă bisectoarea exterioară are dată o lungime infinită, triunghiul BAC este isoscel, iar unghiul medianei AM cu înălţimea AH este *zero,* şi este consecinţă a datelor precedente; prin urmare problema construcţiei triunghiului BAC propusă exclude acest caz.

D-l CLAUDIU SENI (Liceul T. Maiorescu, Bucureşti) a dat o soluţie apropiată de cea precedentă; D-l MARCEL D. COTARIU (Brăila) determină

centrul cercului BAC observând că el este pe mediatoarea laturii BC şi că simetrica înălţimii AH, faţă de bisectoarea Al, este diametrul vârfului A în cercul BAC.

Alte soluţii au fost date de D-nii: RADU P. VOINEA (Bacalaureat, Craiova); PAUL P. DRĂGHICESCU (Liceul Militar, Iaşi); C.D. EFTIMIE (Bucureşti); CLAUDIU SENI; GEORGE GH. DONŢU (Liceul Aplicaţie, Iaşi).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5641. *Un con circular drept, omogen, de greutate specifică* ρ, *este aşezat cu baza sa pe un plan orizontal.*

De vârful acestui con se atârnă cu un fir o sferă omogenă executată din acelaşi material ca şi conul.

Elementele geometrice fiind cunoscute, să se determine condiţia ca sfera să nu răstoarne conul.

Să se determine tensiunea în fir şi reacţiunea dintre sferă şi con. Greutatea firului se va neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (Bacalaureat Liceul Militar, Iaşi).

Fie O_1 centrul bazei conului, O_2 centrul sferei, S vârful conului, iar SA generatoarea conului pe care se sprijină sfera.

Fie de asemenea R raza bazei conului, r raza sferei, g generatoarea conului, iar l lungimea firului $\overline{SO_2}$. Deci dacă:

$$\alpha = O_1\hat{S}A \quad \text{şi} \quad \beta = A\hat{S}O_2,$$

avem:

$$\sin\alpha = \frac{R}{g} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{g^2 - R^2}}{g}$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{l} \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l}.$$

Fie

$$G_c = \frac{\pi R^2 \sqrt{g^2 - R^2}}{3}\rho$$

greutatea conului, iar

$$G_s = \frac{4\pi r^3}{3}\rho$$

greutatea sferei.

Sfera nu răstoarnă conul dacă:

$$G_c R \geqslant G_s (d - R),$$

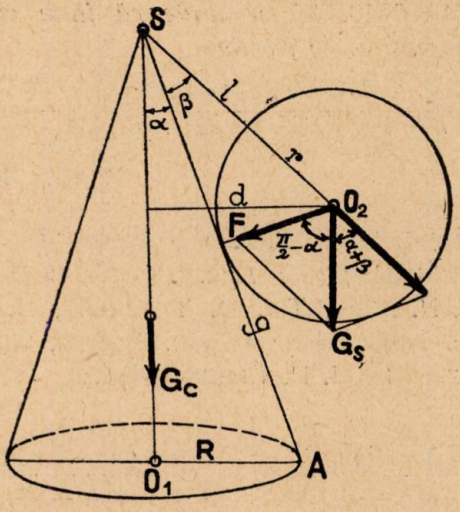
d fiind distanţa punctului O_2 de înălţimea SO_1.

Avem:

$$d = l \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{g}(R\sqrt{l^2 - r^2} + r\sqrt{g^2 - R^2})$$

condiţia ca sfera să nu răstoarne conul este deci:

$$gR^3\sqrt{g^2 - R^2} \geqslant 4r^3(R\sqrt{l^2 - r^2} + r\sqrt{g^2 - R^2} - gR)$$



T fiind tensiunea în fir, iar F reacţiunea dintre sferă şi con, rezultă imediat:

$$\frac{T}{\cos\alpha} = \frac{G_s}{\cos\beta} = \frac{F}{\sin(\alpha + \beta}$$

de unde:

$$T = G_s \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

$$F = G_s \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta}.$$

Prin înlocuiri obţinem definitiv:

$$T = \frac{4\pi r^3 l\rho}{3g}\sqrt{\frac{g^2-R^2}{l^2-r^2}}$$

$$F = \frac{4\pi r^3\rho\left(R\sqrt{l^2-r^2}+r\sqrt{g^2-R^2}\right)}{3g\sqrt{l^2-r^2}}.$$

O soluţie de asemenea foarte bună s'a primit dela D-l OCTAV C. V. GHEORGHIU (clasa VII-a Liceul Internat, Iaşi).

AL. ST.

PROBLEMA 5648. *Să se arate că între elementele unui triunghiu oarecare, are loc relaţia*

$$\sum \frac{(a^2+b^2)\,\mathrm{tg}\,(A-B)\,\mathrm{tg}C}{(a^2-b^2)\,[1+\sec(A-B)\sec C]} = 3.$$

EUGEN WEGENER.

Soluţie dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU (bacalaureat, Iaşi); PETRE F. IONESCU (Craiova); ADR. I. POPESCU (Timişoara); GH. ARDELEANU, N. N. POPA, TIB. D. TURCULEŢ, D. GH. VASILIU, N. GANEA (Lic. militar Iaşi); G. GH. DONŢU, AD. I. POPESCU, LT. M. GRUMĂZESCU şi I. N. GLIGOR (Arad).

Avem

$$\frac{\mathrm{tg}\,(A-B)\,\mathrm{tg}C}{1+\sec(A-B)\sec C} = \frac{\sin(A-B)\sin C}{1+\cos(A-B)\cos C}$$

$$= \frac{\sin(A-B)\sin(A+B)}{1-\cos(A-B)\cos(A+B)} = \frac{\sin^2A\cos^2B-\sin^2B\cos^2A}{1-\cos^2A\cos^2B+\sin^2A\sin^2B}$$

$$= \frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin^2A+\sin^2B} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Deci

$$\frac{(a^2+b^2)\,\mathrm{tg}\,(A-B)\,\mathrm{tg}C}{(a^2-b^2)\,[1+\sec(A-B)\sec C]} = 1$$

$$\therefore \quad \sum \frac{(a^2+b^2)\,\mathrm{tg}\,(A-B)\,\mathrm{tg}C}{(a^2+b^2)\,[1+\sec(A-B)\sec C]} = 3.$$

Alte bune soluţii au trimes D-nii: Cpt. Eug. St. Iacob, C. C. Iliescu (Colegiul Predeal), Marin Gh. Popescu (Piteşti), S-lt. C. Pantelimon, I. I. Buzincu şi Cl. Seni.

G-l G. I. Lit.

PROBLEMA 5679. *Care sunt numerele de două cifre la care se poate avea rădăcina pătrată cu aproximaţia de* 0,1 *scriind o virgulă între acele cifre?*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-l C. D. Eftimie (Elev-inginer, Bucureşti) şi Mircea C. Manolache (Bacalaureat).

Trebuie ca patratul şi rădăcina lui să înceapă cu aceeaşi cifră. Insă numerele începând cu 1, 2, ... 7 nu au rădăcini începând cu aceste cifre; numai $\sqrt{80} = 8{,}9$ care însă nu corespunde enunţului. Cum $\sqrt{81} = 9$, reiese că numărul trebuie că înceapă cu 9. Se găseşte $\sqrt{98} = 9{,}8$ şi $\sqrt{99} = 9{,}9$.

Soluţie dată de D-nii: C. D. Eftimie (Elev-inginer, Bucureşti), D. G. Vasiliu, D. Nache şi M. Bârzescu (Elevi Liceul militar, Iaşi).

Fie n numărul căutat; trebuie să avem:

$$n/10 < \sqrt{n} < (n+1)/10.$$

Ridicând la patrat, găsim:

$$n^2 < 100n \quad \therefore \quad n < 100 \quad \text{şi} \quad n^2 - 98n + 1 > 0$$

$$\therefore \quad 49 + \sqrt{2400} < n < 100,$$

de unde reiese că n nu poate fi decât 98 şi 99.

Observaţii. D-l C. D. Eftimie a dat şi soluţia formală:

$$\sqrt{00} = 0{,}0.$$

D-nii D. Nache şi D. G. Vasiliu observă că condiţia pusă în enunţ ca numărul să fie de două cifre nu este necesară, căci $n < 100$, iar pentru numerele de o cifră problema nu are sens.

D-l General Gh. Buicliu semnalează următoarele în legătură cu această problemă:

Problema 1492, rezolvată în Vol. XVII, pag. 61 cerea numerele ab aşa ca $\sqrt{ab}$ să fie numărul zecimal b, a. Soluţiile sunt

$$10^{2n}-2 \quad , \quad 10^{2n}-1 \quad , \quad 10^{2n} \quad \text{şi} \quad 10^{2n}+1 .$$

Problema 1766, rezolvată în Vol. XXVIII, pag. 213 cerea ca $\sqrt{ab}$ să fie numărul zecimal a_1, b_1 unde a_1 şi b_1 se obţin din a şi b sporindu-le cifrele cu 1. Soluţiile sunt date de numerele definite de neegalităţile:

$$3888\ldots8_{2n-1} + 10^n \sqrt{1388\ldots88_{2n-2}} < ab < 3888\ldots88_{2n-3}90$$

$$+ 10^n \sqrt{1388\ldots8_{2n-4}90} .$$

Problema 2919 din Vol. XXVIII, pag. 71 cerea ca $\sqrt{ab}$ să fie b, a unde a şi b sunt de o cifră. Soluţiile sunt $7{,}5 < 57 < 7{,}6$ şi $9{,}8 < 99 < 9{,}9$.

Problema 2950 din Vol. XXX, pag. 222 cerea ca $\sqrt{ab}$ să fie $\sqrt{a_2 b_2}$, unde a_2 şi b_2 se obţin din a şi b sporindu-le cifrele cu 2. S'a găsit

$$27_{2n-2}9 - 10^n \sqrt{27_{2n-3}9} < ab < 27_{2n-1} - 10^n \sqrt{27_{2n-2}}$$

$$27_{2n-1} + 10^n \sqrt{27_{2n-2}} < ab < 27_{2n-2}9 + 10^n \sqrt{27_{2n-3}9} .$$

Problema 3452 din Vol. XXXIII, pag. 395 cerea numerele $\sqrt{ab}$ care sunt dublul sau triplul lui a, b. S'au găsit:

$$ab = 2500\ldots0_{2n-1} \quad \text{şi} \quad b = 00\ldots0_n ,$$

$$ab = 2499\ldots9_{2n-1} \quad \text{şi} \quad b = 99\ldots9_n ,$$

$$ab = 111\ldots1_n \quad \text{şi} \quad b = 11\ldots1_n ,$$

$$ab = 25 \quad \text{cu} \quad a = 2 \ , \ b = 5$$

$$ab = 24 \quad \text{cu} \quad a = 2 \ , \ b = 4.$$

Toate aceste 5 probleme au fost propuse de D-l General Gh. Buicliu.

EXERCIŢII

5. Suma termenilor unui şir de numere ce se formează plecând dela un număr dat, *prin adunarea la acel număr a sumei cifrelor sale*, este divizibilă cu 9, dacă *numărul termenilor acestui şir este divizibil cu 6.*

P. P. Drăghicescu.

R. Fie şirul $a_1, a_2, \ldots a_n$, format în condiţiile enunţului. Avem în general $a_1 = \text{mult. } 9 + k$, astfel încât:

$$a_2 = \text{mult. } 9 + 2k \;\; ; \;\; a_3 = \text{mult. } 9 + 4k \;\; ; \;\; a_4 = \text{mult. } 9 + 8k$$

$$a_5 = \text{mult. } 9 + 7k \;\; ; \;\; a_6 = \text{mult. } 9 + 5k \;\; ; \;\; a_7 = \text{mult. } 9 + k, \text{ etc.}$$

Se observă că

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \text{mult. } 9 + 27k = \text{mult. } 9,$$

iar dela a_7 resturile se repetă, aşa încât dacă se ia ca număr de termeni un multiplu de *6*, suma lor e divizibilă cu 9.

Obs. Când $k = \text{mult. } 9$ fiecare termen e mult. 9, iar când $k = \text{mult. } 3$ un număr cu soţ de termeni ai şirului e mult. 9.

6. In planul unui triunghiu există o infinitate de puncte izogonale, egal depărtate de un punct dat.

P. P. DRĂGHICESCU.

R. Din punctul dat, ca centru şi cu o rază arbitrară descriu un cerc care taie laturile triunghiului în şase puncte care formează două triunghiuri înscrise în triunghiul de referinţă. Punctele pivot ale acestor triunghiuri sunt două puncte izogonale, egal depărtatate de punctul dat. (T. LALESCU. La géométrie du triangle — 11.2 şi 11.3).

7. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{\cos x}{\sin 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2^2 x} + \frac{\cos 2^2 x}{\sin 2^3 x} + \ldots + \frac{\cos 2^n x}{\sin 2^{n+1} x} = \frac{\sin (2^{n+1} - 1)\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \sin 2^n x}.$$

MARCEL D. COTARIU.

R. Avem în general

$$\frac{\cos 2^p x}{\sin 2^{p+1} x} = \frac{1}{2 \sin 2^p x} = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} 2^{p-1} x - \operatorname{ctg} 2^p x).$$

Făcând pe rând pe p egal cu 0, 1, 2, etc.... se obţin o serie de relaţii, care adunate şi făcându-se reducerile din partea 2-a, ne dau

$$\frac{\cos x}{\sin 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2^2 x} + \ldots + \frac{\cos 2^n x}{\sin 2^{n+1} x} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} 2^n x\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin \left(2^n - \frac{1}{2}\right) x}{\sin \frac{x}{2} \sin 2^n x} = \frac{\sin (2^{n+1} - 1)\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \sin 2^n x}.$$

PROBLEME PROPUSE

5580[1]). Fie a, b, c, d patru laturi consecutive ale unui patrulater inscriptibil şi p, q diagonalele lui. Intre aceste şase lungimi există relaţiile

$$ac + bd = pq \qquad \text{şi} \qquad \frac{ab + cd}{ad + bc} = \frac{p}{q}.$$

Sunt suficiente aceste două relaţii pentru ca a, b, c, d, p, q să aparţină unui patrulater inscriptibil?

I. IONESCU.

5715. Din un patrat ABCD cu latura a se taie patratul AB'C'D', având unghiul A comun cu primul şi latura a'. Intr'o carte de mecanică aplicată am găsit că centrul de greutate al colţarului rămas este la $(0{,}61a - 0{,}36a')$ dela latura primului patrat. Ce aproximaţie dă această formulă?

I. IONESCU.

5716. Să se reconstruiască împărţirea

$$\frac{abc}{hij} : def = g$$

unde hij este restul împărţirii, iar $a, b, c, \ldots, i, j$ sunt cifre diferite între ele. Exemple: $\frac{940}{253} : 687 = 1$; $\frac{940}{287} : 653 = 1$; ...

V. THÉBAULT.

5717. Să se determine cifrele a, b, c ştiind că există trei numere legate prin relaţia:

$$abbbb \times b = ccccb.$$

Fie $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$; $a = \alpha$, $b = \delta$, $c = \varepsilon$ două sisteme de soluţii pentru a, b, c. Intrebuinţând numai valorile acestor două sisteme de soluţii, să se găsească un patrat perfect de zece cifre de forma: $xyzxvtzxyx$.

G. DONŢU.

1) Se publică din nou această problemă de oarece în enunţul publicat la pag. 119, Vol. XLVII s'a strecurat o eroare de imprimare la relaţia a doua.

5718. Dacă $I_{AN}(N)$ reprezintă numărul numerelor prime cu N din şirul natural al numerelor până la A . N şi dacă $S_{AN}(N)$ reprezintă suma acelor numere, atunci avem:

$$S_{AN}(N) = \frac{1}{2} A \,.\, N \,.\, I_{AN}(N).$$

COMANDOR I. LINTEŞ.

5719. Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei

$$x^4 + 2x^3 - 2mx^2 - 18mx - 27m + m^2 = 0,$$

în care m este un parametru variabil.

G. CĂLUGĂREANU.

5720. Intr'un triunghiu $A_1A_2A_3$ se duc bisectoarele Δ_i^+, Δ_i^- $(i = 1, 2, 3)$ ale unghiurilor formate de fiecare latură cu înălţimea corespunzătoare.

Să se arate că cele opt cercuri circumscrise triunghiurilor $\Delta_1^{\varepsilon_1}\Delta_2^{\varepsilon_2}\Delta_3^{\varepsilon_3}$ $(\varepsilon_i = \pm)$ sunt egale între ele.

D. BARBILIAN.

5721. Se consideră un triunghiu ABC dreptunghic în A. Fie A' proiecţia lui A pe ipotenuza BC; D proiecţia lui A' pe tangenta în A la cercul ABC şi E mijlocul înălţimii $\overline{AA'}$.

Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului ADE este tangent cercurilor cu centrele în B şi C şi de raze respectiv $\overline{BA'}$ şi $\overline{CA'}$.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5722. Să se găsească locul vârfului B al unui triunghiu ABC, dreptunghic în A, ştiind că vârful C şi piciorul bisectoarei BB' sunt fixe.

G-L GH. BUICLIU.

5723. Se consideră un triunghiu ABC, în care vârful A este fix, unghiul BAC este constant, iar baza $\overline{BC}$ aşezată pe o dreaptă fixă. Fie B_1, C_1; B_2, C_2; B_2', C_2'; B_3, C_3; B_3', C_3' respectiv picioarele înălţimilor, bisectoarelor şi simedianelor duse din vârfuriie B, C pe laturile opuse.

Să se afle locurile geometrice ale acestor zece puncte, când unghiul BAC se roteşte în jurul vârfului său.

VIRGIL GHIŢESCU.

5724. Un triunghiu ABC se roteşte în jurul tangentelor în vârfuri la cercul circumscris. Să se arate:

1°. Dacă volumele corpurilor înnăscute sunt în progresie aritmetică, atunci cotgA, cotgB, cotgC sunt în progresie aritmetică.

2°. Dacă suprafeţele corpurilor înnăscute sunt în progresie aritmetică, atunci cosA, cosB, cosC sunt în progresie aritmetică.

D. GH. VASILIU.

5725. Fie un triunghiu oarecare ABC de laturi a, b, c.

Dealungul laturilor lucrează, în sensul ABC, trei forţe F_a, F_b, F_c de rezultantă F şi trei forţe P_a, P_b, P_c de rezultantă P.

Să se arate că, în cazul când rezultantele sunt paralele, avem:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ F_a & F_b & F_c \\ P_a & P_b & P_c \end{vmatrix} = 0.$$

GABRIELA ŢIŢEICA.

5726. Un patrat omogen, greu, din care s'a scos un disc circular de rază r, având centrul P aşezat pe una din diagonale OA, poate oscila fără frecare în jurul unei axe orizontale, perpendiculară pe planul pătratului în vârful său O. Să se determine poziţia punctului P şi valoarea lui r aşa fel ca lungimea pendulului simplu sincron să fie egală cu lungimea pendulului simplu sincron al patratului întreg oscilând în jurul aceleaşi axe. Discuţie.

V. VÂLCOVICI.

ERATĂ. 1°. Prima problemă rezolvată la pag. 85 din numărul trecut are numărul 5347, iar nu 5437. A se vedea nota din josul pag. 445, Vol. XLVI şi din josul pag. 606, Vol. XLVII.

2°. La exerciţiul 4 dela pag. 92 numărul precedent se va adăoga în enunţ: *N fiind proiecţia lui M pe AA'* iar în coordonatele lui M' se va înlocui $-\sin\varphi$ prin $-R\sin\varphi$.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andreescu M. (5644, 49); *Andrei Gh. A.* (5684); *Bârzescu M.* (5447, 703); *Buzincu I. I.* (5637, 48, 59); *Căruntu Fl.* (5694); *Ciumaşu Viorel* (5704); *Columbeanu D. P.* (5670); *Corbanu A. Dan* (5694); *Cubat H. A.* (5566, 95, 610, 74, 94, 98, 703, E); *Danifeld P.* (5660, 703); *Donţu Gh. G.* (5581, 88, 660, 94, 703, 04); *Drăghicescu P. P.* (5564); *Dumitrescu Dan* (5704, 06, 07); *Ganea N.* (5644); *Gaiu N.* (N); *Gheorghiu C. Oct.* (5276, 644, 85, 86); *Iacob E.* (5703, E); *Ifrim A.* (5632); *Manolache E. M.* (5587, 646, E); *Mihăilescu Şt.* (5694); *Musceleanu D.* (5487); *Nache D.* (5703); *Necula C. I.* (5649); *Oprea D. Gh.* (5657, 98); *Pantelimon C.* (5431, 55, 646); *Pârvan I.* (5649); *Popescu I. Ad.* (P); *Popescu I. Gh.* G-l (P); *Puchiu T. G.* (1594); *Seni Cl.* (5571, 648, 79, 94, 98, 706, R); *Staicu C.* (5395, 577, 694, E, N); *Ţapu N. V.* (5395); *Tudoran Lidia* (5649); *Vasiliu Gh. D.* (5366, 95, 500, 66, 95, 614, 49, 84, 703, 04, E, N); *Wegener N. E.* (5660, 79, 703, 05, E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 200

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I -- VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 83.540.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1942

BIBLIOTECA CENTRALĂ ACADEMIA SIBIU

SUMARUL

1. Generalizarea unor identităţi ale lui Euler şi a D-lui Prof. A. G. Ioachimescu (urmare şi sfârşit) . . . . . *N. V. Ghircoiaşiu.*
2. Câteva aplicaţiuni ale coordonatelor isotrope . . . . . *Şerban Gheorghiu.*
3. Note matematice: 16 — 21.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 318.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 3600, 4730, 4959, 4982, 5116, 5304, 5468, 5614, 5628, 5629, 5660.
9. Exerciţii: 8 — 9.
10. Probleme propuse: 5056, 5575, 5727 — 5738.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37. 38.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GENERALIZAREA UNOR IDENTITĂȚI ALE LUI EULER ȘI A D-LUI PROF. A. G. IOACHIMESCU

(Urmare dela pag. 104)

2. In cele precedente am presupus literele $a, b, \ldots, 1$ distincte. Putem da o altă generalizare identităților lui EULER și a D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU, pentru cazul când nu mai avem această restricție. In acest scop să descompunem în elemente simple fracția rațională

$$F = \frac{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}}{x^{n-1+p}} \; ; \; \alpha+\beta+\ldots+\lambda = n$$

numărul literelor distincte $a, b, \ldots, 1$ fiind m.

Pentru a găsi partea întreagă, observăm că avem desvoltările

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\alpha}} = 1 + \Gamma_{\alpha}^{1}\frac{a}{x} + \Gamma_{\alpha}^{2}\frac{a^2}{x^2} + \ldots + \Gamma_{\alpha}^{q}\frac{a^q}{x^q} + \ldots$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{b}{x}\right)^{\beta}} = 1 + \Gamma_{\beta}^{1}\frac{b}{x} + \Gamma_{\beta}^{2}\frac{b^2}{x^2} + \ldots + \Gamma_{\beta}^{q}\frac{b^q}{x^q} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{l}{x}\right)^{\lambda}} = 1 + \Gamma_{\lambda}^{1}\frac{l}{x} + \Gamma_{\lambda}^{2}\frac{l^2}{x^2} + \ldots + \Gamma_{\lambda}^{q}\frac{l^q}{x^q} + \ldots$$

Γ_{l}^{q} fiind numărul combinărilor cu repetiție a i obiecte luate câte q și cu presupunerea $|x|$ mai mare decât fiecare din modulele numerelor $a, b, \ldots, 1$, care nu restrânge rezultatele ce se vor obține.

Inmulțind desvoltările de mai sus, avem

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{b}{x}\right)^{\beta}\cdots\left(1-\frac{l}{x}\right)^{\lambda}} =$$

$$= 1 + \mathfrak{S}_1\frac{1}{x} + \mathfrak{S}_2\frac{1}{x^2} + \ldots + \mathfrak{S}_q\frac{1}{x^q} + \ldots$$

unde $$\mathfrak{S}_1 = \Gamma_{\alpha}^{1}a + \Gamma_{\beta}^{1}b + \ldots + \Gamma_{\lambda}^{1}l$$

$$\mathfrak{S}_2 = \Gamma_{\alpha}^{2}a^2 + \Gamma_{\beta}^{2}b^2 + \ldots + \Gamma_{\lambda}^{2}l^2 + \Gamma_{\alpha}^{1}\Gamma_{\beta}^{1}ab + \ldots + \Gamma_{k}^{1}\Gamma_{\lambda}^{1}kl$$

şi în general $\mathfrak{S}_q$ este un polinom omogen complect de gradul q a literelor $a, b, \ldots, 1$, termenii lui fiind daţi de formula

$$\Gamma_\alpha^{i_1}\Gamma_\beta^{i_2}\ldots\Gamma_\lambda^{i_m}a^{i_1}b^{i_2}\ldots l^{i_m} \qquad i_1+i_2+\ldots+i_m=q$$

cu convenţia $\Gamma_\alpha^0=\Gamma_\beta^0=\ldots=\Gamma_\lambda^0=1$ şi $\mathfrak{S}_0=1$.

Ţinând seamă de acestea avem

$$F=\frac{x^{p-1}}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^\alpha\left(1-\frac{b}{x}\right)^\beta\cdots\left(1-\frac{l}{x}\right)^\lambda}=$$

$$=x^{p-1}\left(1+\frac{\mathfrak{S}_1}{x}+\frac{\mathfrak{S}_2}{x^2}+\ldots+\frac{\mathfrak{S}_q}{x^q}+\ldots\right)$$

deci partea întreagă din descompunere este

$$x^{p-1}+\mathfrak{S}_1x^{p-2}+\mathfrak{S}_2x^{p-3}+\ldots+\mathfrak{S}_{p-1}.$$

Pentru a găsi partea fracţionară din descompunere relativă a factorul $x-a$ facem $x=a+h$ şi avem

$$F=\frac{(a+h)^{n-1+p}}{h^\alpha(a+h-b)^\beta\ldots(a+h-l)^\lambda}=$$

$$=\frac{(a+h)^{n-1+p}}{h^\alpha(a-b)^\beta(a-c)^\gamma\ldots(a-l)^\lambda\left(1-\frac{h}{b-a}\right)^\beta\cdots\left(1-\frac{h}{l-a}\right)^\lambda}.$$

Insă, analog ca mai sus,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{h}{b-a}\right)^\beta\cdots\left(1-\frac{h}{l-a}\right)^\lambda}=1+\mathfrak{S}_1^a h+\mathfrak{S}_2^a h^2+\ldots+\mathfrak{S}_q^a h^q+\ldots$$

unde

$$\mathfrak{S}_1^a=\frac{\Gamma_\beta^1}{b-a}+\frac{\Gamma_\gamma^1}{c-a}+\ldots+\frac{\Gamma_\lambda^1}{l-a}$$

$$\mathfrak{S}_2^a=\frac{\Gamma_\beta^2}{(b-a)^2}+\frac{\Gamma_\gamma^2}{(c-a)^2}+\ldots+\frac{\Gamma_\lambda^2}{(l-a)^2}+$$

$$+\frac{\Gamma_\beta^1\Gamma_\gamma^1}{(b-a)(c-a)}+\ldots+\frac{\Gamma_\varkappa^1\Gamma_\lambda^1}{(k-a)(l-a)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

în general $\mathfrak{S}_q^a$ este un polinom complect, de gradul q, a celor $m-1$ cantităţi

$$\frac{1}{b-a}\ ,\ \frac{1}{c-a}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{l-a}$$

termenii lui fiind dați de formula

$$\Gamma_\beta^{i_1}\Gamma_\gamma^{i_2}\dots\Gamma_\lambda^{i_{m-1}}\frac{1}{(b-a)^{i_1}(c-a)^{i_2}\dots(l-a)^{i_{m-1}}},\quad i_1+i_2+\dots+i_{m-1}=q$$

cu convenția $\mathfrak{S}_\delta^i=1$.

Ținând seama de aceasta, fracția noastră devine

$$F=\frac{(a^{n-1+p}+C_{n-1+p}^1 a^{n-2+p}h+C_{n-1+p}^2 a^{n-3+p}h^2+\dots)(1+\mathfrak{S}_1^a h+\mathfrak{S}_2^a h^2+\dots)}{h^\alpha(a-b)^\beta(a-c)^\gamma\dots(a-l)^\lambda}$$

care ordonată după puterile crescătoare a lui h, și revenind la variabila x ne dă

$$\frac{a^{n-1+p}}{(a-b)^\beta(a-c)^\gamma\dots(a-l)^\lambda}\frac{1}{(x-a)^\alpha}+$$

$$+\frac{C_{n-1+p}^1 a^{n-2+p}+\mathfrak{S}_1^a a^{n-1+p}}{a-b)^\beta(a-c)^\gamma\dots(a-l)^\lambda}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+$$

$$+\frac{C_{n-1+p}^{\alpha-1}a^{n-\alpha+p}C_{n-1+p}^{\alpha-2}a^{n-\alpha+1+p}\mathfrak{S}_1^a+\dots+a^{n-1+p}\mathfrak{S}_{\alpha-1}^a}{(a-b)^\beta(a-c)^\gamma\dots(a-l)^\lambda}\frac{1}{x-a}$$

care este partea fracționară corespunzătoare factorului $(x-a)^\alpha$.

In mod analog obținem părțile fracționare relative la factorii $(x-b)^\beta,\dots,(x-l)^\lambda$ așa că descompunerea căutată este

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{x^{n-1+p}}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x-l)^\lambda}=x^{p-1}\mathfrak{S}_1x^{p-2}+\mathfrak{S}_2x^{p-3}+\dots+\mathfrak{S}_{p-1}+\\&+\frac{a^{n-1+p}}{(a-b)^\beta(a-c)^\gamma\dots(a-l)^\lambda}\frac{1}{(x-a)^\alpha}+\\&+\frac{C_{n-1+p}^1a^{n-2+p}+\mathfrak{S}_1^a a^{n-1+p}}{(a-b)^\beta\dots(a-c)^\gamma(a-l)^\lambda}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\\&+\frac{C_{n-1+p}^{\alpha-1}a^{n-\alpha+p}+C_{n-1+p}^{\alpha-2}a^{n-\alpha+1+p}\mathfrak{S}_1^a+\dots+a^{n-1+p}\mathfrak{S}_{\alpha-1}^a}{(a-b)^\beta(a-c)^\gamma\dots(a-l)^\lambda}\frac{1}{(x-a)}+\\&\dots+\frac{l^{n-1+p}}{(l-a)^\alpha(l-b)^\beta\dots(l-k)^\varkappa}\frac{1}{(x-l)^\lambda}+\\&+\frac{C_{n-1+p}^1l^{n-2+p}+\mathfrak{S}_1^l l^{n-1+p}}{(l-a)^\alpha(l-b)^\beta\dots(l-k)^\varkappa}\frac{1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\dots+\\&+\frac{C_{n-1+p}^{\lambda-1}l^{n-\lambda+p}+C_{n-1+p}^{\lambda-2}l^{n-\lambda+1+p}\mathfrak{S}_1^l+\dots+l^{n-1+p}\mathfrak{S}_{\lambda-1}^l}{(l-a)^\alpha(l-b)^\beta\dots(l-k)^\varkappa}\frac{1}{x-l}.\end{aligned}\right.$$

Inmulţind ambii membri cu produsul $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}$ şi procedând absolut analog ca în prima parte a lucrării, am obţine identităţi mai generale decât (5). Ne interesează însă generalizarea identităţilor lui EULER şi a D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU. Pentru aceasta observăm că scriind descompunerea (1) pentru n litere distincte şi comparând-o cu (8), deducem că polinoamele S_p se transformă în polinoamele $\mathfrak{S}_{p,}$ când α litere devin egale cu a, β litere egale cu $b,\ldots,\lambda$ litere egale cu l, deci membrul al doilea al identităţilor căutate este $\mathfrak{S}_p$. Pentru a găsi ce devine în acest caz, membrul întâi a identităţilor D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU, înmulţim ambii membri din (8) cu $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}$ şi identificăm coeficienţii lui x^{n-1}, păstrând numai partea fracţionară. Găsim astfel

$$(9)\quad \begin{cases} C_{n-1+p}^{\alpha-1}\, a^{n-\alpha+p} + C_{n-1+p}^{\alpha-2}\, a^{n-\alpha+1+p}\, \mathfrak{S}_1^a + \ldots + a^{n-1+p}\, \mathfrak{S}_{\alpha-1}^a + \ldots + \\ + \dfrac{C_{n-1+p}^{\lambda-1}\, l^{n-\lambda+p} + C_{n-1+p}^{\lambda-2}\, l^{n-\lambda+1+p}\, \mathfrak{S}_1^l + \ldots + l^{n-1+p}\, \mathfrak{S}_{\lambda-1}^l}{(l-a)^{\alpha}(l-b)^{\beta}\ldots(l-k)^{\varkappa}} = \mathfrak{S}_p \end{cases}$$

care constituiesc generalizarea căutată, deoarece făcând

$$\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 1$$

obţinem identităţile lui EULER, sau a D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU, după cum p are valorile $-1, -2, \ldots, -(m-1)$ sau $0, 1, 2, \ldots$.

3. Identităţile (9) ne permit să calculăm o clasă de determinanţi, obţinuţi din determinanţi CAUCHY.

In adevăr pentru stabilirea identităţilor D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU, D-l Prof. TH. ANGHELUŢĂ [1]) a utilizat determinanţii VANDERMONDE stabilind relaţia

$$(10)\quad \frac{1}{V_m}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ a & b & \ldots l \\ a^2 & b^2 & \ldots l^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{m-2} & b^{m-2} & \ldots l^{m-2} \\ a^{m-1+p} & b^{m-1+p} & \ldots l^{m-1+p} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a^{m-1+p}}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} + \ldots + \frac{l^{m-1+p}}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)}$$

1) TH. ANGHELUŢĂ, *Gazeta Matematică*. Vol. XLV, pag. 459, 505.

unde V_m este determinantul VANDERMONDE a celor m litere $a, b, \ldots, l$, iar determinantul scris desvoltat se obține din V_m înlocuind ultima linie prin $a^{m-1+p}, b^{m-1+p}, \ldots, l^{m-1+p}$.

D-l Prof. TH. ANGHELUȚĂ arată apoi că primul membru al relației de mai sus este un polinom omogen S_p de gradul p a celor m litere $a, b, \ldots, 1$ cu coeficienții unitari, stabilind astfel identitățile căutate.

In cazul când am avea n litere distincte și am face ca α din ele să fie egale cu a, β cu $b, \ldots,$ λ cu l membrul 2 din (10) devine membrul întâi din (9), iar V_n se transformă în determinantul CAUCHY:

$$C_n = \begin{vmatrix} 1 & D\,1 & \ldots & D^{\alpha}\,1 & 1 & \ldots & D^{\beta}\,1 & \ldots & D^{\lambda}\,1 \\ a & D\,a & \ldots & D^{\alpha}\,a & b & \ldots & D^{\beta}\,b & \ldots & D^{\lambda}\,l \\ a^2 & D\,a^2 & \ldots & D^{\alpha}\,a^2 & b^2 & \ldots & D^{\beta}\,b^2 & \ldots & D^{\lambda}\,l^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{m-2} & D\,a^{m-2} & \ldots & D^{\alpha}\,a^{m-2} & b^{m-2} & \ldots & D^{\beta}\,b^{m-2} & \ldots & D^{\lambda}\,l^{m-2} \\ a^{m-1} & D\,a^{m-1} & \ldots & D^{\alpha}\,a^{m-1} & b^{m-1} & \ldots & D^{\beta}\,b^{m-1} & \ldots & D^{\lambda}\,l^{m-1} \end{vmatrix}$$

unde

$$D^q\,x^i = i\,(i-1)\ldots(i-q+1)\,x^{i-q}$$

pentru x egal cu $a, b, \ldots, 1$.

Valoarea lui C_n este

$$C_n = A_{\alpha}\,B_{\beta}\ldots L_{\lambda}\,(b-a)^{\alpha\beta}(c-a)^{\alpha\gamma}\ldots(l-a)^{\alpha\lambda}\ldots(l-k)^{\varkappa\lambda}$$

unde

$$A_{\alpha} = 1!\,2!\ldots(\alpha-1)!\;;\; B^{\beta} = 1!\,2!\ldots(\beta-1)!\;;\ldots;$$

$$L_{\lambda} = 1!\,2!\ldots(\lambda-1)!.$$

Determinantului desvoltat din (10) îi va corespunde tot un determinant CAUCHY în care ultima linie a fost înlocuită cu

$$a^{m-1+p},\ D\,a^{m-1+p},\ \ldots,\ D^{\alpha}\,a^{m-1+p},\ \ldots,\ D^{\lambda}\,l^{m-1+p}$$

$$\mathfrak{C}_n = \begin{vmatrix} 1 & D\,1 & \ldots & D^{\alpha}\,1 & \ldots & D^{\lambda}\,1 \\ a & D\,a & \ldots & D^{\alpha}\,a & \ldots & D^{\lambda}\,l \\ a^2 & D\,a^2 & \ldots & D^{\alpha}\,a^2 & \ldots & D^{\lambda}\,l^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{m-2} & D\,a^{m-2} & \ldots & D^{\alpha}\,a^{m-2} & \ldots & D^{\lambda}\,l^{m-2} \\ a^{m-1+p} & D\,a^{m-1+p} & \ldots & D^{\alpha}\,a^{m-1+p} & \ldots & D^{\lambda}\,l^{m-1+p} \end{vmatrix}.$$

Bine înţeles că pentru obţinerea determinanţilor CAUCHY din determinanţii VANDERMONDE corespunzători s'a ţinut seamă de faptul că atunci când facem în V de exemplu $b \to a$, $V \to 0$, deci în prealabil trebuie să împărţim cu $b - a$ şi apoi cu ajutorul regulii lui L'HÔSPITAL să ridicăm nedeterminarea.

Ţinând seamă de (9) avem deci relaţia

$$(11) \qquad \mathfrak{C}_n = C_n \, S_p$$

care ne permite să calculăm determinantul C_n, greu de aflat direct.

NICOLAE V. GHIRCOIAŞIU.

CÂTEVA APLICAŢIUNI ALE COORDONATELOR ISOTROPE

In cele ce urmează îmi propun a expune câteva propoziţiuni — dealtminteri bine cunoscute — în legătură cu triunghiurile înscrise într'o conică fixă şi circumscrise unei a doua conice de asemeni, fixă. Pentru aceasta utilizez coordonatele isotrope, sau coordonatele lui DARBOUX [1]) Propoziţiunile ce urmăresc se deduc cu uşurinţă din ecuaţiunea, ce admite ca rădăcini abscisele isotrope ale vârfurilor triunghiurilor, în chestiune.

1. Se consideră un sistem Ox, Oy de coordonate rectangulare. $M(x, y)$ fiind un punct arbitrar, numim coordonate isotrope cantităţile:

$$X = x + iy = pe^{i\theta}$$
$$Y = x - iy = pe^{-i\theta}.$$

In acest nou sistem de coordonate distanţa dintre punctele $M_1(X_1, Y_1)$ şi $M_2(X_2, Y_2)$ devine:

$$\overline{M_1M_2}^2 = (X_1 - X_2)\,(Y_1 - Y_2).$$

In particular, distanţa dela origine la punctul $M(X, Y)$ este:

$$\overline{OM}^2 = X \,.\, Y.$$

---

1) Pentru cine doreşte a se familiariza cu aceste coordonate îi recomand: A. HAARBLEICHER. De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées (Paris, 1931) şi G. DARBOUX. Principes de Géométrie Analytique (Paris, 1917).

De asemeni, condiţiunea ca dreptele:

$$u_1X + v_1Y + 1 = 0$$

$$u_2X + v_2Y + 1 = 0$$

să fie perpendiculare, devine în coordonate isotrope, următoarea:

$$\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} = 0,$$

ceea ce exprimă că paralelele duse dintr'un punct oarecare, la dreptele considerate formează împreună cu isotropele punctului un fascicol armonic.

In sfârşit, $A\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$ şi $B\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$ fiind două puncte pe cercul (O) cu centrul în origine şi având raza egală cu unitatea, ecuaţiunea dreptei AB este:

$$X + \alpha\beta Y = \alpha + \beta. \qquad (1)$$

2. Se consideră două triunghiuri (T_1) şi (T_2) înscrise în cercul (O). Se ştie că există o conică (Γ) înscrisă în cele două triunghiuri. Imi propun, mai întâi, să formez ecuaţiunea tangenţială a acestei conice şi prin aceasta — însăşi — să demonstrez existenţa ei.

Fie:

$$A_1\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_1}\right),\ B_1\left(\beta_1, \frac{1}{\beta_1}\right),\ C_1\left(\gamma_1, \frac{1}{\gamma_1}\right) \quad (T_1)$$

$$A_2\left(\alpha_2, \frac{1}{\alpha_2}\right),\ B_2\left(\beta_2, \frac{1}{\beta_2}\right),\ C_2\left(\gamma_2, \frac{1}{\gamma_2}\right) \quad (T_2)$$

coordonatele vârfurilor celor două triunghiuri.

Fie, de asemeni:

$$a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0$$

$$b_0 t^3 + b_1 t^2 + b_2 t + b_3 = 0$$

ecuaţiunile ale căror rădăcini sunt respectiv abscisele isotrope $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ şi $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ale vârfurilor triunghiurilor considerate

Ecuaţiunile laturilor triunghiurilor (T_1) şi (T_2) fiind de forma

$$X + uY = v$$

în care u şi v, au pentru fiecare latură valorile corespunzătoare indicate de (1), chestiunea revine la a determina o ecuaţiune de gradul al doilea:

$$F(u, v) = 0$$

care să fie verificată când se substitue lui u şi v următoarele valori:

$$(\beta_1\gamma_1, \beta_1+\gamma_1) \; ; \; (\gamma_1\alpha_1, \gamma_1+\alpha_1) \; ; \; (\alpha_1\beta_1, \alpha_1+\beta_1)$$
$$(\beta_2\gamma_2, \beta_2+\gamma_2) \; ; \; (\gamma_2\alpha_2, \gamma_2+\alpha_2) \; ; \; (\alpha_2\beta_2, \alpha_2+\beta_2).$$

Observ că sistemul linear, în l_1, l_2, l_3:

$$\begin{aligned} l_1 - (\beta_1+\gamma_1) l_2 + \beta_1\gamma_1 l_3 &= 0, \\ l_2 - (\beta_1+\gamma_1) l_3 + \beta_1\gamma_1 &= 0, \\ a_0 l_1 + a_1 l_2 + a_2 l_3 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

admite două sisteme distincte de soluţii, şi anume:

$$l_1 = \beta_1^3 \; , \; l_2 = \beta_1^2 \; , \; l_3 = \beta_1$$

şi

$$l_1 = \gamma_1^3 \; , \; l_2 = \gamma_1^2 \; , \; l_3 = \gamma_1 .$$

Rezultă de aci, că toţi determinanţii de ordinul al treilea, ce se pot forma cu elementele matricei:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -v & u & 0 \\ 0 & 1 & -v & u \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \right\|$$

prin suprimarea câte unei coloane, sunt nuli când înlocuim pe u şi v prin $\beta_1\gamma_1$ şi $\beta_1+\gamma_1$.

Acest rezultat poate fi — de altminteri — obţinut şi direct, fără intermediul sistemului linear, considerat.

Analog, se arată că aceiaşi determinanţi sunt nuli când înlocuim pe u şi v prin valorile: $\gamma_1\alpha_1$ şi $\gamma_1+\alpha_1$ sau $\alpha_1\beta_1$ şi $\alpha_1+\beta_1$.

Rezultă, în definitiv, că ecuaţiunea tangenţială a conicei (Γ) este:

$$F(u, v) \equiv \left\| \begin{matrix} 1 & -v & u & 0 \\ 0 & 1 & -v & u \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (\Gamma)$$

Această ecuațiune rămâne, evident, neschimbată dacă substituim coeficienților: a_i și b_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ respectiv coeficienții: $a_i + \lambda' b_i$ și $a_i + \lambda'' b_i$, λ' și λ'' fiind parametrii arbitrari.

Conchidem că:

Abscisele isotrope ale vârfurilor unui triunghiu (T), *înscris în cercul* (O) *și circumscris conicei* (Γ) *sunt rădăcinile unei ecuațiuni de forma:*

$$(a_0 + \lambda b_0) t^3 + (a_1 + \lambda b_1) t^2 + (a_2 + \lambda b_2) t + a_3 + \lambda b_3 = 0. \quad (2)$$

3. Ca aplicațiune, îmi propun să determin relațiunea dintre coeficienții a_i și b_i pentru ca conica (Γ) să fie o parabolă.

Pentru aceasta este necesar și suficient ca printre triunghiurile (T) să fie unul, pentru care două din vârfuri sunt punctele ciclice ale planului. Aceasta revine la a se putea determina λ astfel ca ecuațiunea (2) să aibă rădăcinile 0 și ∞ sau:

$$a_3 + \lambda b_3 = 0 \quad ; \quad a_0 + \lambda b_0 = 0$$

$$\therefore \qquad a_0 b_3 - a_3 b_0 = 0$$

Sau:

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \alpha_2 \beta_2 \gamma_2.$$

Or, punând:

$$\alpha_1 = e^{i\theta_1} \quad , \quad \beta_1 = e^{i\theta_2} \quad , \quad \gamma_1 = e^{i\theta_3}$$

$$\alpha_2 = e^{i\theta'_1} \quad , \quad \beta_2 = e^{i\theta'_2} \quad , \quad \gamma_2 = e^{i\theta'_3}$$

rezultă că avem:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta'_1 + \theta'_2 + \theta'_3$$

ceea ce exprimă o proprietate clasică a triunghiurilor S [1]).

In rezumat:

Condițiunea necesară și suficientă ca două triunghiuri înscrise în același cerc să fie circumscrise la aceeași parabolă este ca triunghiurile considerate să fie triunghiuri S. *Și reciproc.*

4. Se știe că două triunghiuri S cu un al treilea sunt triunghiuri S între ele. Această proprietate remarcabilă a triunghiurilor S are însă un caracter mult mai general și poate fi extinsă proiectiv la un grup *oricum* de trei triunghiuri înscrise în aceeași conică.

---

1) A se vedea G. Țițeica. Culegere de probleme de geometrie, V, 44 sau T. Lalescu. La géometrie du triangle, 2.16.

Astfel, *fiind date trei triunghiuri înscrise în aceeaşi conică, cele trei conice înscrise în câte două din aceste triunghiuri au o tangentă comună.*

In cazul particular, când cele trei triunghiuri sunt înscrise în acelaşi cerc şi sunt două câte două triunghiuri S, această tangentă comună este dreapta dela infinit a planului.

Consideraţiunile ce preced, permit a se determina cu uşurinţă aceeaşi tangentă comună şi în cazul general când cele trei triunghiuri sunt înscrise în acelaşi cerc. Considerăm pentru aceasta, pe lângă triunghiurile (T_1) şi (T_2) dela § 2, un al treilea triunghiu (T_3) înscris în cercul (O) şi fie:

$$c_0 t^3 + c_1 t^2 + c_2 t + c_3 = 0$$

ecuaţiunea ce admite ca rădăcini abscisele isotrope ale vârfurilor acestui din urmă triunghiu. Ecuaţiunile tangenţiale ale conicelor înscrise în câte două din triunghiurile (T_1), (T_2) şi (T_3) sunt:

$$F(u, v) = 0 \qquad (\Gamma)$$

$$F_1 \equiv \begin{vmatrix} 1 & -v & u & 0 \\ 0 & 1 & -v & u \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\Gamma_1)$$

şi

$$F_2 \equiv \begin{vmatrix} 1 & -v & u & 0 \\ 0 & 1 & -v & u \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (\Gamma).$$

In cazul particular, când două din triunghiuri sunt S în raport cu cel de al treilea, două din conicele (Γ), (Γ_1) şi (Γ_2) sunt parabole şi atunci şi cea de a treia este de asemeni, parabolă Astfel, dacă conicele (Γ) şi (Γ_1) sunt parabole avem:

$$\frac{a_0}{a_3} = \frac{b_0}{b_3} \; ; \; \frac{b_0}{b_3} = \frac{c_0}{c_3}$$

deci, şi

$$\frac{a_0}{a_3} = \frac{c_0}{c_3}$$

ceea ce arată că şi conica (Γ_2) este tot parabolă.

In cazul general[1]), tangenta comună conicelor (Γ), (Γ_1) şi (Γ_2) este dreapta Δ:

$$x + Uy = V$$

unde U şi V sunt soluţiunile sistemului linear:

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} 1 & -V & U & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{şi} \quad \Delta'' \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & -V & U \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţia este imediată. Notăm cu $\overline{C_0}$, $\overline{C_1}$, $\overline{C_2}$ şi $\overline{C_3}$ minorii elementelor din linia 4-a ai determinantului Δ'. Avem astfel:

$$\Delta' \equiv c_0\overline{C_0} + c_1\overline{C_1} + c_2\overline{C_2} + c_3\overline{C_3} = 0$$

$$a_0\overline{C_0} + a_1\overline{C_1} + a_2\overline{C_2} + a_3\overline{C_3} = 0$$

$$b_0\overline{C_0} + b_1\overline{C_1} + b_2\overline{C_2} + b_3\overline{C_3} = 0$$

ultimele două egalităţi exprimând că determinanţii obţinuţi prin înlocuirea elementelor din ultima linie a lui Δ' respectiv cu $a_0, \ldots, a_3$ şi $b_0, \ldots, b_3$ sunt nuli.

Considerăm acum, sistemul linear format din cele trei egalităţi precedente, la care se adaogă ecuaţiunea:

$$\overline{C_1} - V\overline{C_2} + U\overline{C_3} = \rho \qquad (3)$$

necunoscutele fiind minorii $\overline{C_0}$, $\overline{C_1}$, $\overline{C_2}$, $\overline{C_3}$, iar ρ un parametru a cărui valoare va fi determinată imediat. Determinantul acestui sistem fiind identic — exceptând semnul — cu Δ'', este nul. Pe de altă parte, acest sistem admiţând soluţiunile $\overline{C_0}$, $\overline{C_1}$, $\overline{C_2}$, $\overline{C_3}$, bine determinate, rezultă că avem:

$$\rho = 0.$$

In asemenea condiţiuni, relaţiunea (3) exprimă că U şi V verifică ecuaţia tangenţială a conicei (Γ).

---

1) A se vedea: G. Tzitzeica. La méthode de M. Kubota. Bulletin de Mathématiques et de Physique de l'École Polytechnique de Bucarest. Fasc, 22, 23 şi 24, pag. 6.

In mod analog, se arată că U şi V verifică şi ecuaţiunile conicelor (Γ_1) şi (Γ_2).

Propoziţiunea enunţată, fiind demonstrată pentru trei triunghiuri înscrise în acelaşi cerc este — evident — adevărată şi pentru trei triunghiuri înscrise în aceeaşi *conică*.

De asemeni, prin dualitate aceeaşi propoziţiune devine:

Fiind date trei triunghiuri circumscrise aceleiaşi conice, cele trei conice circumscrise la câte două din aceste triunghiuri, au un punct comun.

Vom reveni mai departe asupra acestei poziţiuni.

5. *Locul geometric al ortocentrelor triunghiurilor* (T) *înscrise în acelaşi cerc* (O) *şi circumscrise la aceaşi conică* (Γ) *este un cerc, dacă conica* (Γ) *nu este o parabolă sau o dreaptă, în acest din urmă caz.*

Abscisele isotrope α, β, γ ale vârfurilor unui triunghiu (T) înscris în cercul (O) şi circumscris conicei (Γ) fiind rădăcinile unei ecuaţiuni de forma:

$$(a_0 + \lambda b_0) t^3 + (a_1 + \lambda b_1) t^2 + (a_2 + \lambda b_2) t + a_3 + \lambda b_3 = 0$$

(vezi § 2) coordonatele isotrope X şi Y ale ortocentrului, acestui triunghiu, sunt:

$$X = -\frac{a_1 + \lambda b_1}{a_0 + \lambda b_0} \quad \text{şi} \quad Y = -\frac{a_2 + \lambda b_2}{a_3 + \lambda b_3}$$

cum se deduce imediat observând că centrul de greutate al aceluiaşi triunghiu are coordonatele:

$$\frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \quad \text{şi} \quad \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right).$$

Eliminând pe λ, se obţine ecuaţiunea locului geometric al ortocentrului, sau:

$$(a_0 X + a_1)(b_3 Y + b_2) - (b_0 X + b_1)(a_3 Y + a_2) = 0. \qquad (H)$$

Această ecuaţiune reprezintă, în general, un cerc. In cazul particular, când avem:

$$a_0 b_3 - a_3 b_0 = 0$$

prin urmare, când conica (Γ) este o parabolă, aceeaşi ecuaţiune reprezintă o dreaptă, în speţă, directoarea parabolei.

Se verifică uşor, că cercul (H) aparţine fascicolului punctual determinat de cercul circumscris (O) şi de cercul lui MONGE relativ la conica (Γ). Ecuaţiunea acestui din urmă cerc este:

$$2(0,3)XY + (0,2)X + (1,3)Y + (1,2) - (0,3) = 0$$

unde am pus pentru prescurtare:

$$(i, k) = a_i b_k - a_k b_i. \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

(Va urma) ŞERBAN GHEORGHIU.

NOTE MATEMATICE

16. *Asupra problemei 2469.* Enunţul problemei este: A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu variabil în care avem*

$$(1) \qquad \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = k = \text{const.},$$

să se găsească maximul şi minimul expresiei

$$E = \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C.$$

Acestei probleme i s'a dat în Vol. XLII, pag. 198 o soluţie parţială, anume, pentru cazul când A, B, C sunt mai mici ca 90^0 şi $k = \sqrt{3}$.

1°. D-l Prof. TIBERIU POPOVICIU a dat, în cazul general, o soluţie foarte elegantă (Nota 11, G. M., Vol., XLVII, p. 109), sprijinită pe un interesant artificiu de calcul, ceea ce i-a permis să învedereze că tgA, tgB, tgC sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^3 - Ex^2 + kEx - E = 0,$$

ecuaţie pe care apoi a studiat-o.

Cum acest artificiu de calcul nu mai reuşeşte când de exemplu, condiţia (1) s'ar înlocui prin condiţia

$$(2) \qquad \operatorname{cotg}A + m\operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = k,$$

mi-am propus să dau o altă soluţie generală problemei 2469, care să se poată aplica şi în cazul condiţiei (2).

2°. In acest scop, alăturăm condiţiei (1), condiţia evidentă

$$A + B + C = \pi,$$

de unde

$$(3) \qquad \operatorname{tg}C = \frac{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A \operatorname{tg}B - 1}.$$

Notând

$$\text{tgA} = x \quad , \quad \text{tgB} = y, \tag{4}$$

putem formula astfel enunțul problemei 2469:

Să se afle maximul și minimul funcției

$$E = \frac{(x+y)\,xy}{xy-1}, \tag{5}$$

știind că

$$(x+y)^2 + x^2y^2 - xy - kxy\,(x+y) = 0\ ^{1}). \tag{6}$$

Soluție. Notând

$$x + y = s, \quad xy = t, \tag{7}$$

rezultă că, *avem de aflat maximul sau minimul funcției*

$$E = \frac{st}{t-1}, \tag{8}$$

variabilele s, t *satisfăcând condiția*

$$s^2 + t^2 - t\,kst = 0. \tag{9}$$

Pentru aceasta, vom considera funcția

$$v = \frac{st}{t-1} + \lambda\,(s^2 + t^2 - t - kst) \tag{10}$$

și conform teoriei cunoscute, valorile lui s și t care fac maximă și minimă funcția (8), sunt soluțiile sistemului ce se formează luând derivatele parțiale în raport cu s și t ale relației (10), la care alăturăm și condiția (9). Avem astfel sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{t}{t-1} + \lambda\,(2s - kt) = 0 \\ -\dfrac{s}{(t-1)^2} + \lambda\,(2t - 1 - ks) = 0 \\ s^2 + t^2 - t - kst = 0. \end{cases}$$

Eliminând pe λ avem

$$\begin{cases} 2s^2 - kt^2 s = t\,(1-t)\,(2t-1) \\ s^2 + t^2 - t - kst = 0. \end{cases} \tag{11}$$

---

1) Condiția (6) este condiția (1) în care s'a ținut seama de notațiile (4).

Scăzând prima ecuație din a 2-a multiplicată cu 2, avem

$$2t^2 - 2t - 2kst + kt^2 s = t(t-1)(2t-1).$$

Cum de aci deducem

$$(12) \qquad s = \frac{(t-1)(2t-3)}{k(t-2)},$$

a 2-a ecuație din (11), lăsând factorul $t - 1 = 0$ la o parte (care nu dă soluție), devine

$$(t-1)(2t-3)^2 + k^2 t (t-2)^2 - k^2 t (2t-3)(t-2) = 0$$

sau

$$(4-k^2) t^3 - (16 - 3k^2) t^2 + (21 - 2k^2) t - 9 = 0.$$

Se observă că această ecuație are iarăși o rădăcină $t = 1$, care nu dă soluție; înlăturând această soluție ajungem la ecuația

$$(4-k^2) t^2 + 2(k^2 - 6) t + 9 = 0,$$

cu rădăcinile

$$(13) \qquad t = \frac{6 - k^2 \pm k\sqrt{k^2 - 3}}{4 - k^2}.$$

Inlocuind aceste valori în (12) și efectuând calculele, găsim

$$(14) \qquad s = \frac{k(5-k^2) \mp (2-k^2)\sqrt{k^2-3}}{4-k^2}.$$

Substituind aceste valori ale lui s și t în (8), după simplificări și o simplă analiză, conchidem

$$\max. E = \frac{k(9-2k^2) + 2(k^2-3)\sqrt{k-3}}{4-k^2}$$

$$\min. E = \frac{k(9-2k^2-2(k^2-3)\sqrt{k^2-3}}{4-k^2},$$

valabile pentru $k \geqslant \sqrt{3}$, cu condiția $k \geqslant \sqrt{3}$, k fiind pozitiv, fapt ce reiese din examinarea semnelor lui tgA, tgB, tgC aflate din (7) și (3), după ce s'au înlocuit s și t cu valorile lor din (14) și (13).

Avem astfel soluția problemei.

Observare. Cunoscând pe s, t din (14) și (13), relațiile (7) permit a afla pe tgA, tgB, iar relația (3) ne dă apoi pe tgC. Se ajunge astfel la toate concluziile din nota D-lui prof. TIBERIU POPOVICIU.

V. ALACI.

17. *Asupra problemei 2145.* La soluţia dată acestei probleme, în Vol. XLVII, pag. 459, cred nimerit a face următoarele completări cu privire la locurile punctelor Q şi R.

— *Locul lui* Q. Păstrând notaţiile din figura 3 dela pag. 463, vol. citat, trebuesc căutate locurile punctelor Q, Q_i, Q' şi Q'_i, pentru care, conform enunţului (considerând în plus şi punctul N'), trebuie să avem

$$\left.\begin{aligned} AQ &= AD - DQ \\ AQ_1 &= AD + DQ_1 \end{aligned}\right\} \text{ cazul punctului N din enunţ}$$

şi

$$\left.\begin{aligned} AQ' &= AD - DQ' \\ AQ'_1 &= AD + DQ'_1 \end{aligned}\right\} \text{ cazul punctului N'.}$$

Dar

$$DQ = DQ_1 = MN = AM - AN \quad \text{şi} \quad DQ' = DQ'_1 = AM + AN' = AM + AN.$$

Prin urmare

$$\left\{\begin{aligned} AQ &= AD - AM + AN \\ AQ_1 &= AD + AM - AN \end{aligned}\right. \quad \text{şi} \quad \left\{\begin{aligned} AQ' &= AD - AM - AN \\ AQ'_1 &= AD + AM + AN \end{aligned}\right.$$

Fie T, punctul de intersecţie al tangentei în B la cerc, cu dreapta AD; avem

$$DT = AN; \quad AD + AN = AD + DT = AT \quad \text{şi} \quad AM = BT.$$

Deci putem scrie

$$\left\{\begin{aligned} AQ &= AD + AN - AM = AT - BT \\ AQ_1 &= AD - DT + BT \end{aligned}\right.$$

şi

$$\left\{\begin{aligned} AQ' &= AD - DT - BT \\ AQ'_1 &= AD + AN + AM = AT + BT \end{aligned}\right.$$

Din acestea, deducem:

1°. *Pentru punctele* Q şi Q'_1, locul lor geometric este conform definiţiei o *strofoidă dreaptă* având punctul dublu în B, cu bucla BA şi ca asimptotă perpendiculara Δ dusă pe AB, dincolo de B la distanţa BI = AB. In coordonate polare locul se exprimă

$$\underset{(\text{sau } AQ'_i)}{AQ} = \rho = AT \mp BT = \frac{a}{\cos\theta} \mp a\,\mathrm{tg}\theta = a\,\frac{1 \mp \sin\theta}{\cos\theta};$$

iar în coordonate normale:

$$(y^2 + x^2)\ (a - x)^2 = a^2 y^2$$

şi mutând origina în B $(x, 0)$, avem

$$Y^2 = X^2 \frac{a + X}{a - X},$$

formă cunoscută.

2°. *Pentru punctele* Q_1 *şi* Q'. Putem scrie

$$\underset{(\text{sau } AQ')}{AQ_1} = (AD - DT) \pm BT,$$

care în coordonate polare ne dă

$$\rho = (a\cos\theta - a\sin\theta\,\mathrm{tg}\theta) \pm a\,\mathrm{tg}\theta = a\,\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos\theta} \pm a\,\mathrm{tg}\theta$$

$$\therefore \quad \int = a\,\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \pm a\,\mathrm{tg}\theta \quad \text{(L)}.$$

Facem mai întâi *o observare* şi anume: Dacă se cerea locul unui punct L, luându-se din D spre A, DL = DT, acel loc era dat de

$$\int = AL = AD - DT = a\,\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

formă cunoscută a ecuaţiei polare a *strofoidei drepte*, lucru uşor de demonstrat şi geometriceşte. Intr'adevăr prelungind pe BL până întâlneşte în punctul V tangenta dusă în A la cerc şi considerând triunghiurile asemenea BTL şi AVL avem

$$\frac{AV}{TB} = \frac{VL}{LB}.$$

Cum TB = LB, deoarece DT = DL iar BD $\perp$ AD, rezultă AV = VL, iar locul lui L când dreapta BL se roteşte în jurul lui B este prin definiţie o *strofoidă dreaptă.*

Această observare ne conduce la o nouă definiţie geometrică a strofoidei drepte — definiţie pe care nu am găsit-o în niciunul din tratatele de geometrie analitică de care dispun, — şi anume: *Se dă un cerc de diametru* AB = *a. In jurul punctului* A *se roteşte o dreaptă care taie cercul în* D *şi tangenta la cerc în* B, *în punctul* T. *Se ia pe* DA, *segmentul* DL *egal cu porţiunea* DT *cuprinsă între cerc şi tangenta fixă; locul punctului* L *este*

strofoida dreaptă (clasică), cu punctul dublu în A, având drept ecuaţie polară

$$\rho = \frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

şi ecuaţia în coordonate normale

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

In această definiţie şi construcţie *a strofoidei ne servim tot de segmentul* DT *ca şi în cazul cisoidei drepte.*

Am putea privi — în mod geometric — locul punctelor Q_1 şi Q′ — dat fiind relaţia

$$\underset{(\text{sau } AQ')}{AQ_1} = (AD - DT) \pm BT,$$

— ca *o curbă însoţitoare a strofoidei*, ducându-se din punctele L ale strofoidei menţionate mai sus, pe secanta variabilă AD, lungimile

$$LQ_1 = LQ' = BT,$$

de o parte şi de alta a punctului L.

In Numărul 1 din acest an am propus să se construiască curba loc a punctelor Q_1 şi Q′ legate de locul lui 4.

— *Locul lui* R. In figura 4 de la pag. 464, Vol. citat, ducem tangenta în B la cerc, iar din R o paralelă la AB şi notăm cu T şi I punctele de intersecţie ale tangentei în B respectiv cu AD şi cu paralela dusă din R. Observăm că triunghiurile dreptunghice ADB şi RIT sunt egale (deoarece AD = FB = RI, şi unghiurile din A şi R sunt egale) şi prin urmare RT = AB = a; tot astfel se arată că TR′ = AB = a. Se ajunge astfel după definiţie, că locul lui R şi R′ este *concoida lui* NICOMEDE în cazul când cantităţile cu care se măresc sau se micşorează razele vectorii AT sunt egale cu distanţa dela A la dreapta BT. In coordonate polare locul este cel găsit la pag. 463 (vol. citat), iar în coordonate carteziene locul este dat de ecuaţia

$$y^2 = \frac{x^3(2a-x)}{(x-a)^2}.$$

A se vedea pentru detalii şi pentru figura *Concoidei lui* NICOMEDE, paginele 287 şi 288 din lucrarea: *Lecţiuni de geometrie analitică* de N. ABRAMESCU.

GENERAL GH. LITEANU.

18. *Soluția și generalizarea unei probleme din* „Recueil de problèmes de mathématiques“ *par* C. A. LAISANT.

Enunțul problemei este:

„Dacă A *și* B *sunt două numere întregi oarecare, să se găsească suma numerelor prime cu* A *și inferioare produsului* A. B.“.

Soluția și deci generalizarea acestei probleme se poate da aplicând formula 2) din G. M., XLI, pag. 278, adică:

$$S_{A.B}(A) = \frac{1}{2} A.B\,(A.B+1) - \sum \frac{a}{2} \cdot E\left(\frac{A.B}{a}\right) \cdot \left[1 + E\left(\frac{A.B}{a}\right)\right] + \sum \frac{ab}{1} \cdot E\left(\frac{A.B}{a.b}\right) \cdot \left[1 + E\left(\frac{A.B}{a.b}\right)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unde factorii primi ai lui A sunt:

$$\underbrace{a,\ b,\ c, \ldots}_{n}$$

Formula se mai poate scrie:

$$S_{A.B}(A) = \frac{1}{2} A.B \left[A.B - \sum \frac{A.B}{a} + \sum \frac{A.B}{a.b} - \ldots\right].$$

Dar conform formulei 1) din aceiași G. M., pag. 278, avem:

$$I_{A.B}(A) = A.B - \sum \frac{A.B}{a} + \sum \frac{A.B}{a.b} - \ldots$$

Prin urmare avem:

$$S_{A.B}(A) = \frac{1}{2} A.B \cdot I_{A.B}(A).$$

COMANDOR I. LINTEȘ.

19. *Patrat magic de produse.* Intre curiozitățile aritmetice sunt și patratele magice în care numerele de pe linii și coloane, și câteodată și cele de pe diagonale, au sumele egale. Sunt și patrate magice în care numerele de pe linii și coloane au produse

egale. Dau, pentru cititorii *Gazetei Matematice* următorul exemplu de astfel de pătrate

5	396	140	424
440	49	305	18
144	244	12	275
366	25	231	56

Produsele numerelor de pe aceeaşi linie sau de pe aceeaşi coloană sunt egale între ele şi egale cu 118364400.

A. MOESSNER.

20. *Asupra ecuaţiilor multigrade.* De câţiva ani, bine cunoscuţii cercetători, D-nii A. GLODEN şi A. MOESSNER dau exemple de egalităţi multigrade

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k \quad , \quad k = 1,\ 2, \ldots\ n-1.$$

Vreau să semnalez o clasă generală de astfel de egalităţi, valabile pentru *orice n*, clasă conţinută în problema 4336 ce am propus în *Gazeta Matematică* şi a fost rezolvată în Vol. XL, p. 279.

Egalităţile în chestiune sunt

$$s_n^k + \Sigma s_{n-2}^k + \Sigma s_{n-4}^k + \ldots = \Sigma s_{n-1}^k + \Sigma s_{n-3}^k + \ldots$$
$$k = 1, 2, \ldots n-1,$$

unde s_p este suma a câte p din n cantităţi date $a_1, a_2, \ldots a_n$.

In fiecare membru sunt 2^{n-1}, respectiv $2^{n-1}-1$ termeni şi viceversa, după paritatea lui n.

Exemplu, $n = 3$, avem identităţile

$$(a+b+c)^k + a^k + b^k + c^k = (a+b)^k + (b+c)^k + (c+a)^k\ ,\ k = 1, 2.$$

Pentru $n = 4$, avem

$$(a+b+c+d)^k + (a+b)^k + (b+c)^k + (c+d)^k + (d+a)^k + (a+c)^k + (b+c)^k = (a+b+c)^k + (b+c+d)^k + (a+b+d)^k + (a+c+d)^k + a^k + b^k + c^k + d^k \quad , \quad k = 1,\ 2,\ 3.$$

Pentru $n = 5$, avem

$$(a+b+c+d+e)^k + (a+b+c)^k + (a+b+d)^k + (a+b+e)^k + (b+c+d)^k + (b+c+e)^k + (a+c+d)^k + (a+c+e)^k + (a+d+e)^k + (b+c+e)^k + (c+d+e)^k + a^k + b^k + c^k + d^k + e^k = (a+b+c+d)^k + (b+c+d+e)^k + (a+b+c+e)^k + (a+c+d+e)^k + (a+b)^k + (a+c)^k + (a+d)^k + (a+e)^k + (b+c)^k + (b+d)^k + (b+e)^k + (c+d)^k + (c+e)^k + (d+e)^k$$

$$k = 1, 2, 3, 4.$$

M. GHERMĂNESCU.

21. *Asupra problemei 3456.* In legătură cu această problemă rezolvată la pag. 536, Vol. XLV şi cu nota D-lui I. B. FLORESCU din *Gazeta Matematică*, Vol. XLVII, pag. 455, semnalez problema 211 de la pag. 55 din *Exercices d'Arithmétique* par F. G. M., cu enunţul: „*Trouver dans la suite naturelle des nombres*, n *nombres entiers consécutifs non premiers*". Soluţia dată conţine numerele

$$p+2,\ p+3,\ p+4, \ldots,\ p+(n+1)$$

unde $$p = 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n\,(n+1).$$

P. P. DRĂGHICESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Examenul de admitere la Facultatea de Arhitectură

14 — 15 Septemvrie 1942

Algebra. I. Se dau două cercuri de raze $a < b$, tangente exterior între ele. Se cere :

1°. Să se calculeze unghiul θ, făcut de tangentele comune la cele două cercuri.

2°. Să se calculeze lungimea coardei BB' care uneşte punctele de contact ale tangentelor cu cercul de rază a.

3°. Ce relaţie trebuie să existe între a şi b pentru ca unghiul θ să aibă 60° ?

II. Să determine a, b, c aşa fel încât polinomul

$$x^{2n} + 3ax^{2n-1} + 5bx^2 - 2c$$

să se dividă prin $x^3 - x$.

Geometria. Fie A un punct exterior cercului O de rază r. Pe $AO = d$ ca diametru se descrie un cerc ce taie pe primul în B şi C. Diametrul AO taie cercul O în E între O şi A, iar CO taie pe O în y şi pe AB în F.

1°. Să se calculeze laturile şi unghiurile triunghiului IBF în funcţie de d, r şi $\alpha = \sphericalangle AOB$.

2°. La ce distanţă d trebuie să se găsească A pentru ca OC să fie paralelă cu AB.

Prin rotaţia figurii în jurul diametrului AO iau naştere două sfere.

3°. Să se arate că suprafaţa zonei sferice născută de arcul BOC nu depinde de distanţa d.

4°. Să se determine parametrul k aşa fel încât suprafaţa născută de triunghiul ABO să fie de k ori suprafaţa zonei născută de arcul BFC pentru $d = 2r$.

5°. k fiind astfel determinat să se găsească şi celelalte valori ale lui d pentru care avem relaţia dela punctul 4°.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societăţii Politehnice din România. Anul LVI, Nr. 6, Iunie 1942. TH. BALŞ: † EMIL MICLESCU. D. GERMANI: Proiectul şi execuţia lucrărilor de alimentare cu apă a oraşului Curtea-de-Argeş. AL. D. BUNESCU: Asupra regimului căii ferate. Conţinutul *«Buletinului I.R.E.»* Anul X. Nr. 1.

Idem. Anul LVI, Nr. 7, Iulie 1942. AD. STAMBULEANU. Distribuţia necompensată a motorului de avion cu cilindri în stea. I. N. PETCULESCU. Consolidarea blocului PHERECHYDE. VAL. STAMATESCU: Utilizarea nisipului artificial de calcar, ca agregat la confecţionarea betoanelor.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXII, Nr. 9, Noembrie 1942. E. V. DOBRESCU: O problemă de mecanică. V. ALACI: Asupra articolului o problemă de mecanică.

România Aeriană. Anul XVI, Nr. 10, Oct. 1942.

I. IONESCU. Povestiri Ştiinţifice. Vol. II.

CERERI

318. Exemplarul de *« Elemente de Geometrie »* de I. M. RIURIANU şi E. ANGELESCU donat *Gazetei Matematice* de D-l Inginer MIHAIL PORTOCALĂ poartă pe prima pagină următoarea dedicaţie scrisă de primul dintre autorii de mai sus: „D. Domnŭ STELIŬ DEMETRESCU, Profesor şi Inspector de Scóle spre semnŭ de stimă şi amiciă".

I. M. RIUREANU.

Ce se ştie despre Profesorul STELLIU DEMETRESCU?

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

C. ALASIA. Estensione di alcuni teoremi sui gruppi di sostituzioni Livorno 1905.

Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

H. B. NEWSON. Trasformazioni proiettive ad un parametro e loro gruppi continui. Traduzione e note del Prof. C. ALASIA. Napoli.

Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

LEONARD EULER. Vollständige Anleitung zur Algebra. Ediție nouă (Ediția I a apărut în 15 Aprilie 1707). Leipzig.

Donată de D-l MIHAIL PORTOCALĂ, Inginer.

I. M. MELIK. Elemente de Geometrie. Ediținea II-a Iassi. 1873.

Donată de D-l MIHAIL PORTOCALĂ, Inginer.

I. M. RIURIANU și E. ANGELESCU. Elemente de Geometria de A. M LEGENDRE cu adaose și modificațiuni de M. A. BLANCHET. Prima ediținne Bucuresci 1865.

Donată de D-l MIHAIL PORTOCALĂ, Inginer.

I. VĂRGOLICIU. Aritmetică pentru Trebuința Skoalelor primare din Principatele-Unite. Partea I-a, Iassii 1860.

Donată de D-l MIHAIL PORTOCALĂ, Inginer.

MATEI M. DRĂGHICEANU. Elemente de Cosmographia, prelucrare în usulŭ scólelor secundare. Textŭ și carte. Bucuresci 1866.

SLUGERUL G. POP. Elemente de Geometrie Teoretică și practică București 1852.

Donată de D-l MIHAIL PORTOCALĂ, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3600. *O placă dreptunghiulară grea* ABCD *de dimensiuni* AB = 25 *cm*, BC = 0,16 *m, grosime 6 mm și densitate 7,8 este suspendată într'un plan vertical de vârful* A. *In ipoteza că placa cade liber din poziția în care* AB *este orizontală și se oprește în poziția de echilibru, se cere să se calculeze lucrul mecanic efectuat de greutatea plăcii și să se exprime în unități tehnice și* C. G. S.

E. A.

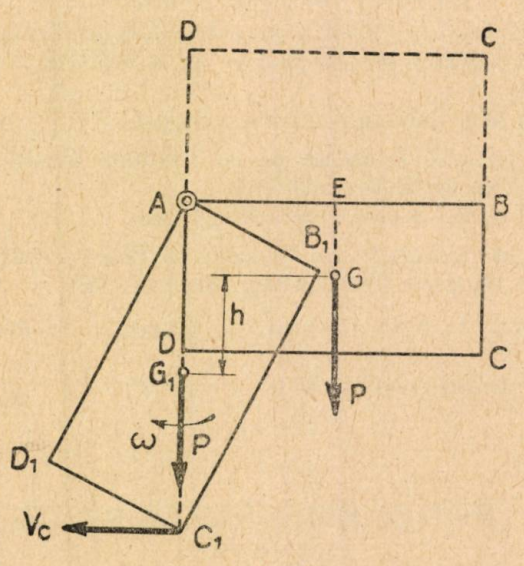
Ţinând seamă că poziţia de echilibru a plăcii are loc când *diagonala* AC *este verticală* şi având în vedere că lucrul mecanic L al unei greutăţi P este egal *cu greutatea înmulţită cu diferenţa de nivel* h *dintre poziţia finală şi poziţia iniţială a punctului de aplicaţie al greutăţii*, avem:

$$L = Ph = P\,(GA - GE) = P\,\frac{AC - BC}{2}.$$

In sistemul C. G. S.:

$$AB = 25\,cm,\ BC = 16\,cm,\ AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{625 + 256} = 29{,}68\,cm$$

$$h = \frac{AC - BC}{2} = \frac{29{,}68 - 16}{2} = 6{,}84\ cm.$$



Volumul V al plăcii $= 25 \times 16 \times 0{,}6 = 240\ cm^3$.

Densitatea d a plăcii fiind $\frac{7{,}8\ \text{gr-massă}}{cm^3}$

avem:

Massa M a plăţii $= Vd = 240 \times 7{,}8 = 1872$ gr-massă,

iar:

Greutatea G a plăcii $= Mg = 1872 \times 981 = 1.836.432$ dine.

Rezultă:

$L = Gh = 1.836.432 \times 6,84 = 12.561.195$ ergi $= 1,2561195$ joule

In sistemul tehnic:

$$h = 0,0684\ m$$

Volumul plăcii este $V = 0,25 \times 0,16 \times 0,006 = 0,000240\ m^3$.

Greutatea plăcii este $G = 0,000240 \times 7800 = 1,872$ kg-forță.

Iar:

$L = Gh = 1,872 \times 0,0684 = 0,1280448\ kgm.$

Putem calcula lucrul mecanic L și în *cai-oră* sau în *kw-oră* ținând seama că:

1 Cal-oră $= 270.000\ kgm$; 1 *kw*-oră $= 367.000\ kgm.$

Obținem astfel:

$$L = \frac{0,1280448}{270.000} = \frac{4,74}{10^7} \text{ cai-oră}$$

$$L = \frac{0,1280448}{367.000} = \frac{3,5}{10^7} \text{ kw-oră.}$$

Notă. Observațiunea I. Ipoteza făcută în enunț nu corespunde realității deoarece placa nu numai că nu se oprește în poziția de echilibru dar are în acel moment *iuțeala maximă.* Ne propunem să calculăm această iuțeală *aplicând teorema energiei cinetice în mișcarea de rotație a plăcii.*

Vom avea:

$$\frac{1}{2} L\omega^2 - \frac{1}{2} L\omega_0^2 = L$$

în care I este momentul de inerție al plăcii în raport cu punctul de rotație A, ω iuțeala unghiulară în poziția finală, ω_0 iuțeala unghiulară în poziția inițială iar L lucrul mecanic calculat mai sus.

Avem:

$$\omega_0 = 0\ ;\ I = I_{AB} + I_{AD} = \frac{m \cdot \overline{BC}^2}{3} + \frac{m \cdot \overline{AB}^2}{3} = \frac{m\overline{AC}^2}{3};$$

Rezultă:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{3} \overline{AC}^2\ \omega^2 = Gh = mgh$$

$$\omega = \frac{\sqrt{6gh}}{AC} = \frac{\sqrt{6 \times 981 \times 6,84}}{29,68} = 6,75\ ^{rad}/_{sec}.$$

Iuțeala punctului C va fi pentru poziția de echilibru a plăcii:

$$v_c = \omega \cdot AC = 6,75 \times 29,68 \cong 200\ ^{cm}/_{sec} = 2\ ^{m}/_{sec}.$$

Observaţiunea II. Problema admite o a doua soluţie presupunând că placa ocupă în poziţia iniţială poziţia indicată punctat pe figură.

In acest caz: $h = \frac{AC + BC}{2} = 22{,}84$ cm.

Rezultatele pentru această ipoteză se deduc imediat din cele calculate mai sus prin înmulţirea lor cu raportul $\frac{22{,}84}{6{,}84}$.

ALEXANDRU STOENESCU.

S'au primit soluţiuni bune la problemă, aşa cum a fost propusă, dela D-nii: E. M. CAŢICHI, R. GHIULEA, C. HAMERAK, M. C. LIVADA, A. PÂRVU, E. SAULEA, N. TABACOVICI şi Z. STEINER.

PROBLEMA 4730. *Dacă se notează cu* S_n *suma puterilor a* n^a *a rădăcinilor ecuaţiei*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

să se găsească condiţia ca S_{n+1} *să nu depindă de* a_n.

A. ANGHELESCU.

Soluţie dată de D-nii: P. P. COJOCARU (Iaşi), V. HERMAN (Cluj), D. D. MATEI (Iaşi), D. MAVRODIN (Bucureşti) şi ŞT. C. TILICĂ (T.-Severin).

Calculul sumelor S_p se face din aproape în aproape cu ajutorul formulelor lui NEWTON:

$$S_1 + a_1 = 0, \quad S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0, \ldots, S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n-2} S_1 + (n-1) a_{n-1} = 0,$$

$$S_n + a_1 S_{n-1} + \ldots + n a_n = 0, \quad S_{n+1} + a_1 S_n + \ldots + a_n S_1 = 0, \ldots$$

Ele ne spun că $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ nu depind de a_n, încât S_{n+1} este de forma

$$S_{n+1} = P(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + (n+1) a_1 a_n$$

unde P este un polinom în $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Condiţia cerută de problemă este aşa dar $a_1 = 0$.

Se vede şi invers că dacă această condiţie este îndeplinită, atunci S_{n+1} nu depinde de a_n.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4959. *Să se arate că:*

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k A_m^k A_{n-p}^{m-k} = A_n^m$$

în care A *şi* C *sunt respectiv simbol de aranjări şi combinări.*

ADRIAN BUŞILĂ.

Consider identitatea:

$$(1+x)^p (x+1)^{n-p} = (1+x)^n$$

în care egalând coeficientul lui x^m, obţinem:

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k \cdot C_{n-p}^{m-k} = C_n^m$$

sau:

$$m! \sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{n-p}^{m-k} = A_n^m$$

de unde:

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{m!}{(m-k)!} \cdot A_{n-p}^{m-k} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A_m^k A_{n-p}^{m-k} = A_n^m.$$

Soluţii bune primite dela D-ra ANA-MARIA S. MODÂLCĂ (Politehnica, Bucureşti) şi dela D-nii: EMIL S. MODÂLCĂ (liceul „Traian", T.-Severin); ŞT. C. TILICĂ (Şc. Ofiţeri de Geniu din Bucureşti); M. M. ROŞCULEŢ.

AD. B.

PROBLEMA 4982 [1]). *Se consideră un triunghiu* ABC *în care cunoaştem laturile* b, c *şi unghiul* A. *Prin* A *se duce o dreaptă* AD (D *fiind pe* BC) *făcând cu* AB *un unghiu* φ. *Unghiul* φ *este măsurat dela* AB *în spre* AC.

1°. *Să se calculeze* AD *în funcţie de datele problemei.*

2°. *Din expresia găsită, să se deducă expresia înălţimii şi bisectoarelor unghiului* A.

3°. *Să presupunem că prin* B *ducem o dreaptă* BE (E *fiind pe* AC) *care să facă un unghiu* φ *cu* BC *şi tot aşa se duce o dreaptă* CF (F *fiind pe* AB) *care să facă cu* CA *un unghiul* φ.

1) Această problemă a fost propusă şi sub Nr. 5056 la pag. 224, Vol. XLIV. Pentru numerătoarea exactă s'a dat Nr. 5056 primei probleme propuse la pag.... din acest an.

Să se arate că există triunghiuri pentru cari se poate determina un unghiu φ *în aşa fel că:*

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF};$$

4°. *Să se arate, că între laturile unui triunghiu care satisface condiţiilor dela 3°, există relaţia*

$$a^2(a-c) + b^2(b-a) + c^2(c-b) = 0.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie 1°. Dacă $0 \ll \varphi \ll A$, D este cuprins între B şi C sau se confundă cu unul dintre ele, şi avem relaţia între suprafeţe

$$S_{ABD} + S_{ADC} = S_{ABC}$$

care se scrie:

$$c\,\overline{AD}\sin\varphi + b\,\overline{AD}\sin(A-\varphi) = bc\sin A$$

$$\therefore \quad (1) \quad AD = \frac{bc\sin A}{c\sin\varphi + b(A-\varphi)}.$$

Se arată în acelaşi fel, că egalitatea (1) este adevărată şi atunci când $A < \varphi$, observând că unghiul φ este unghiul semidreptelor AB, AD, măsurat dela AB spre AC, până la AD, aşa cum se arată în enunţ.

2°. In cazul înălţimii, $\varphi = \frac{\pi}{2} - B$ şi numitorul lui AD se scrie:

$$c\sin\frac{\pi}{2} + b\sin\left(A + B - \frac{\pi}{2}\right) = c\cos B + b\cos C = a,$$

încât obţinem formula:

$$h_a = bc\sin A/a.$$

In cazul bisectoarei interioare, $\varphi = \frac{A}{2}$ şi numitorul devine:

$$c\sin\frac{A}{2} + b\sin\frac{A}{2} = (b+c)\sin\frac{A}{2}, \text{ încât}$$

$$l_a = \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

In cazul bisectoarei exterioare: dacă $B<C$, avem $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ şi deci

$$c\sin\varphi + b\sin(A-\varphi) = c\cos\frac{A}{2} - b\cos\frac{A}{2}$$

încât

$$l'_a = \frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2}.$$

Dacă $C < B$, avem $\varphi = 3\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ şi găsim:

$$l'_a = \frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}.$$

3° şi 4°. Din (1), prin permutări circulare, se deduce, că dacă

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF},$$

avem:

$$c\sin\varphi + b\sin(A-\varphi) = a\sin\varphi + c\sin(B-\varphi) = b\sin\varphi + a\sin(C-\varphi)$$

care se mai pot scrie:

$$(c - b\cos A)\operatorname{tg}\varphi + b\sin A = (a - c\cos B)\operatorname{tg}\varphi + c\sin B$$
$$= (b - a\cos C)\operatorname{tg}\varphi + a\sin C.$$

Eliminând pe $\operatorname{tg}\varphi$ obţinem:

$$\frac{c\sin B - b\sin A}{(c-a) + (c\cos B - b\cos A)} = \frac{a\sin C - b\sin A}{(c-b) + (a\cos c - b\cos A)}.$$

Inlocuind: $\sin A = a/2R, \ldots$ şi $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc, \ldots$ şi făcând toate calculele, se ajunge la concluzia, că între laturile unui triunghiu, în care $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$, trebuie să avem relaţia scrisă în enunţ la 4°.

Dacă triunghiul dat ABC este echilateral, $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ oricare ar fi unghiul φ, căci triunghiurile ABD, BCE, CAF sunt egale, având câte o latură egală cuprinsă între unghiurile φ şi A, B sau C, care sunt egale şi relaţia dintre laturi arătată în enunţ este evident satisfăcută, căci $a = b = c$ şi fiecare termen al sumei este nul.

Să vedem, dacă în altfel de triunghiuri decât cele echilaterale, se poate găsi vreun unghiu φ pentru care $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$.

Dacă triunghiul dat este isoscel şi avem $\hat{B} = \hat{C}$, deci $\overline{CA} = \overline{AB}$, triunghiurile ABD şi CAF, având câte un unghiu egal cu φ cuprins între laturi egale, ar trebui să fie egale şi la laturile egale AD şi CF ar trebui să se opună unghiuri egale şi să avem: $\hat{B} = \hat{A}$, adică $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ şi triunghiul dat ar trebui să fie echilateral, iar nu isoscel.

Să presupunem că ar exista un triunghiu în care $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ şi că ar fi scalen, având $a < b < c$, deci: $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$.

Să luăm dela A spre B lungimile: $\overline{AC'} = \overline{BC} = a$ şi $\overline{AA'} = \overline{CA} = b$.

Triunghiurile AC'D şi AA'D ar fi egale cu triunghiurile BCE şi CAF, având un unghiu egal cu φ, cuprins între laturi egale. Rezultă că unghiurile AC'D şi AA'D ar fi egale cu $\hat{C}$ şi $\hat{A}$. Fiindcă am presupus $a < b < c$, avem $\overline{AC'} < \overline{AA'} < \overline{AB'}$ şi ca urmare, ar trebui să avem: $\overset{\frown}{ABD} < \overset{\frown}{AA'D} < \overset{\frown}{AC'D}$ adică $\hat{B} < \hat{A} < \hat{C}$, ceea ce nu se poate, căci am văzut că: $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$.

Rezultă că relaţile 3° şi 4° ale problemei sunt împlinite numai când triunghiul dat este echilateral şi că atunci unghlul φ poate să aibă orice valoare.

Au rezolvat numai primele două puncte din enunţ D-nii: C. MIHU, CONSTANTIN P. PANTELIMON, M. DUMITRESCU, P. P. DRĂGHICESCU, M. D, POPA, I. I. STAMATE şi E. WEGENER.

PROBLEMA 5116. *Prin vârful* A *al unui triunghiu* ABC *se duce o dreaptă variabilă care întâlneşte latura* BC *în punctul* α.

Se consideră cercurile circumscrise triunghiurilor ABα, ACα *şi se cere:*

1. *Infăşurătoarea liniei centrelor celor două cercuri.*
2. *Locul intersecţiei tangentelor în* B *şi* C *la cele două cercuri.*
3. *Infăşurătoarea tangentelor în* α *la aceleaşi cercuri.*

CEZAR COŞNIŢĂ.

Soluţie dată de D-nii: O. MĂRCULESCU (Craiova), PAUL DRĂGHICESCU şi C. V. PANTELIMON (Elevi Liceul Militar Iaşi).

1. Linia centrelor O_1 și O_2 a cercurilor ABα, ACα este dreapta perpendiculară pe coarda comună Aα, în mijlocul său.

Când α descrie dreapta BC, mijlocul M al coardei comune Aα descrie dreapta D echidistantă de A și de BC.

Linia centrelor fiind latura unghiului drept cu vârful M mobil pe dreapta D și a doua latură AM trecând prin punctul ix A, înfășoară parabola cu focarul în A și dreapta D tangentă la vârf. Mijlocul înălțimii AA' a triunghiului ABC este vârful parabolei, BC directoarea și AA' axa sa.

2. Dacă α este între B și C, intersecția P a tangentelor în aceste puncte și vârful A se găsesc de o parte și de alta a laturii BC.

In cercul O_1, unghiurile BAα și PBC au aceiași măsură, jumătatea arcului Bα, deci sunt egale. Tot așa, unghiurile CAα și PCB sunt egale, având aceiași măsură, jumătatea arcului Cα din cercul O_2. Rezultă că suma unghiurilor PBC și PCB este egală cu unghiul A, că acesta este suplimentar unghiului BPC și că P se găsește pe cercul O, circumscris triunghiului ABC. Când α se mișcă dela B până la C, punctul B descrie arcul CPB.

Dacă α este pe prelungirea laturii BC, punctele P și A se găsesc de aceiași parte a lui BC și se arată în același fel, că unghiul BPC este egal cu unghiul A și că C descrie arcele BA sau AC ale cercului O, după cum α se depărtează de C sau se apropie de B. Așa dar locul căutat este întreg cercul O circumscris triunghiului ABC.

3. Cercul cu centrul M, descris pe Aα ca diametru, trece prin piciorul înălțimii AA' și prin proiecțiile Q și R ale vârfului A pe tangentele αT_1 și αT_2, la cercurile O_1 și O_2.

Unghiurile ABC și AαQ sunt egale, căci au aceiași măsură, jumătatea arcului Aα al cercului O_1. Tot așa unghiurile AαQ și AA'Q sunt egale având aceiași măsură, jumătatea arcului AQ al cercului ARA'αQ. Rezultă că unghiul AA'Q este egal cu unghiul ABC, care este constant, deci Q se mișcă pe o dreaptă fixă Δ_1 trecând prin A'. Tangenta αT_2, fiind latura unghiului drept cu vârful Q mobil pe dreapta fixă Δ_1 și a doua latură AQ trecând prin punctul fix A, înfășoară parabola cu focarul în A și dreapta Δ_1 tangentă la vârf.

Se arată în acelaşi fel că R se mişcă pe o dreaptă Δ_2 care trece prin A' şi că înfăşurătoarea tangentei αT_2 este parabola cu focarul A şi dreapta Δ_2 tangentă la vârf.

Au dat soluţii analitice foarte bune, D-nii: C. PANTELIMON (Iaşi), OCTAVIAN E. GHEORGHIU (student), DUMITRU RIPIANU, GH. D. SBÂRNEA (Tecuci) şi T. ŞERBAN (elev inginer, Bucureşti).

PROBLEMA 5304. *Să se demonstreze că ecuaţia*

$$x^5 + y^5 = u^5 + v^5$$

este imposibilă în numere întregi, dacă $x + y = u + v$.

M. GHERMĂNESCU.

1. *Soluţie* dată de D-nii: PETRESCU IULIAN, ŞERBAN A. TEODOR şi TOPOLESCU GHEORGHE.

Ecuaţia dată se poate scrie

$$(x+y)\,[(x+y)^4 - 5xy\,(x+y)^2 + 5x^2y^2] = (u+v)\,[(u+v)^4 - 5uv\,(u+v)^2 + 5u^2v^2].$$

Dacă $s = x + y = u + v = 0$, avem soluţia banală $x = -y$, $u = -v$.

Dacă $s \neq 0$, simplificând cu s, ecuaţia precedentă devine

$$s^2\,(uv - xy) = (u^2v^2 - x^2y^2)$$

sau

$$(uv - xy)\,[s^2 - 3\,(uv + xy)] = 0,$$

care se desface în următoarele două

$$uv - xy = 0 \quad , \quad s^2 = uv + xy,$$

la care adăogăm $x + y = u + v = s$.

Sistemul de ecuaţii

$$uv = xy \quad , \quad x + y = u + v$$

conduce la soluţia banală $x = u$, $y = v$.

Sistemul

$$s^2 = uv + xy \quad , \quad x + y = u + v = s$$

conduce la

$$(x+y)^2 + (u+v)^2 = 2xy + 2uv$$

sau

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

care este imposibilă în numere întregi *reale*.

2. *Generalizare* dată de D-l V. E. ECKSTEIN.

Vom arăta că ecuaţia mai generală

$$x^n + y^n = u^n + v^n$$

este imposibilă în numere reale, dacă $x + y = u + v$, n fiind întreg şi pozitiv

Să punem

$$x = k - a \quad , \quad y = k + a \quad , \quad u = k - b \quad , \quad v = k + b,$$

deci

$$x + y = u + v = 2k,$$

unde putem presupune că a şi b sunt pozitivi, din cauza simetriei celor doi membri în raport cu x şi y, respectiv u şi v. Vom avea

$$x^n + y^n = (k - a)^n + (k + a)^n = \sum_0^n [1 + (-1)^p] C_n^p a^p k^{n-p},$$

$$u^n + v^n = (k - b)^n + (k + b)^n = \sum_0^n [1 + (-1)^p] C_n^p b^p k^{n-p},$$

deci $$x^n + y^n - u^n - v^n = \sum_0^{\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2q} (a^{2q} - b^{2q}) k^{n-2q}.$$

Toţi termenii, sumei din membrul al doilea sunt evident de acelaşi semn, astfel că suma nu poate fi nulă decât dacă $a = \pm b$, ceea ce conduce la soluţia banală $x = u$, $y = v$ sau $k = 0$ pentru n impar, ceea ce conduce la soluţia iarăşi banală $x = -y$, $u = -v$.

Notă. Această problemă oferă un exemplu simplu de ecuaţie ***multigradă***

$$x^n + y^n = u^n + v^n \quad , \quad n = 1, n,$$

mposibilă în numere întregi sau măcar reale.

M. G.

PROBLEMA 5468. *Intrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 să se formeze o progresie aritmetică de patru termeni de câte două cifre şi raţia de o cifră a acestei progresii.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie, dată de D-şoara LIDIA TUDORAN (Şc. Centrală de ete „Marica Brâncoveanu", Bucureşti).

Deoarece raţia $r < 10$, înseamnă că cei 4 termeni ai progresiei fac parte din 4 decade consecutive. Deci progresia cerută este

$$\div [10a + b] . [10 (a + 1) + c] . [10 (a + 2) + d] . [10 (a + 3) + e]$$

sau

$$\div [10a + b] . [10a + 10 + c] . [10a + 20 + d] . [10a + 30 + e]$$

şi presupunând progresia crescătoare, avem

$$(1) \quad b + r = 10 + c \ , \ b + 2r = 20 + d \ , \ b + 3r = 30 + e.$$

Pentru $r \leqslant 5$, cel puţin 2 din 3 termeni consecutivi fac neapărat parte din aceeaşi decadă. Rămâne deci de examinat numai $r > 5$.

Pentru $r = 6$, (1) dă

$$b = 4 + c = 8 + d = 12 + e > 10$$

deci imposibilitate.

Dacă $r = 7$, din (1) se deduce

$$b = 3 + c = 6 + d = 9 + l \quad \therefore \quad l = 0$$

ceea ce nu se poate, în condiţiile enunţului.

Fie $r = 8$. Condiţiile (1) dau

$$b = 2 + c = 4 + d = 6 + e$$

care are loc pentru

e	1	1	3
d	3	4	5
c	5	6	7
b	7	8	9

Progresia căutată devine, pentru prima coloană de valori din acest tabel,

$$\div [10a + 7] . [10a + 15] . [10a + 23] . [10a + 31].$$

Dând aci lui a pe rând valorile rămase, 2, 4, 6, 9 nu se găseşte nicio progresie în condiţiile enunţului.

Se ajunge la acelaşi rezultat şi pentru celelalte 2 serii de valori ale tabelului precedent.

Deci $r = 8$, *nu dă nicio soluţie.*

Luând $r = 9$ şi procedând la fel găsim următoarele 2 soluţii ale problemei

$$\div 18.27.36.45 \quad \text{şi} \quad \div 54.63.72.81$$

cu raţia 9.

Notă. 1°. Soluţia precedentă este redijată după impecabila şi complecta soluţie trimisă de D-şoara LIDIA TUDORAN. Regretăm că spaţiul şi mijloacele reduse ne împiedecă a fotografia complecta sa soluţie. Modul cum D-şoara L. TUDORAN prezintă soluţiile se poate vedea în fotografia dela pag. 341, Vol. XLVII a soluţiei problemei 5569.

2°. Dacă se înseamnă cu S suma termenilor progresiei căutate şi se observă că $S + r$ este mult. de 9, căci suma cifrelor termenilor şi al raţie este 45, atunci se găşeşte că trebuie avut

$$S + r = 36(a + 1) + 4(a + b + 1) + 7r = 9m$$

deci
$$4(a + b + 1) + 7r = 9m.$$

Sâu
$$S + r = 4 \times ab + 7r = 9m.$$

Se dă lui r valori mai mari ca 5 şi se duc valorile corespunzătoare ale lui ab. Pentru $r = 9$, se vede că $ab = 9p$, deci unul din numerele

$$18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ 63,$$

căci în ultimele 3 decade nu mai trebuie căutat ab. Se găsesc cele 2 progresii dela soluţia precedentă.

3°. Au găsit soluţiile exacte D-nii: I. C. NEGRESCU (Lic. „Sp. Haret", Bucureşti); C. GH. CRUCERU (Elev-inginer, Bucureşti); MARIN GH. POPESCU (Lic. „Brătianu", Piteşti); CEZAR DUMITRESCU, I. POPESCU-GREACA, VIRG. RAICU, C. V. DIACONESCU (Lic. militar Câmpul-Lung); G. VOICU (Şc. Ofiţeri de aviaţie, Bucureşti); R. P. VOINEA (Lic. „Fraţii Buzeşti", Craiova) şi E. WEGENER (Bacalaureat, Bucureşti).

4°. D-nii D. D. BOIANGIU (Elev-inginer, Bucureşti) şi DORU MUSCELEANU (Lic. Caracal) au găsit numai prima progresie.

5°. Pentru progresiile de 5 termeni, ca de exemplu

$$\div 10.32.54.76.98$$

care utilizează toate cele 10 cifre, a se vedea problema 4964 rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, pag. 160 şi exerciţiul T. C. 235, propus în *Suplimentul cu Exerciţii*, Vol. VI, pag. 22.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5614. *Se dă expresia*

$$E = m\left[\frac{x\sin\theta_1}{i_2} + \frac{y\cos\theta_1}{i_1}\right]$$

şi relaţiile

$$z = x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2$$

$$i = i_1\cos^2\theta_2 + i_2\sin^2\theta_2$$

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{i_1}{i_2}\operatorname{tg}\theta_1 .$$

Să se elimine i_1, i_2, x, y, θ_1 *şi* θ_2 *aflându-se expresia* E, *în funcţie de* z, i, θ.

C. C. T.

Vom scrie expresiunea

$$E = m\left(y + x\operatorname{tg}\theta_1\frac{i_1}{i_2}\right)\frac{i_2\cos\theta_1}{i_1 i_2}$$

ţinând seamă de ultima relaţie vom scrie, înmulţind şi împărţind cu i

$$E = \frac{m(y + x\operatorname{tg}\theta_2)}{i}\,\frac{\cos\theta_1}{i_1}\,(i_1\cos^2\theta_2 + i_2\sin^2\theta_2)$$

$$= \frac{m(y\cos\theta_2 + x\sin\theta_2)}{i}\,\frac{\cos\theta_1}{i_1\cos\theta_2}\,(i_1\cos^2\theta_2 + i_2\sin^2\theta_2)$$

$$= \frac{mz}{i}\left(\cos\theta_1\cos_2 + \frac{i_2}{i_1}\operatorname{tg}\theta_2 \,.\, \sin\theta_2\cos\theta_1\right)$$

ori, ţinând seamă de relaţia ultimă se vede că paranteza este $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta$, deci

$$E = \frac{mz\cos\theta}{i}.$$

Au dat soluţii bune, pe căi mai lungi, D-nii: C. C. ILIESCU, JURIST V. VLAD, I. PURICA (Liceul militar „N. Filipescu", Predeal), A. H. CUBAT (Liceul de aplicaţie, Iaşi), C. D. EFTIMIE (elev-inginer), Locot. M. GRUMĂZESCU şi D. GH. VASILIU (Liceul militar, Iaşi).

PROBLEMA 5628. *Din punctul cel mai de sus al unei emisfere de rază* R *se asvârlă un proiectil sub unghiul* α *față de orizontală. Să se determine viteza inițială minimă, pentru ca emisfera să nu fie atinsă. Să se studieze variația acestei viteze inițiale minime pentru unghiurile* α *cuprinse între* O *și* $\frac{\pi}{2}$.

GABRIELA ȚIȚEICA.

Soluție dată de D-l CLAUDIU SENI (Bacalaureat, București).

Luând origina axelor Ox orizontală și Oy verticală în sus în punctul de aruncare al proiectilului, avem, exprimând că pentru v_{minim} proiectilul trece prin punctul de intersecție al cercului mare al emisferei cu solul:

$$(1) \qquad v_{min} \cos\alpha t = R$$

$$(2) \qquad v_{min} \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} + R = 0$$

din (1): $t = \dfrac{2}{v_{min} \cos\alpha}$; introdus în (2):

$$tg\alpha - \frac{g}{2} \frac{R}{v_{min}^2 \cos^2\alpha} + 1 = 0$$

de unde găsim:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{gR}{2\cos^2\alpha (1 + tg\alpha)}} = \sqrt{\frac{gR(1 + tg^2\alpha)}{2(1 + tg\alpha)}}$$

ca, valoare minimă a vitezei pentru un α dat.

Să determinăm acum pentru ce $\measuredangle \alpha$ această valoare minimă are valoarea cea mai mică sau cea mai mare. Vom deriva expresia sa în raport cu α și vom anula rezultatul:

$$d\left[\frac{1 + tg^2\alpha}{1 + tg\alpha}\right] = (1 + tg\alpha)\left(\frac{2\sin\alpha \cos\alpha}{\cos^4\alpha}\right) - \frac{1 + tg^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 0$$

adică

$$tg^2 + 2tg\alpha - 1 = 0$$

$$tg\alpha = -1 \pm \sqrt{2} \qquad \alpha = \frac{\pi}{8} = 22^{\circ}30'$$

pentru acest α

$$v_{min} = \sqrt{gR(\sqrt{2} - 1)}$$

(semnul — în expresia lui $tg\alpha$ nu convine).

Se vede de asemenea că pentru $\pi = \frac{\pi}{2}$, $v = \infty$ care e cealaltă valoare extremă.

G. Ţ.

S'au mai primit soluţii cu oarecare greşeli de calcul dela D-nii: C-TIN PANTELIMON (Şc. de Ofiţeri Art. Antiaeriană) şi D. BOIANGIU (Politehnica Bucureşti).

PROBLEMA 5629. *Acţiunea unui cutremur asupra unui bloc paralelipipedic drept, omogen, de greutate* G, *cu baza orizontală un patrat de latură* a *şi de înălţime* h, *fiind asimilată unei percusiuni orizontale* P *să se determine:* 1° *poziţia axei instantanee de rotaţie pentru o direcţie şi un punct de aplicaţie oarecare a percusiunii date;* 2° *condiţiile pentru ca tendinţa de mişcare a blocului în urma cutremurului să fie sau o răsturnare în jurul unei axe orizontale sau o răsucire în jurul verticalei;* 3° *forţele normale centrifugale de inerţie ce acţionează blocul după percusiune.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Considerând sistemul de referinţă $Oxyz$ din figură (O fiind centrul paralelipipedului), notând cu P *percusiunea orizontală* aplicată în punctul $M_p(x_p, y_p, z_p)$ şi cu α unghiul ce-l face această percusiune cu axa Ox avem:

$$P_x = P\cos\alpha \quad ; \quad P_y = P\sin\alpha \quad ; \quad P_z = 0.$$

Aplicând teorema variaţiei *proiecţiunii cantităţilor de mişcare* în raport cu axele Ox, Oy, Oz, obţinem ecuaţiile:

$$\frac{G}{g}\cdot v_x = P\cos\alpha \quad ; \quad \frac{G}{g}\cdot v_y = P\sin\alpha \quad ; \quad \frac{G}{g}\cdot v_z = 0 \qquad (1)$$

G fiind greutatea blocului paralelipipedic, g acceleraţia gravităţii iar v_x, v_y, v_z componentele după cele trei axe ale iuţelii centrului de greutate O după percusiune.

Rezultă:

$$v_x = \frac{gP}{G}\cos\alpha \quad ; \quad v_y = \frac{gP}{G}\sin\alpha \quad ; \quad v_z = 0$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{gP}{G} \quad ; \quad \sphericalangle (v, Ox) = \alpha.$$

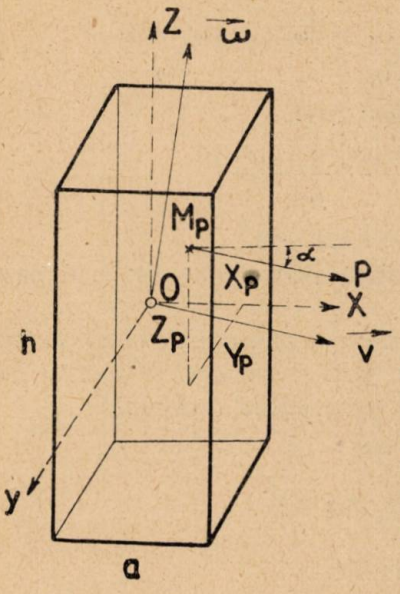


Fig. 1.

Prin aplicarea teoremei *variației momentelor cantităților de mișcare* în raport cu axele sistemului de referință $Oxyz$ obținem ecuațiile:

$$\begin{aligned} I_x\,\omega_x &= -Pz_p\sin\alpha\,; \\ I_y\,\omega_y &= Pz_p\cos\alpha \qquad (2) \\ I_z\,\omega_z &= Px_p\sin\alpha - Py_p\cos\alpha \end{aligned}$$

în care I_x, I_y, I_z sunt momentele de inerție ale blocului paralelipipedic după cele trei axe Ox, Oy, Ox iar ω_x, ω_y, ω_z componentele după aceleași axe ale iuțelii de rotație ω a paralelipipedului în jurul unei axe trecând prin O.

Dar:

$$I_x = I_y = \frac{G}{12g}(a^2 + h^2) \quad ; \quad I_z = \frac{G}{6g}a^2.$$

Rezultă:

$$\omega_x = -\frac{12gPz_p\sin\alpha}{G(a^2+h^2)} \quad ; \quad \omega_y = \frac{12gPz_p\cos\alpha}{G(a^2+h^2)}$$

$$\omega_z = \frac{6gP(x_p\sin\alpha - y_p\cos\alpha)}{Ga^2},$$

iar:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

$$\omega = \frac{6gP}{G}\sqrt{\frac{4z_p^2}{(a^2+h^2)^2} + \frac{(x_p\sin\alpha - y_p\cos\alpha)^2}{a^4}}$$

$$\cos(\omega, Ox) = \frac{\omega_x}{\omega} \quad ; \quad \cos(\omega, Oy) = \frac{\omega_y}{\omega} \quad ; \quad \cos(\omega, Oz) = \frac{\omega_z}{\omega}.$$

In rezumat, după ciocnire, *distribuția instantanee a iuțelilor* în interiorul paralelipipedului se face ca și cum blocul ar avea o *mișcare de translație* cu iuțeala $\vec{v}$ și *o rotație în jurul unei axe trecând prin* O cu iuțeala unghiulară $\vec{\omega}$

Compunând aceste două mișcări obținem o mișcare rezultantă de șurub cu axa:

$$\frac{v_x - y\omega_z + z\omega_y}{\omega_x} = \frac{v_y - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{y\omega_x - x\omega_y}{\omega_z} \qquad (3)$$

având *iuțeala de lunecare în lungul axei:*

$$v\cos(v,\omega) = \frac{v_x\,\omega_x + v_y\,\omega_y}{\omega}$$

cu *iuțeala de rotație* ω în jurul aceleiași axe.

Axa instantanee de rotație după percursiune ne este dată prin urmare de ecuațiile (3).

Condiția ca tendința de mișcare a blocului în urma cutremurului să fie o răsturnare în jurul unei axe orizontale se obține exprimând că ecuațiile (3) reprezintă *o orizontală:*

$$\omega_z = 0.$$

Rezultă:

$$x_p \sin\alpha - y_p \cos\alpha = 0$$

$$\frac{y_p}{x_p} = \operatorname{tg}\alpha$$

adică *percusiunea orizontală* P *se găsește într'un plan vertical ce trece prin centrul de greutate* O *al paralelipipedului.*

In acest caz axa instantanee de rotație este dreapta orizontală:

$$\frac{y}{x} = \frac{\omega_y}{\omega_x} = -\operatorname{cotg}\alpha$$

$$z = \frac{v_y\,\omega_x - v_x\,\omega_y}{\omega_x^2 + \omega_y^2} = -\frac{a^2 + h^2}{12 z_p} = -\frac{v}{\omega}$$

$$\omega = \frac{12 g P z_p}{G(a^2 + h^2)}.$$

Condiția ca tendința de mișcare a blocului în urma cutremurului să fie o răsucire se obține exprimând că ecuațiile (3) reprezintă o verticală:

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = 0.$$

Rezultă:

$$z_p = 0$$

adică *percusiunea orizontală* P *se găseşte într'un plan orizontal trecând prin centrul de greutate* O *al paralelipipedului.*

In acest caz axa instantanee de rotaţie este dreapta verticală:

$$x = -\frac{v_y}{\omega_z} = -\frac{a^2 \sin\alpha}{6(x_p \sin\alpha - y_p \cos\alpha}$$

$$y = \frac{v_x}{\omega_z} = \frac{a^2 \cos\alpha}{6(x_p \sin\alpha - y_p \cos\alpha}.$$

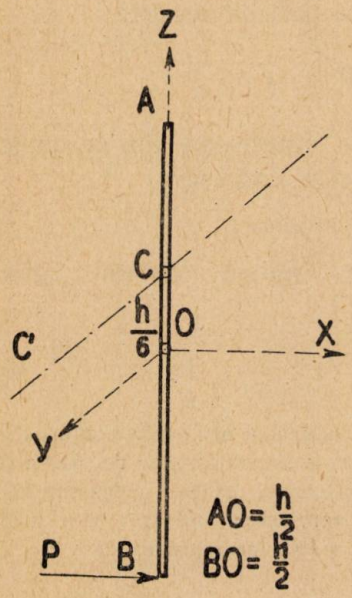


Fig. 2.

Se impune condiţia:

$$x_p \sin\alpha - y_p \cos\alpha \neq 0.$$

Pentru:

$$x_p \sin\alpha - y_p \cos\alpha = 0$$

rezultă că axa de răsucire este asvârlită la infinit ceea ce se explică prin faptul că în această ipoteză percusiunea P fiind centrică nu poate produce decât o mişcare de translaţie a blocului considerat.

Să determinăm acum forţele centrifugale de inerţie ce acţionează blocul după percusiune.

Fie un element de masă m situat la distanţa d de axa de rotaţie dată de ecuaţiile (3). Forţa elementară centrifugală de inerţie ce acţionează acest element de masă este:

$$F = md\omega^2$$

a cărei variaţie este liniară în raport cu distanţa.

Regăsim astfel repartiţia forţelor de inerţie în urma cutremurului menţionată în comunicarea D-lui Prof. Ing. A. BELEŞ despre „*Cutremure şi construcţii*".

Să considerăm cazul simplu când blocul paralelipipedic se reduce la baza verticală AB = h şi căreia i se aplică în capătul B percusiunea orizontală P.

Avem:

$$\alpha = 0 \ ; \ a = 0 \ ; \ x_p = y_p = 0 \ ; \ z_p = -\frac{h}{2}$$

$$v_x = \frac{g\mathrm{P}}{\mathrm{G}} = v \ ; \ v_y = v_z = 0$$

$$\omega_x = 0 \ ; \ \omega_y = -\frac{6g\,\mathrm{P}}{\mathrm{G}h} = \omega \ ; \ \omega_z = 0.$$

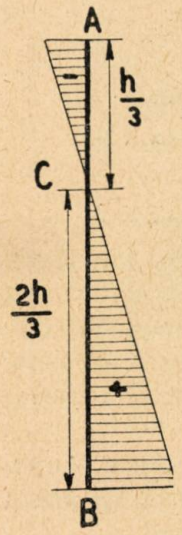


Fig. 3.

Intru cât $\omega_z = 0$, suntem în cazul când tendința de mișcare a barei este o rotație în jurul unei axe orizontale CC'.

Această axă este dată de ecuațiile:

$$x = 0 \ ; \ z = \frac{h}{6}.$$

Forța de inerție centrifugală într'un punct M situat la distanța d de axă este:

$$\mathrm{F} = md\omega^2.$$

Variația ei este liniară conform figurii următoare:

$$\mathrm{F_A} = -m\frac{h}{3}\omega^2 \ ; \ \mathrm{F_C} = 0 \ ; \ \mathrm{F_B} = m\frac{2h}{3}\omega^2.$$

Problema poate fi continuată mai departe obținându-se astfel rezultate interesante asupra forțelor de inerție ce acționează corpurile la cutremure, rezultate ce depășesc însă cadrul problemei propuse și asupra cărora vom reveni eventual cu o notă. S'au primit la această problemă două soluții incomplecte.

AL. ST.

PROBLEMA 5660. *Să se rezolve sistemul:*

$$a\sin(-x+y+z) + b\sin(x-y+z) = c$$

$$b\sin(x+y-z) + c\sin(-x+y+z) = b$$

$$c\sin(x-y+z) + a\sin(x+y-z) = a$$

unde a, b, c sunt laturile unui triunghiu oarecare dat.

VIRGIL GHIȚESCU.

Punând

$$\sin(-x+y+z)=u \quad , \quad \sin(x-y+z)=v$$
$$\sin(x+y-z)=w,$$

sistemul propus devine

$$au+bv=c \quad , \quad bw+cu=a \quad , \quad cv+aw=b.$$

Rezolvind acest sistem, fie prin metodele obişnuite, fie prin regula lui CRAMER, obţinem:

$$u=\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac} \qquad v=\frac{-a^2+b^3+c^2}{2bc} \qquad w=\frac{a^2+b^2-a^2}{2ab}.$$

Aplicând acum cele cunoscute din Trigonometrie, vom avea

$$\sin(-x+y+z)=\cos B$$
$$\sin(x-y+z)=\cos A$$
$$\sin(x+y-z)=\cos C.$$

Deci respectiv:

$$-x+y+z+B=2k_1\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$x-y+z+A=2k_2\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$x+y-z+C=2k_3\pi+\frac{\pi}{2}.$$

Rezolvind şi acest sistem obţinem final:

$$x=(k_2+k_3)\pi+\frac{B}{2}=k\pi+\frac{B}{2}$$

$$y=(k_1+k_3)\pi+\frac{A}{2}=k'\pi+\frac{A}{2}$$

$$z=(k_1+k_2)\pi+\frac{C}{2}=k''\pi+\frac{C}{2}$$

numerele k fiind întregi, iar A, B, C unghiurile triunghiului dat.

STELIAN D. FLORICĂ
Elev clasa VIII-a
Liceul Dr. Meşotă-Braşov.

Soluţiuni bune au dat D-nii: DAN A. CORBARU, AUREL H. CUBAT, TIGRAN DIMITRIU, I. N. GLIGOR, LT. M. GRUMĂZESCU, N. IONESCU, VIOREL I. AL. MARINESCU, S.-LT. C. PANTELIMON, CLAUDIU SENI şi V. GH. TĂNĂSESCU.

Notă. Majoritatea corespondenţilor au rezolvat sistemul propus punând dela început în părţile a 2-a ale ecuaţiilor, respectiv c, a, b în virtutea permutărilor circulare. Alţii au rezolvat aşa cum a apărut tipărit, discutând apoi rezultatele găsite.

V. GH.

EXERCIŢII

8. Se cer patratele de 7 cifre de forma *abcdeba.*

S-LT. M. AL. VASILESCU-STABU.

R. Rădăcina unui patrat de 7 cifre este de 4 cifre; fie $xyzt$ acea rădăcină. Cifra a, fiind terminaţie de patrat poate avea valorile 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Fie $a = 0 \quad \therefore \quad b = 0$ şi deci problema se reduce la a găsi patratul de 3 cifre de forma *cdc.* Examinând terminaţiile de patrate se găsesc soluţiile

$$11^2 = 121 \quad ; \quad 22^2 = 484 \quad \text{şi} \quad 26^2 = 676.$$

Luăm $a = 1$. Efectuând ridicarea la patrat a lui $xyzt$ după regula aritmetică se vede că prima cifră a patratului căutat se obţine din x^2 la care se adaogă eventual un rest ε rezultat din adunarea coloanei precedente a produselor parţiale. Ori această sumă trebuind să fie $a = 1$ nu putem avea decât

$$x^2 + \varepsilon = 1 \quad \therefore \quad x = 1 \quad \text{şi} \quad \varepsilon = 0 \quad \text{sau} \quad x = 0 \quad \text{şi} \quad \varepsilon = 10$$

$x = 0$ trebuie eliminat căci yzt^2 este maximum de 6 cifre şi atunci $a = 0$ contra ipotezei. Deci $x = 1$. Refacem acum calculul de ridicare la patrat şi anume

			1	y	z	1
			1	y	z	1
			1	y	z	1
		z	zy	z^2	z	
	y	y^2	yz	y		
1	y	z	1			
1	b	.	.	.	b	1

Se vede că $2z$ şi $2y + \varepsilon$ trebuie să se termine cu aceeaşi cifră b care poate avea valorile 0, 2, 4, 6, 8 (*Culegere de probleme de Aritmetică*, ed. II, de I. IONESCU, pag. 267). Dăm lui b valoarea zero. Trebuie ca z să fie 0 sau 5. Refac tabloul precedent şi nu găsesc valori acceptabile pentru y. La fel pentru $b = 5$.

Pentru $b = 2$ găsim $y = 1$ şi apoi continuând găsim $z = 1$ de unde soluţia

$$1111^2 = 1234321.$$

Continuând, nu mai găsim altă soluţie. Problema are şi următoarele 3 soluţii formale

$$0110^2 = 0012100 \ ; \ 0220^2 = 0048400 \ ; \ 0260^2 = 0067600.$$

9. Fie A', B', C' punctele de tangenţă ale laturilor unui triunghiu ABC cu cercul său înscris. Să se arate că între suprafaţa S a triunghiului ABC, raza R a cercului ABC şi raza ρ a cercului înscris în triunghiul A'B'C' există relaţia

$$S = R\rho.$$

E. N. WEGENER.

R. In triunghiul A'B'C' avem

$$A' = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \ ; \ B' = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \ ; \ C' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$a' = 2r\cos\frac{A}{2} \ ; \ b' = 2r\cos\frac{B}{2} \ ; \ c' = 2r\cos\frac{C}{2}$$

r fiind raza cercului înscris în ABC.

Se ştie că

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Aplicând această formulă triunghiului A'B'C' găsim

$$\rho = 4r\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

şi ţinând seamă de

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$$

rezultă

$$\rho = 4r\frac{p}{4R} = \frac{pr}{R} = \frac{S}{R}.$$

PROBLEME PROPUSE

5056 [1]). Care este cubul la care putem obține bipatratul corespunzător înlocuind prima cifră dela stânga prin suma cifrelor extreme ?

I. IONESCU.

5575 [2]). Să se demonstreze că condiția necesară și suficientă ca un patrulater convex ABCD, de laturi consecutive a, b, c, d, să fie inscriptibil este ca o singură diagonală să fie dată de

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

M. GHERMĂNESCU.

5727. Să se arate că între 1 și N sunt mai puține numere prime decât între N și N^2 și mai multe decât între N și 2N.

COMANDOR I. LINTEȘ.

5728. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n}{x_n} = 0.$$

In particular, să se determine toate numerele întregi care verifică egalitatea:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}.$$

IOAN B. FLORESCU.

5729. Fie $N = A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots L^{\lambda}$. Ori cum am descompune numerele n, α, $\beta, \ldots, \lambda$ în același număr de termeni:

$$\sum_1^k n_i = n; \quad \sum_1^k \alpha_i = \alpha; \quad \sum_1^k \beta_i = \beta; \ldots; \quad \sum_1^k \lambda_i = \lambda$$

produsele:

$$\prod_1^k \varphi\left[A^{\alpha \pm \alpha_i} \cdot B^{\beta \pm \beta_i} \ldots L^{\lambda \pm \lambda_i}\right]$$

---

1) Problema 5056, propusă la pag. 224, Vol. XLIV fiind identică cu problema 4982, propusă la pag. 615, Vol. XLIII se înlocuiește cu prezenta.

2) Această problemă înlocuiește problema 5575, care este cunoscută. Vezi „Culegere" de A. G. IOACHIMESCU.

şi

$$\prod_{1}^{k} \varphi\left[A^{\alpha(1\pm n_i)+\alpha_i} \cdot B^{\beta(1\pm n_i)+\beta_i} \ldots L^{\lambda(1\pm n_i)\pm\lambda_i}\right],$$

unde $\varphi(u)$ reprezintă numerele prime cu u şi mai mici ca el, sunt constante.

P. P. DRĂGHICESCU.

5730. a, b, c fiind rădăcinile ecuaţiei

$$x^3 - px - q = 0,$$

să se afle ecuaţia ale cărei rădăcini sunt:

$$\frac{a^2}{bc} \cdot \frac{a^2-bc}{b^2+c^2}\,;\ \frac{b^2}{ca} \cdot \frac{b^2-ca}{c^2+a^2}\,;\ \frac{c^2}{ab} \cdot \frac{c^2-ab}{a^2+b^2}.$$

CPT. EUG. ST. IACOB.

5731. Să se discute rădăcinile ecuaţiei

$$\pm\sqrt{x^2+4a^2} \pm \sqrt{x^2+4b^2} \pm \sqrt{x^2+4c^2} = A,$$

unde A, a, b, c sunt constante date, iar înaintea radicalilor sunt *unul* sau *trei* semne $+$.

Să se tragă concluzii pentru soluţia problemei 2694 (G. M., XLV, p. 201).

M. GHERMĂNESCU.

5732. Să se rezolve ecuaţia:

$$x + \sum_{k=0}^{3} \operatorname{cotg}\left(\frac{k\pi}{4}+x\right) \sum_{k=0}^{3} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{8} - x\right] = 17.$$

V. ALACI.

5733. In triunghiul ABC se consideră cevienele punctului I şi polarele în raport de unghiurile respective ale acestora. Paralelele la laturi, duse prin I, taie polarele corespunzătoare unghiurilor opuse în trei puncte pe o paralelă la axa de omologie a triunghiului ABC şi triunghiului pedal al punctului I.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5734. Fie M centrul izodinamic intern al unui triunghiu ABC înscris în cercul O şi a, a' picioarele a două izogonale Aa, Aa' în unghiul A. Pentru a uşura construcţiile se vor lua a şi a' între B şi C. Cercul BMC întâlneşte în a_1 şi a_1' pe Ma şi Ma', iar

a_1a_1' taie în C' şi B' pe MC şi MB. Prin C' şi B' se duc paralele la CA şi BA, care sunt întâlnite respectiv în b_1, b_1' şi c_1, c_1' de cercul cu centrul în O şi trecând prin a_1, a_1'.

Să se demonstreze: 1°. Că Mb_1, Mb_1' şi Mc_1, MC_1' sunt izogonale respectiv în unghiurile CMA şi BMA.

2°. Că pentagoanele b_1CMAb_1' şi c_1BMA_1' sunt inscriptibile.

G-L GH. BUICLIU.

5735. Fie A', B', C' picioarele cevienelor AM, BM, CM în triunghiul ABC. Se cere:

1°. Locul lui M pentru care aria A'B'C' este constantă.

2°. Să se construiască locul lui M pentru care aria triunghiului A'B'C' este egală cu aria triunghiului ABC.

I. ST. TEODORESCU.

5736. Intr'un patrupunct $A_0A_1A_2A_3$ se duc dreptele comune involuţiei determinate de direcţiile perechilor de diagonale A_0A_i, A_jA_k cu fiecare din involuţiile care au aceste perechi de diagonale ca drepte duble. Să se arate că (excluzând cazul unui patrupunct ortic) există un punct P din care cele opt cercuri circumscrise triunghiurilor $\Delta_1^{\varepsilon_1}\Delta_2^{\varepsilon_2}\Delta_3^{\varepsilon_3}$ ($\varepsilon_i = \pm$) se văd sub acelaşi unghiu.

D. BARBILIAN.

5737. Se consideră triunghiurile (T) înscrise în cercul (O) fix şi circumscrise conicei (Σ) de asemeni fixă. Să se demonstreze că locul geometric al punctelor invers isogonale unui punct fix, în raport cu triunghiul (T) este un cerc. Acest cerc se descompune, dacă conica (Σ) este o paralelă sau dacă punctul fix este situat pe cercul (O).

ŞERBAN GHEORGHIU.

5738. La capetele unei bare orizontale de lungime l sunt fixate două bile. Pe bară se mişcă cu frecare (coeficientul de frecare fiind μ) o mărgea de greutate G. Cunoscând coeficientul de elasticitate k al mărgelei, se cere viteza cu care trebuie lansată mărgeaua dintr'o extremitate a barei, pentru a lovi de n ori bila dela cealaltă extremitate. In ce caz, pentru $n = 1$, mărgeaua rămâne la această extremitate? Să se examineze cazul $n = \infty$.

EMIL S. MODÂLCĂ.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea V. M. (5284, 598, 606, 09, 18, 20, 26, 32, 37, 44, 45, 49, 59, 60, 76, 95, 98); *Bakonyi C.* (5537, 40, 47, 48, 67, 88, 626, 32, 48, 50, 59, 702); *Bereanu B.* (5706, N); *Chiţulescu Traian* (5703); *Coca Nicolae* (5706); *Columbeanu D. M.* (5677); *Constantinescu I. M.* (5703); *Coman Emil* (5692); *Cotariu D. M.* (5602, 31, 37, 59, 84, 94, 98, 703, 04, 07, 22, N); *Cubat H. A.* (1702, 4812, 5609, 43, 44, 69, 92, 706, 07, 17); *Dimitriu Tigran* (5637, 49, 83); *Donţu Gh. G.* (5677); *Drăghicescu P. P.* (5692, 94, 95, 703, 04, N); *Dumitrescu Gh. Tr.* (5649, 706); *Enăchescu Gr. I.* (5575, 87, 648, 57, 59); *Floricâ Stelian* (5703); *Gheorghiu C. Oct.* (5136, 469, 649, 59, 703); *Grumăzescu M.* Subloc. (5172); *Iacob St. E.* Căpit. (4880, 5171, 518, 684); *Ionescu F. P.* (5291, 649, 703, 04, 07); *Ionescu-Ţiu C.* Căpit. (5397); *Manolache C. M.* (5722, 25); *Mişicu V. M.* (5693, 94, 98); *Oprea D. Gh.* (5657); *Pântea P. T.* (5657); *Popescu I. Gh.* G-l (P); *Pitiş L. N.* (5649, 94, 703); *Rădoiu N. N.* (5657, 707); *Staicu C.* (5291, 303, 703, 04); *Voinea P. R.* (4473, 5072, 644, 52, 94, 95, 703, 04, 06, 07, N).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face pe dimensiunea cea mică, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 200

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 84.037

M2539

Biblioteca ASTRA SIBIU

MAR 2014

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1943

SUMARUL

1. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
2. Câteva aplicaţiuni ale coordonatelor isotrope (urmare şi sfârşit) . . . . . *Şerban Gheorghiu*
3. Raportul comisiunii pentru acordarea premiului „Nicolae G. Botea“ . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 22 — 26.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Probleme rezolvate: 4389, 5001, 5181, 5368, 5379, 5445, 5473, 5504, 5507, 5562.
8. Exerciţii: 10 — 14.
9. Probleme propuse: 5739 — 5749.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

74317

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea **„Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, inginer şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 53)

Variațiile infinitizimale substanțiale ale funcțiunilor scalare și vectoriale.

Prin variațiile infinitizimale substanțiale ale unei funcțiuni scalare sau vectoriale $\{V, \mathfrak{F}\}$ se înțelege variația infinitizimală a acelor funcțiuni față de un punct material mobil.

Vom obține

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial l}\,dl = \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + (d\mathfrak{r}\,\nabla)\,V$$

$$d\mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\,dt + \frac{\overleftarrow{\partial} \mathfrak{F}}{\partial l}\,dl = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\,dt + (d\mathfrak{r}\,\nabla)\,\mathfrak{F}.$$

Adică se consideră mai întâi variația infinitizimală a funcțiunii în raport cu timpul, ca și cum punctul material acolo unde se găsește la un moment dat ar fi fix în spațiu (variația locală) și apoi variația infinitizimală în raport cu direcția ca și cum în raport cu timpul funcția ar fi constantă (variația staționară). Vectorul infinitizimal $d\mathfrak{l}$ îl exprimăm prin $d\mathfrak{r}$, admițând că punctele $P_1 P_2$ care se găsesc la o distanță infinitizimală sunt exprimate prin vectorii de rază $\mathfrak{r}$ și $\mathfrak{r} + d\mathfrak{r}$.

Derivatele substanțiale vor lua forma următoare:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,V \qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{F}$$

în care s'a pus $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$.

Ca exemplu, să exprimăm accelerația $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ a unei părticele foarte mici de apă, care face parte dintr'un anumit curent de apă.

Vom avea $\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v}$ în care $\frac{\partial V}{\partial t}$ reprezintă variația vitezei în unitatea de timp în acel punct fix din curentul de apă, unde se găsește părticica de apă la un moment dat, iar $(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v}$ reprezintă variația în unitatea de timp a vectorului $\mathfrak{v}$, datorit deplasării părticelei de apă în direcția lui $\mathfrak{v}$ ca și cum în raport cu timpul, în orice punct din curentul de apă, $\mathfrak{v}$ e constant.

74317

Dacă curentul de apă e lipsit de turbioni, rezultă $\operatorname{rot} v = 0$. Ţinând seamă de următoarea transformare

$$\nabla v^2 = \nabla (vv) = 2 \{(v\nabla) v + [v \operatorname{rot} v]\}$$

în care făcând $\operatorname{rot} v = 0$ (câmpul vectorial v nu posedă turbioane) obţinem:

$$(v\nabla) v = \nabla \frac{v^2}{2} = \nabla \frac{V^2}{2} = V \nabla V.$$

Dacă curentul de apă e şi staţionar, adică în orice punct fix din acel curent avem $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ rezultă

$$\frac{dv}{dt} = (v\nabla) v = \nabla \frac{v^2}{2} = V \nabla V.$$

Pentru a vedea ce ne arată egalitatea de mai sus, să ne punem problema de a determina acceleraţia unui punct material mobil:

Punând $v = V\bar{t}$ în care $V = \frac{dl}{dt}$ punem

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dV}{dt}\bar{t} + V \frac{d\bar{t}}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{dV}{dt}\bar{t} + V^2 C_t \bar{n}.$$

Dacă punem

$$\nabla = \bar{t} \frac{\partial}{\partial l_t} + \bar{n} \frac{\partial}{\partial l_n} + \bar{b} \frac{\partial}{\partial l_b}$$

vom vedea că $(v\nabla) v$ ne va da acelaşi rezultat, adică se obţine pentru derivata substanţială a vitezei faţă de o părticică de apă acelaşi vector ca şi cum părticica de apă ar fi fost singură şi s'ar fi cerut să se determine acceleraţia ei.

Avem

$$(v\nabla) v = V \frac{\partial V\bar{t}}{\partial l_t} = V \left\{ \frac{\partial V}{\partial l_t}\bar{t} + V \frac{\partial \bar{t}}{\partial l_t} \right\} = \frac{\partial V}{\partial t}\bar{t} + V^2 C_t \bar{n}$$

în care

$$V \frac{\partial V}{\partial l_t} = \frac{\partial l_t}{\partial l} \frac{\partial V}{\partial l_t} = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Pe de altă parte ţinând seamă de $\frac{dv}{dt} = V\nabla V$ rezultă, că liniile de forţă ale câmpului ∇V se confundă cu liniile de forţă ale acceleraţiei. Cele arătate aci sunt valabile, pentru un curent de apă staţionar şi lipsit de turbioane.

Determinarea derivatelor substanţiale.

$$\frac{d}{dt}\int d\ell V;\ \frac{d}{dt}\int (d\ell \mathfrak{F});\ \frac{d}{dt}\int d_s V;$$

$$\frac{d}{dt}\int (d_s \mathfrak{F});\ \frac{d}{dt}\int d\sigma V;\ \frac{d}{dt}\int d\sigma \mathfrak{F}.$$

Mai întâi determinăm variaţiile infinitizimale substanţiale ale mărimilor $\{d\ell V\}$, $(d\ell \mathfrak{F})$, $\{d_s V\}$, $(d_s \mathfrak{F})$, $\{d\sigma V\}$, $\{d\sigma \mathfrak{F}\}$ în care elementele de linie, suprafaţă şi volum sunt mobile şi deformabile.

Avem:

1. $d\{d\ell V\} = d\ell \frac{\partial V}{dt} dt + (dr\,\nabla)\{d\ell V\}$

2. $d(d\ell \mathfrak{F}) = \left(d\ell \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right) dt + (dr\,\nabla)(d\ell \mathfrak{F})$

3. $d\{d_s V\} = d_s \frac{\partial V}{\partial t} dt + (dr\,\nabla)\{d_s V\}$

4. $d(d_s \mathfrak{F}) = \left(d_s \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right) dt + (dr\,\nabla)(d_s \mathfrak{F})$

5. $d\{d\sigma V\} = d\sigma \frac{\partial V}{\partial t} dt + (dr\,\nabla)\{d\sigma V\}$

6. $d\{d\sigma \mathfrak{F}\} = d\sigma \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} dt + (dr\,\nabla)\{d\sigma \mathfrak{F}\}.$

Cazul 1.

Expresia $(dr\,\nabla)\{d\ell V\}$ ia forma:

$$(dr\,\nabla)\{d\ell V\} = d\ell\,(dr\,\nabla)V + V(dr\,\nabla)d\ell.$$

Ţinând seama de figura 61, în care admitem că $d\ell_1$ se deplasează după vectorul dr şi se deformează, devenind $d\ell_2$, sau dr se deplasează după $d\ell_1$ şi devine dr_2, rezultă:

$$(dr\,\nabla)\,d\ell = d\ell\,\nabla)\,dr$$

Aşa dar:

$$(d_r \nabla)\{d_l \mathrm{V}\} = d_l (d_r \nabla)\mathrm{V} + \mathrm{V}(d_l \nabla) d_r.$$

Ca urmare:

$$d\{d_l \mathrm{V}\} = d_l \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} dt + d_l (d_r \nabla)\mathrm{V} + \mathrm{V}(d_l \nabla) d_r$$

$$\frac{d}{dt}\{d_l \mathrm{V}\} = d_l \left\{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + (v\nabla)\,\mathrm{V}\right\} + \mathrm{V}(d_l \nabla) v.$$

Astfel că:

$$\frac{d}{dt}\int d_l \mathrm{V} = \int \frac{d}{dt}\{d_l \mathrm{V}\} = \int d_l \left\{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + (v\nabla)\mathrm{V}\right\} + \int \mathrm{V}(d_l \nabla) v.$$

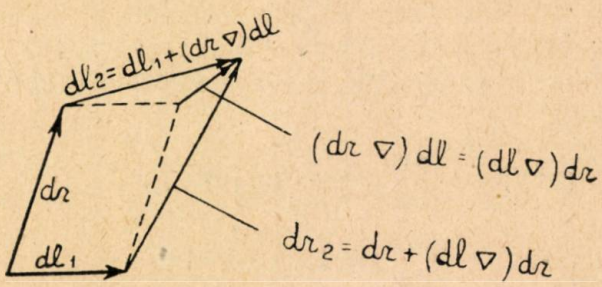


Fig. 61. Deplasarea elementului $d\ell_1$ după d_r sau a lui d_r după $d\ell_1$.

Cazul 2.

Expresia $(d_r \nabla)(d_l \mathfrak{F})$ ia forma:

$$(d_r \nabla)(d_l \mathfrak{F}) = (d_l (d_r \nabla)\mathfrak{F}) + (\mathfrak{F}(d_r \nabla) d_l =$$

$$= (d_l (d_r \nabla)\mathfrak{F}) + (\mathfrak{F}(d_l \nabla) d_r)$$

în care:

$$(\mathfrak{F}(d_l \nabla)(d_r) = (d_l \nabla)(d_r \underset{\mathrm{T}}{\mathfrak{F}}).$$

Ţinând seamă de:

$$(d_l \nabla)(d_r \mathfrak{F}) = (d_l \nabla)(d_r \underset{\mathrm{T}}{\mathfrak{F}}) + (d_l \nabla)(\underset{\mathrm{T}}{d_r \mathfrak{F}})$$

rezultă:

$$(d_l \nabla)(d_r \underset{\mathrm{T}}{\mathfrak{F}}) = (d_l \nabla)(d_r \mathfrak{F}) - (d_l \nabla)(\underset{\mathrm{T}}{d_r \mathfrak{F}}) =$$

$$= (d_l \nabla)(d_r \mathfrak{F}) - (d_l \{(d_r \nabla)\mathfrak{F} + [d_r \operatorname{rot} \mathfrak{F}]\})$$

deci:

$$(d_r \nabla)(d_l \mathfrak{F}) = (d_l \nabla)(d_r \mathfrak{F}) + (d_l [\operatorname{rot} \mathfrak{F}\, d_r]).$$

Astfel că:

$$d(d\ell\,\mathfrak{F}) = (d\ell\,\{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}dt + \nabla(d_r\mathfrak{F}) + [\mathrm{rot}\,\mathfrak{F}\,d_r]\})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{F}\,d\ell) = (d\ell\,\{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \nabla(v\mathfrak{F}) + [\mathrm{rot}\,\mathfrak{F}\,v]\})$$

$$\frac{d}{dt}\int(\mathfrak{F}\,d\ell) = \int\frac{d}{dt}(\mathfrak{F}\,d\ell) = \int(d\ell\,\{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \nabla(v\mathfrak{F}) + [\mathrm{rot}\,\mathfrak{F}v]\}).$$

Cazul 3.

Expresia $(d_r\nabla)\{d_\sigma V\}$ ia forma:

$$(d_r\nabla)\{d_\sigma V\} = d_\sigma(d_r\nabla)V + V(d_r\nabla)d_\sigma.$$

In figura 62 se vede cum elementul de suprafață $\triangle\sigma_1$ se deplasează după d_r și ia forma $\triangle\sigma_2$.

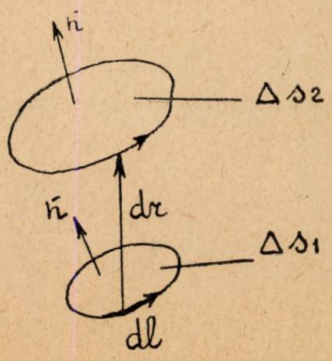


Fig. 62. Deplasarea infinitizimală a elementului $\Delta\sigma$.

Fixând vectorul unitar normal $\bar{n}$ cu ajutorul regulei tirbușonului, obținem pentru întreaga suprafață formată din $\triangle\sigma_1$, $\triangle\sigma_2$ și $\Sigma[d\ell\,d_r]$ făcând suma lor, valoarea zero.

$$\triangle\sigma_2 - \triangle\sigma_1 + \Sigma[d\ell\,d_r] = 0$$

în care:

$$\triangle\sigma_2 - \triangle\sigma_1 = \Sigma\{(d_r\nabla)d_\sigma\}$$

astfel că:

$$(d_2 \nabla)\, d_1 = -[d^1 d_2] = -[[d_1 \nabla]\, d_2] = d_1 (\nabla\, d_2) - \nabla\, (\underset{T}{d_1\, d_2})$$

în care d^1 e înlocuit prin $[d_1 \nabla]$ [1]).

Aşa dar:

$$(d_2 \nabla)\, \{ d_1 V \} = d_1 \{ (d_2 \nabla) V \} + V (\nabla\, d_2) - V\, (\underset{T}{d_1\, d_2}) =$$

$$= d_1 (\nabla\, d_2) V - V \nabla\, (\underset{T}{d_1\, d_2})$$

$$d \{ d_1 V \} = d_1 \{ \frac{\partial V}{\partial t} dt + (\nabla\, d_2) V \} - V \nabla\, (\underset{T}{d_1\, d_2})$$

$$\frac{d}{dt} \{ d_1 V \} = d_1 \{ \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla v) V \} - V \nabla\, (\underset{T}{d_1\, v})$$

de unde rezultă:

$$\frac{d}{dt} \int \{ d_1 V \} = \int \frac{d}{dt} \{ d_1 V \} = \int d_1 \{ \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla v) V \} - \int V \nabla\, (\underset{T}{d_1\, v}).$$

Cazul 4.

Expresia $(d_2 \nabla)\, (d_1 \mathfrak{F})$ ia forma:

$$(d_2 \nabla)\, (d_1 \mathfrak{F}) = (d_1\, (d_2 \nabla)\, \mathfrak{F}) + (\mathfrak{F}\, (d_2 \nabla)\, d_1)$$

în care

$$(\mathfrak{F}\, (d_2 \nabla)\, d_1) = -(\mathfrak{F}\, [d^1 d_2]) = -(\mathfrak{F}\, [[d_1 \nabla]\, d_2]) =$$

$$= (\mathfrak{F}\, d_1)\, (\nabla\, d_2) - \mathfrak{F} \nabla)\, (\underset{T}{d_1\, d_2}).$$

---

1) Ştim că integralul $\int\limits_{\varphi} (d^1 \mathfrak{F})$ se transformă fie în integralul $\int (d_1 [\nabla\, \mathfrak{F}])$ sau în $\int ([d_1 \nabla]\, \mathfrak{F})$.

Când se formează însă $\int\limits_{\varphi} [d^1 \mathfrak{F}]$ aceasta se poate transforma numai în forma $\int [[d_1 \nabla]\, \mathfrak{F}]$ ceea ce se poate uşor verifica în felul următor:

Formăm:

$$(\mathfrak{C} \int [d^1 \mathfrak{F}]) = \int (d^1 [\mathfrak{F}\, \mathfrak{C}]) = \int (d_1 [\nabla\, [\mathfrak{F}\, \mathfrak{C}]]) = \int ([d_1 \nabla]\, [\mathfrak{F}\, \mathfrak{C}]) = \int (\mathfrak{C}\, [[d_1 \nabla]\, \mathfrak{F}])$$

deci $\int [d^1 \mathfrak{F}] = \int [[d_1 \nabla]\, \mathfrak{F}]$. Dacă am utiliza egalitatea $(\mathfrak{C} \int [d^1 \mathfrak{F}]) = \int (d_1 [\nabla\, [\mathfrak{F}\, \mathfrak{C}]])$ s'ar obţine $(\mathfrak{C} \int [d^1 \mathfrak{F}]) = \int (d_1\, (\mathfrak{C}\, \nabla)\, \mathfrak{F}) - (\mathfrak{C} \int d_1 \operatorname{div} \mathfrak{F})$ o transformare care nu e prielnică de a fi utilizată în exemplele noastre. In forma simbolică obţinem aşa dar:

$$d^1 \rightarrow d_1 \underline{\nabla} \quad \text{şi} \quad \underline{d^1} \rightarrow \underline{[d_1 \nabla]}.$$

Aşa dar:

$$d(d_2 \mathfrak{F}) = (d_2 \{ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} dt + (\nabla\, d_1) \mathfrak{F} - \mathfrak{F}\, \nabla) d_1 \})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{F}\, d_2) = (d_2 \{ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + (\nabla v) \mathfrak{F} - (\mathfrak{F}\, \nabla) v \})$$

de unde rezultă:

$$\frac{d}{dt} \int (d_2 \mathfrak{F}) = \int \frac{d}{dt} (d_2 \mathfrak{F}) = \int (d_2 \{ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + (\nabla v) \mathfrak{F} - (\mathfrak{F}\, \nabla) v \}).$$

Mai putem proceda la desvoltarea mărimii $(d_1 \nabla)(d_2 \mathfrak{F})$ şi în felul următor:

Ţinând seama de figura 53, obţinem transformarea

$$(\mathfrak{F}\, \Delta_2)_2 - (\mathfrak{F}\, \Delta_2)_1 + \Sigma ([d^1 d_1] \mathfrak{F}) = \int d\sigma \operatorname{div} \mathfrak{F}.$$

Ori $(\mathfrak{F}\, \Delta_2)_2 - (\mathfrak{F}\, \Delta_2)_1 = \Sigma (d_1 \nabla)(d_2 \mathfrak{F})$ şi $d\sigma = (d_2 d_1)$.

Astfel că:

$$(d_1 \nabla)(d_2 \mathfrak{F}) = -([d^1 d_1] \mathfrak{F}) + (d_2 d_1)(\nabla \mathfrak{F}) \qquad (1)$$

în care:

$$-([d^1 d_1] \mathfrak{F}) = -([[d_2 \nabla] d_1] \mathfrak{F}) = (d_2 (\nabla\, d_1) \mathfrak{F}) - (\nabla \underset{T}{(d_2 d_1)} \mathfrak{F}) =$$

$$= (d_2 (d_1 \nabla) \mathfrak{F}) + (d_2 \mathfrak{F})(\nabla\, d_1) - (d_2 d_1)(\nabla \mathfrak{F}) - (\mathfrak{F}\, \nabla) \underset{T}{(d_2 d_1)}.$$

Aşa dar

$$(d_1 \nabla)(d_2 \mathfrak{F}) = d_2 \{ (\nabla\, d_1) \mathfrak{F} - (\mathfrak{F} \nabla) d_1 \}.$$

De obiceiu se utilizează mărimea $(d_1 \nabla)(d_2 \mathfrak{F})$ în forma (1) cu următoarea modificare adusă mărimii

$$-([d^1 d_1] \mathfrak{F}) - ([d^1 d_1] \mathfrak{F}) = (d^1 [\mathfrak{F}\, d_1]) = (d_2 [\nabla\, [\mathfrak{F}\, d_1]])\ ^1).$$

In cazul acesta $\frac{d}{dt} \int (d_2 \mathfrak{F})$ ia forma:

$$\frac{d}{dt} \int (d_2 \mathfrak{F}) = \int \frac{d}{dt} (d_2 \mathfrak{F}) = \int (d_2 \{ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + v \operatorname{div} \mathfrak{F} + \operatorname{rot} [\mathfrak{F} v] \}). \qquad (2)$$

---

1) Se poate uşor vedea că $(d_1 \nabla)(d_2 \mathfrak{F}) = (d_2 [\nabla\, [\mathfrak{F}\, d_1]]) + (d_2 d_1)(\nabla \mathfrak{F})$ ne dă acelaşi rezultat ca mai sus: $(d_1 \nabla)(d_2 \mathfrak{F}) = (d_2 \{ (\nabla\, d_1) \mathfrak{F} - (\mathfrak{F} \nabla) d_1 \})$ deoarece $(d_2 [\nabla\, [\mathfrak{F}\, d_1]]) = (d_2 \{ (\nabla\, d_1) \mathfrak{F} (\Delta\, d_1) \mathfrak{F} - (\nabla \mathfrak{F})\, d_1 \})$
$= (d_2 \{ (\nabla\, d_1) \mathfrak{F} - (\mathfrak{F} \nabla) d_1 - d_1 (\nabla \mathfrak{F}) \})$.

Derivata substanțială în forma (2) se utilizează la cercetarea științifică a fenomenului magnetostatic.

Cazul 5.

Expresia $(d\mathbf{r}\,\nabla)\{d\sigma\,\mathrm{V}\}$ ia forma:

$$(d\mathbf{r}\,\nabla)\{d\sigma\,\mathrm{V}\} = d\sigma\,(d\mathbf{r}\,\nabla)\,\mathrm{V} + \mathrm{V}\,(d\mathbf{r}\,\nabla)\,d\sigma$$

în care:

$$(d\mathbf{r}\,\nabla)\,d\sigma = (d_s\,d\mathbf{r}) = d\sigma\,(\nabla\,d\mathbf{r}).$$

Ținând seamă de figura 63 avem:

$$\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1 = \Sigma\,(d\mathbf{r}\,\nabla)\,d\sigma = \Sigma\,(d_s\,d\mathbf{r})$$

deci:

$$(d\mathbf{r}\,\nabla)\,d\sigma = (d_s\,d\mathbf{r}).$$

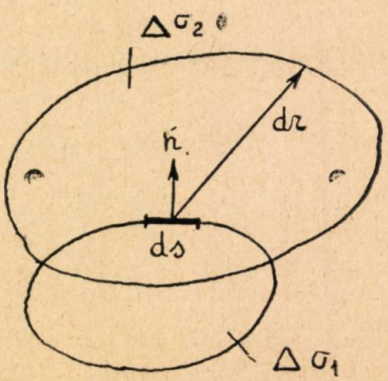


Fig. 63. Deplasarea infinitizimală a unui element de volum.

Așa dar:

$$d\{d\sigma\,\mathrm{V}\} = d\sigma\left\{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\,dt + (\nabla\,d\mathbf{r})\,\mathrm{V}\right\} \qquad \frac{d}{dt}\{d\sigma\,\mathrm{V}\} = d\sigma\left\{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + (\nabla v)\,\mathrm{V}\right\}.$$

Așa dar:

$$\frac{d}{dt}\int\{d\sigma\,\mathrm{V}\} = \int\frac{d}{dt}\{d\sigma\,\mathrm{V}\} = \int d\sigma\left\{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + (\nabla v)\,\mathrm{V}\right\}.$$

Cazul 6.

Expresia $(dr\,\nabla)\{d\sigma\,\mathfrak{F}\}$ ia forma:

$$(dr\,\nabla)\{d\sigma\,\mathfrak{F}\} = d\sigma\,(dr\,\nabla)\,\mathfrak{F} + \mathfrak{F}\,(dr\,\nabla)\,d\sigma$$

în care:

$$\mathfrak{F}\,(dr\,\nabla)\,d\sigma = \mathfrak{F}\,(ds\,dr) = \mathfrak{F}\,d\sigma\,(\nabla\,dr).$$

Aşa dar:

$$d\{d\sigma\,\mathfrak{F}\} = d\sigma\left\{\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t}\,dt + (\nabla\,dr)\,\mathfrak{F}\right\} \qquad \frac{d}{dt}\{d\sigma\,\mathfrak{F}\} = d\sigma\left\{\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t} + (\nabla v)\,\mathfrak{F}\right\};$$

$$\frac{d}{dt}\int\{d\sigma\,\mathfrak{F}\} = \int\frac{d}{dt}\{d\sigma\,\mathfrak{F}\} = \int d\sigma\left\{\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t} + (\nabla v)\,\mathfrak{F}\right\}.$$

Derivata în raport cu timpul a integralei $\int d\sigma\,\mathrm{V}$ joacă un rol mare în cercetarea fenomenelor electrice şi magnetice.

In cazul de faţă vom lua un simplu exemplu care se referă la densitatea corpurilor.

Admitem că funcţiunea scalară V reprezintă densitatea unui corp.

Oricum s'ar deforma corpul, masa totală $\int \mathrm{V}\,d\sigma$, va rămâne neschimbată. Aşa dar:

$$\frac{d}{dt}\int\{d\sigma\,V\} = \int\frac{d}{dt}\{d\sigma\,\mathrm{V}\} = \int d\sigma\,\{\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t} + (\nabla v)\,\mathrm{V}\} = 0$$

deci:

$$\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t} + (\nabla v)\,\mathrm{V} = 0$$

reprezintă ceea ce cu adevărat se numeşte legea continuităţii. Adică, dacă în volumul $\Delta\sigma$, densitatea V a corpului descreşte, aceasta e posibil, numai dacă o parte din masa corpului din volumul $\Delta\sigma$, va străbate suprafaţa ΔS din interior către exterior. (Vezi fig. 64).

In cazul acesta $\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}$ e negativ şi $-\int\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}\,\partial\sigma$ va exprima

$$\int d\sigma\,(\nabla\,v\mathrm{V}) = \int (ds\,v\,\mathrm{V})$$

adică cantitatea de materie care în unitatea de timp străbate suprafaţa Δs în exterior. După cum se vede apare vectorul $v\mathrm{V}$

care reprezintă cantitatea de materie, care în unitatea de timp străbate în direcţia lui v unitatea de suprafaţă.

Dacă din contra, în spaţiul $\triangle\sigma$ massa materială creşte $\frac{\partial V}{\partial t}$ devine pozitiv şi vectorul vV va fi dirijat către spaţiul $\triangle\sigma$.

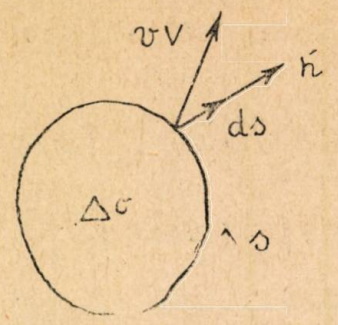


Fig. 64. vV. Materia care străbate în unitatea de timp, unitatea de suprafaţă.

In cazul acesta vectorul vV formează cu d_s un unghiu mai mare ca 90°, astfel că ($d_s v$ V) apare ca o mărime negativă.

(Va urma) DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.

CÂTEVA APLICAŢIUNI ALE COORDONATELOR ISOTROPE

(Urmare dela pag. 157)

6. *Dreptele lui* SIMSON *ale unui punct fix, în raport cu triunghiurile* (T) *înscrise în cercul* (O) *şi circumscrise conicei* (Γ) *trec printr'un punct fix.*

Fie $P\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right)$ punctul fix. Ecuaţiunea dreptei lui SIMSON a acestui punct, în raport cu unul, oricare din triunghiurile (T) este de forma:

$$2(a_0+\lambda b_0)\delta^3 X + 2(a_3+\lambda b_3)\delta Y - (a_0+\lambda b_0)\delta^1 + (a_1+\lambda b_1)\delta^2 + (a_2+\lambda b_2)\delta - (a_3+\lambda b_3) = 0.$$

Această ecuaţiune depinzând linear de parametrul λ rezultă că dreptele lui SIMSON corespunzătoare trec printr'un punct M ale cărui coordonate sunt:

$$X = \frac{(0,3)\,\delta^2 - (1,3)\,\delta - (2,3)}{2\,(0,3)\,\delta}$$
$$Y = \frac{-(0,1)\,\delta^2 - (0,2)\,\delta + (0,3)}{2\,(0,3)\,\delta} \qquad (4)$$

notaţiunea (i, k) având aceeaşi semnificaţie ca la § 5.

Se verifică uşor că, dacă conica (Γ) este o conică cu centru, punctul M poate fi obţinut în modul următor:

Fie Q şi R celelalte două vârfuri ale triunghiului (T) având unul din vârfuri în P. *Dreptele lui* SIMSON *ale punctului* P *în raport cu triunghiurile* (T) *trec prin proiecţia ortogonală* M, *a acestui punct pe cea de a doua tangentă la conica* (Γ) *paralelă cu latura* QR.

Explicaţia este evidentă. Punctul M, astfel definit, este — vizibil — intersecţia a două din dreptele SIMSON, particulare: acea în raport cu triunghiul PQR şi acea în raport cu trunghiul (T) în care una din laturi este cealaltă tangentă, paralelă cu QR, a conicei (Γ).

Cele ce preced, pun în evidenţă o proprietate bine cunoscută a dreptei lui SIMSON. Intr'adevăr, în cazul particular când triunghiul (T) are acelaşi ortocentru H, se ştie că conica (Γ) are ca focare punctele O şi H, deci centrul acestei conice este mijlocul segmentului OH. De asemeni, în acest caz particular, cea de a doua tangentă la conica (Γ) paralelă cu QR trece prin mijlocul distanţei PH, deci:

Dreapta lui SIMSON *a unui punct* P, *trece prin mijlocul segmentului ce uneşte punctul cu ortocentrul triunghiului.*

Dacă conica (Γ) este o parabolă punctul M este la infinit, dreptele lui SIMSON fiind paralele cu aceeaşi direcţiune de coeficient unghiular:

$$-\frac{a_0 + \lambda b_0}{a_3 + \lambda b_3}\,\delta.$$

Valoarea acestui coeficient unghiular este independentă de λ, deoarece conica (Γ) fiind o parabolă avem:

$$\frac{a_0}{a_3} = \frac{b_0}{b_3}.$$

Se deduce imediat, că:

Locul geometric al ortopolurilor unei drepte fixe în raport cu triunghiurile (T) *înscrise în cercul* (O) *şi circumscris conicei* (Γ) *este un cerc, dacă conica* (Γ) *nu este o parabolă şi o dreaptă în acest din urmă caz.*

Consider mai întâi cazul când conica (Γ), este o conică cu centru. P şi Q fiind punctele unde dreapta fixă taie cercul (O), iar M şi N punctele prin care trec dreptele lui SIMSON ale lui P şi Q în raport cu triunghiurile (T) locul căutat este cercul ce trece prin M şi N şi după care segmentul MN este văzut sub acelaşi unghiu ca coarda PQ, după cercul (O).

Dacă conica (Γ) este o parabolă locul geometric al ortopolurilor unei drepte fixe PQ este o dreaptă paralelă cu directoarea. Fie pentru aceasta δ şi δ' abscisele isotrope ale punctelor P şi Q. Considerăm punctul R, a cărui abscisă isotropă δ'' verifică ecuaţiunea:

$$\delta\delta'\delta'' = \frac{a_3}{a_0} = -\frac{b_3}{b_0}.$$

Triunghiul PQR are proprietatea de a fi triunghiu S în raport cu toate triunghiurile (T). Ortopolul comun al laturilor PQ, QR şi RP în raport cu un triunghiu (T) se găseşte la mijlocul segmentului determinat de ortocentrul triunghiului PQR şi ortocentrul triunghiului (T), considerat. Ortocentrul triunghiului (T) fiind pe directoarea parabolei (Γ) urmează că locul acestui ortopol comun este o paralelă la directoare.

7. Propoziţiunea dela § 6 este o consecinţă a propoziţiunii dela § 4.

Fie (T_1) şi (T_2) cele două triunghiuri (T) considerate. (A se vedea § 2). Fie, de asemeni PIJ triunghiul ce are ca vârfuri punctul $P\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right)$ şi punctele clclice I şi J ale planului. Aceste triunghiuri fiind înscrise în cercul (O) rezultă, din propoziţiunea demonstrată la § 4, că cea de a patra tangentă Δ (diferită de laturile triunghiului PIJ) comună parabolelor înscrise în triunghiul (T_1) şi triunghiul (T_2) şi având focarul în P este tangentă şi conicei (Γ). Rezultă că aceeaşi dreaptă Δ este tangentă tuturor parabolelor înscrise în triunghiul (T) şi cu focarul în P.

Rezultă de asemeni, că dreptele lui SIMSON ale punctului P în raport cu triunghiurile (T) trec prin proiecţia ortogonală a acestui punct pe dreapta Δ. Deci, propoziţia dela § 6.

Din cele arătate la § 4 rezultă că ecuaţiunea tangentei Δ este:

$$x + Uy = Y$$

în care U şi V verifică sistemul:

$$\begin{vmatrix} 1 & -V & U & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & -\delta & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -V & U \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & -\delta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Se găseşte uşor, că proiecţia ortogonală a punctului $P\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right)$ pe dreapta Δ are coordonatele indicate de egalităţile (4) dela § 6. Aceasta confirmă prin calcul demonstraţia ce precede.

8. Din propoziţiunea dela § 6 se deduce următoarea:

Se consideră un triunghiu fix (Σ) *înscris în conica* (O) *şi un triunghiu variabil* (T) *înscris în aceeaşi conică* (O) *şi circumscris conicei* (Γ). *Triunghiurile* (T) *variind, conicele înscrise în triunghiurile* (Σ) *şi* (T) *au cu conica* (Γ) *o tangentă comună, fixă.*

Această propoziţiune rezultă, de asemeni şi din propoziţiunea dela § 4.

Prin dualitate aceeaşi propoziţiune devine:

Se consideră un triunghiu fix (Σ) *circumscris unei conice* (Γ) *şi un triunghiu variabil* (T), *înscris în conica* (O) *şi circumscris aceleiaşi conice* (Γ). *Triunghiul* (T) *variind, conicele circumscrise triunghiurilor* (Σ) *şi* (T) *au cu conica* (O) *un punct comun fix.*

In particular:

Cercurile circumscrise triunghiurilor (T) *înscrise într'o conică fixă* (O) *şi circumscrise unei parabole fixe* (Γ) *trec, înafară de focarul parabolei, prin încă un punct fix situat pe conica* (O).

Reciproc.

Se consideră conica (O) *şi patru puncte* P, G_1, G_2, G_3 *fixe, dintre care punctul* P *se găseşte pe această conică. Conica variabilă* (ω) *trecând prin punctele fixe, taie conica* (O), *înafară*

de punctul P, *încă în trei puncte* A, B, C. *Laturile triunghiului* ABC *rămân tangente unei conice fixe* (Γ), *înscrisă în triunghiurile* G_1, G_2, G_3.

Demonstrația ce urmează presupune conica (O) ca fiind cercul cu centrul în origine și raza egală cu 1. Aceasta nu restrânge generalitatea ei, putându-se trece cu ajutorul unei transformări proiective dela acest caz particular la cazul când (O) este o conică generală.

Fie δ și $\frac{1}{\delta}$ coordonatele punctelor P. Fie de asemeni:

$$y - \frac{1}{\delta} = m_1 (x - \delta),$$

$$x + q_1 y + p_1 = 0,$$

$$y - \frac{1}{\delta} = m_2 (x - \delta),$$

$$x + q_2 y + p_2 = 0$$

respectiv ecuațiunile dreptelor PG_1, G_2G_3, PG_2, G_3G_1. Ecuațiunea conicei ($\overline{\ }$) este de forma:

$$\left(m_1 x - y - m_1\delta + \frac{1}{\delta}\right)(x + q_1 y + p_1)$$

$$+ \lambda\left(m_2 x - y - m_2\delta + \frac{1}{\delta}\right)(x_2 + p_2 y + q_2) = 0$$

λ fiind un parametru arbitrar. In sfârșit, ecuațiunea ce admite ca rădăcini abscisele isotrope ale punctelor P, A, B, C, de intersecție ale conicei ($\overline{\omega}$) cu cercul (O):

$$xy = 1$$

este:

$$(x - \delta)\left[\left(m_1 x + \frac{1}{\delta}\right)(x^2 + p x_1 + q_1)\right.$$

$$\left. + \lambda\left(m_2 x + \frac{1}{\delta}\right)(x^2 + p_2 x + q_2)\right] = 0.$$

Abscisele isotrope ale vârfurilor A, B, C verificând o ecuațiune de forma ecuațiunii (2) dela § 2 rezultă că laturile acestui triunghiu rămân tangente unei conice fixe (Γ).

Conica variabilă $(\bar{\omega})$ putând să se reducă la cuplurile de drepte: (PG_1, G_2G_3); (PG_2, G_1G_3) şi (PG_3, G_1G_2) rezultă că, în particular, conica $(\bar{\omega})$ este înscrisă în triunghiul $G_1G_2G_3$.

Prin polare reciproce ultima poziţiune devine:

Se consideră conica (Γ) *şi patru drepte fixe* γ_1, γ_2, γ_3 *şi* Δ *dintre care dreapta* Δ *este tangentă conicei* (Γ). *Conica variabilă* $(\bar{\omega})$ *tangentă dreptelor fixe are cu conica* (Γ) *înafară de* Δ *alte trei tangente comune. Triunghiul determinat de aceste tangente comune rămâne înscris într'o conică* (O) *fixă circumscrisă triunghiului format de tangentele* γ_1, γ_2 *şi* γ_3.

ŞERBAN GHEORGHIU.

RAPORTUL COMISIUNII PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"

Acest premiu se acordă corespondenţilor *Gazetei Matematice* — elevi sau studenţi — pentru lucrări de Geometria triunghiului sau tetraedrului.

Cercetând volumul XLVII al *Gazetei Matematice*, am găsit că articolul D-lui IULIAN PETRESCU, elev la Liceul Lazăr din Bucureşti — intitulat *„Relativ la o configuraţie din triunghiu"* — corespunde condiţiunilor regulamentului premiului « NICOLAE G. BOTEA ». In acest articol se urmăreşte configuraţia determinată de două puncte din planul unui triunghiu, de triunghiurile lor pedale, polarele lor trilineare, adică lumea geometrică atât de dragă lui NICOLAE G. BOTEA la începuturile activităţii sale matematice şi urmărită de el în articolele publicate în *Foaia Matematică*, *Curierul Matematic*, *Gazeta Matematică*.

D-nul IULIAN PETRESCU mai are în volumul XLVII o Notă Matematică relativă la o iperbolă din triunghiu (Nr. 18, pag. 167) şi mai are probleme din Geometria triunghiului rezolvate de D-sa (Nr. 5108, 5125, 5214, 5307, 5319).

Cum rezultatele la care a ajuns D-l PETRESCU sunt frumoase, cum activitatea Domniei-Sale este bogată şi de bună calitate, îl

propunem pentru a fi premiat în acest an (al 5-lea dela moartea colegiului nostru NICOLAE BOTEA) cu premiul ce face obiectul prezentului raport.

Propunem să i se atribuie ca premiu volumul: GOURSAT. *Cours d'Analyse*, Vol. II.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI
« NICOLAE G. BOTEA »

Ing. E. BOTEA, Prof. CONST. IONESCU-BUJOR,
Ing. GABRIELA ȚIȚEICA.

Acest raport a fost cetit și aprobat de Adunarea Generală din 27 August 1942.

NOTE MATEMATICE

22. *Asupra problemei 5336.* D-l G-L GH. BUICLIU ne atrage atenția asupra soluției ce am dat acestei probleme, în partea privitoare la punctul 2. Constatând, în adevăr, pentru rigoarea soluției lipsa unor precizări, reluăm aci mai desvoltat demonstrația dela punctul 2, dând complectările necesare.

2. Fie triunghiul isocel BAC $(\overline{AB} = \overline{AC})$; A', B', C' picioarele bisectoarelor interioare AA', BB', CC'.

Bisectoarea AA' este în același timp înălțime și mediană în triunghiul BAC, deci triunghiurile A'BB', A'CC' fiind egale, rezultă că $\overline{A'B'} = \overline{A'C'}$ (vezi pag. 130), adică *triunghiul* A'B'C' *este isoscel.*

Reciproc. Fie un triunghiu dat BAC, I punctul de întâlnire al bisectoarelor interioare AA', BB', CC', iar triunghiul B'A'C' isoscel $(\overline{A'B'} = \overline{A'C'})$.

a) *Să presupunem că proiecțiile ortogonale* B_a, C_a *ale punctului* A' *respectiv pe laturile* AC, AB *sunt de aceeași parte a dreptei* B'C'.

Punctul A' fiind pe bisectoarea unghiului BAC, avem: $\overline{A'B_a} = \overline{A'C_a}$; deci triunghiurile dreptunghice $A'B_aB'$ și $A'C_aC'$ fiind egale, avem: $\overline{B'B_a} = \overline{C'C_a}$, dar și $\overline{AB_a} = \overline{AC_a}$, rezultă deci că: $\overline{AB'} = \overline{AC'}$. In triunghiul isoscel B'AC', bisectoarea AM este

în acelaşi timp *înălţime* şi *mediană*, ca urmare triunghiul B'IC' este de asemenea *isoscel*, deci

$$\sphericalangle AB'B = \sphericalangle AC'C\,;\ \text{apoi}\ \sphericalangle ABB' = \sphericalangle ACC',$$

de unde deducem:

$$\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle ABB' = 2\sphericalangle ACC' = \sphericalangle ACB,$$

adică *triunghiul* BAC *este şi el isoscel.*

b) *Să presupunem acum că proiecţiile ortogonale* B_a, C_a *ale punctului* A' *pe laturile* AC, AB *sunt de o parte şi de alta a dreptei* B'C'.

In acest caz, având $\overline{A'B_a} = \overline{A'C_a}$, triunghiurile dreptunghiuri $A'B_aB'$, $A'C_aC'$ sunt egale, deci $\sphericalangle B_aA'B' = \sphericalangle C_aA'C'$, iar ca urmare:

$$\sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle B_aA'C_a = \pi - \sphericalangle BAC.$$

Invers, să presupunem că triunghiul picioarelor bisectoarelor interioare, B'A'C', are unghiul B'A'C' suplementar unghiul BAC corespunzător în triunghiul fundamental BAC. In acest caz, punctele B_a, C_a sunt de o parte şi de alta a dreptei B'C' (deoarece $\sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle B_aA'C_a$), deci avem:

$$\sphericalangle C_aA'C' = \sphericalangle C'A'B' - \sphericalangle C_aA'B' =$$

$$= \sphericalangle C_aA'B_a - \sphericalangle C_aA'B' = \sphericalangle B_aA'B'.$$

Triunghiurile dreptunghiuri $A'B_aB'$, $A'C_aC'$ sunt egale (având $\overline{A'B_a} = \overline{A'C_a}$; $\sphericalangle B_aA'B' = \sphericalangle C_aA'C'$), deci $\overline{A'B'} = \overline{A'C'}$.

Prin urmare, *dacă triunghiul dat şi triunghiul picioarelor bisectoarelor interioare au două unghiuri corespunzătoare* suplimentare, *triunghiul picioarelor bisectoarelor interioare este isoscel.*

c) Dacă B' este proiecţia ortogonală a lui A' pe AC, pentru ca triunghiul B'A'C' să fie isoscel, este necesar ca punctul C' să fie asemenea proiecţia ortogonală a lui A' pe AB; deci

$$\sphericalangle B'A'C' + \sphericalangle BAC = \pi.$$

De altă parte, având, în acest caz, $\overline{AB'} = \overline{AC'}$, dreapta AA' este perpendiculară la mijlocul lui $\overline{B'C'}$, deci $\sphericalangle B'A'A = \sphericalangle C'A'A$ şi $\sphericalangle B'C'C = \sphericalangle C'B'B$; apoi avem:

$$\sphericalangle B'C'B = \sphericalangle B'C'A + \sphericalangle A'C'B = \sphericalangle C'B'A' + \sphericalangle A'B'C = \sphericalangle C'B'C,$$

de unde rezultă că $\Delta B'C'B = \Delta C'B'C$, şi ca urmare avem succesiv:

$$\overline{C'B} = \overline{B'C};\ \overline{AB} = \overline{AC'} + \overline{C'B} = \overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AC},$$

adică triunghiul BAC *este necesar isoscel.*

Aşa dar, *dacă triunghiul fundamental şi triunghiul picioarelor bisectoarelor lui interioare n'au două unghiuri corespunzătoare suplimentare, condiţia necesară şi suficientă pentru ca triunghiul picioarelor bisectoarelor interioare să fie isoscel este ca triunghiul fundamental să fie isoscel.*

d) *Dacă triunghiul picioarelor interioare este echilateral, triunghiul fundamental nu poate avea un unghiu de* 120^0.

Să presupunem că A'B'C' este echilateral şi că $\sphericalangle BAC = \frac{2\pi}{3}$.

In acest caz, triunghiul A'B'C' fiind isoscel $(\overline{B'A'} = \overline{B'C'})$, iar unghiurile A'B'C', ABC nefiind suplimentare, triunghiul fundamental ABC trebuie să fie isoscel $(\overline{BA} = \overline{BC})$, dar atunci urmează să avem:

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC = \frac{2\pi}{3},$$

ceea ce este o imposibilitate.

Ca urmare, *triunghiul* A'B'C' *fiind echilateral şi niciunul din unghiurile lui neputând fi suplimentul unghiului corespunzător din triunghiul fundamental, este necesar ca triunghiul fundamental să fie de trei ori isoscel, adică echilateral.*

Aşa dar, *condiţia necesară şi suficientă, pentru ca triunghiul picioarelor bisectoarelor interioare ale unui triunghiu dat să fie echilateral, este ca triunghiul dat să fie echilateral.*

Observare. Proprietatea că sunt triunghiuri scalene pentru care triunghiul picioarelor bisectoarelor interioare este isoscel a fost găsită şi propusă ca problemă sub Nr. 542 în G. M. de către V. CRISTESCU, unul din fondatorii G. M. Soluţia problemei a fost dată la pag. 109—113, Vol. VIII al G. M., unde este examinată şi chestiunea existenţei efective a triunghiurilor scalene bucurându-se de proprietatea enunţată. Relaţia pe care se bazează această demonstraţie

$$a^3 + (b + c)\,a^2 - (b^2 + bc + c^2)\,a - (b + c)\,(b^2 + c^2) = 0 \qquad (R)$$

unde a, b, c sunt laturile triunghiului scalen, poate fi obţinută încă observând că teorema lui PTOLOMEU aplicată patrulaterului AB'A'C' dă:

$$\overline{A'B'} \cdot \overline{AC'} + \overline{A'C'} \cdot \overline{AB'} = \overline{AA'} \cdot \overline{B'C'},$$

de altă parte:

$$\frac{A'B'}{\sin A} = \frac{\overline{A'C'}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\overline{C'B'}}{\sin\frac{A}{2}},$$

deci punând $\overline{AA'} = l_a$ avem:

$$2l_a \cos\frac{A}{2} = \frac{bc(b+c+2a)}{(a+b)(a+c)},$$

dar: $4\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{ba}$ şi $l_a^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$

de unde rezultă relaţia (R).

O. N. Ţ.

23. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). In continuarea notelor anterioare dăm acum soluţiile la ecuaţia

$$9\,N_9 = N$$

unde N este un număr de 10 cifre diferite iar N_9 un număr de 9 cifre diferite şi diferite de 9.

Cazul când N_9 începe cu zero, este deci numai formal de 9 cifre, a fost studiat şi publicat de noi în *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XVI, pag. 140 unde am găsit 136 soluţii la care trebuie adăogate încă următoarele 10 soluţii:

N_9	N	N_9	N
023 854 167	0 214 687 503	054 217 368	0 487 956 312
024 183 756	0 217 653 804	057 624 831	0 518 123 479
027 348 651	0 246 137 859	065 238 471	0 587 146 239
028 165 743	0 253 491 687	071 265 843	0 641 392 587
032 681 754	0 294 135 786	082 657 314	0 743 915 826
038 746 251	0 348 716 259	085 372 461	0 768 352 149
045 872 631	0 412 853 679		

In total pentru N_9 începând cu zero am găsit 146 soluţii.

Pentru N_9 începând cu 1, 2,... 8 vom da soluţiile în numerele următoare.

G-L Gh. Buicliu.

1) Urmare la Nota dela pag. 67, Vol. XLVIII.

24. *Asupra problemei 2469*[1]). In această problemă se cerea *maximul şi minimul expresiei.*

$$E = \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C,$$

ştiind că

$$\operatorname{cot}A + \operatorname{cot}B + \operatorname{cot}C = k = \text{const},$$

A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu.*

Pe lângă eleganta soluţie dată în Nota 11 (G. M., XLVIII, p. 109—112), voi mai indica pe următoarea, care leagă chestiunea de teoria generală a maximului sau minimului unei funcţii de una sau mai multe variabile, făcând-o astfel aplicabilă şi în alte cazuri.

Să punem

$$X = \operatorname{cot}A \quad , \quad Y = \operatorname{cot}B \quad , \quad Z = \operatorname{cot}C,$$

deci

$$E = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{Y+Z}{YZ},$$

unde

$$(A) \qquad X + Y + Z = k \quad , \quad XY + YZ + ZX = 1.$$

Deducem

$$(1) \qquad Y + Z = k - X \quad , \quad YZ = 1 - kX + X^2$$

şi cum X, Y, Z sunt variabile reale, trebuie să avem

$$(k - X)^2 - 4(1 - 4X + X) \geqslant 0,$$

care cere $k^2 \geqslant 3$, iar

$$(2) \qquad \frac{k - 2\sqrt{k^2 - 3}}{3} \leqslant X \leqslant \frac{k + 2\sqrt{k^2 - 3}}{3}.$$

Prima limită este pozitivă dacă $k < 2$. De altă parte, se poate arăta direct din prima relaţie (A) că

$$k > 0.$$

Acestea stabilite, expresia E devine, ţinând seamă de (1),

$$(3) \qquad E = \frac{1}{X(X^2 - kX + 1)}.$$

---

1) Primită la redacţie o dată cu nota cu acelaşi titlu, publicată la pag. 157 din numărul precedent.

E devine infinită pentru $X = 0$ şi pentru

$$X = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Dacă $k < 2$, aceste valori ale lui X sunt imaginare, neegalităţile (2) arată că $X > 0$, deci E nu devine niciodată infinită.

Dacă $k > 2$, E variază între $-\infty$ şi $+\infty$, trecând însă printr'un maximum şi minimum *relative*, după cum vom vedea imediat.

Expresia lui E arată că problema s'a redus la studiul maximului şi minimului funcţiei de o singură variabilă

$$F(X) = \frac{1}{E} = X^3 - kX^2 + X.$$

Derivata se anulează pentru

$$X_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 - 3}}{3}, \quad X_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 - 3}}{3},$$

valori ce satisfac inegalităţile (2). Cum $F''(X) = \pm 2\sqrt{k^2 - 3}$, urmează că F este *minimă* pentru $X = X_1$ şi *maximă* pentru $X = X_2$; invers pentru E, deci E admite un maximum şi un minimum *finite indiferent* de $k \gtrless 2$, dar care în cazul $k > 2$ sunt *relative.*

Odată X determinat Y şi Z sunt date de (1).

Când $k = 2$, $F(X) = 0$ admite rădăcina dublă $X = 1$, E devine infinită pentru $X = 0$, $X = 1$, care satisfac la (2). $X = \cot A = 0$ atrage $A = 90^0$, iar (1) dau $\cot B = \cot C = 1$, $B = C = 45^0$. $X = \cot A = 1$ atrage $A = 45^0$, iar (1) dau $B = 90^0$, $C = 45^0$, adică iarăşi în ambele cazuri obţinem *triunghiul dreptunghiu isoscel*, pentru care *maximul* este *atins.*

Când $k = 2$, derivata $F'(X)$ se mai anulează şi pentru $X = \frac{1}{3}$, deci $\operatorname{tg} A = 3$, iar (1) dau $\operatorname{tg} B = 3$, $\operatorname{tg} C = \frac{3}{4}$, care corespund *minimului* lui E.

Când $k > 2$, maximul absolut $+\infty$ este atins pentru orice triunghiu dreptunghiu.

O altă soluţie, legată de asemeni de o teorie generală, este următoarea: expresia E este maximă sau minimă odată cu

$$U = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} + \lambda (X + Y + Z - k) + \mu (XY + YZ + ZX + 1),$$

ceea ce are loc când derivatele parţiale ale funcţiei U sunt nule, adică

$$U'_X = -\frac{1}{X^2} + \lambda + \mu (Y + Z) = 0,$$

$$U'_Y = -\frac{1}{Y^2} + \lambda + \mu (Z + X) = 0,$$

$$U'_z = -\frac{1}{Z^2} + \lambda + \mu (X + Y) = 0,$$

care se mai pot scrie, după prima relaţie (1),

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \mu X^3 - (k\mu + \lambda) X^2 + 1 &= 0, \\ \mu Y^3 - (k\mu + \lambda) Y^2 + 1 &= 0, \\ \mu Z^3 - (k\mu + \lambda) Z^2 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

la care se adaogă relaţiile (A). Eliminarea lui λ şi μ între relaţiile (B) duce la

$$\begin{vmatrix} X^3 & X^2 & 1 \\ Y^3 & Y^2 & 1 \\ Z^3 & Z^2 & 1 \end{vmatrix} = (X - Y)(Y - Z)(Z - X) = 0.$$

Dacă luăm $X = Y = Z$, relaţiile (A) cer $k^2 = 3$.

Dacă luăm $X = Y \neq Z$, aceleaşi relaţii dau rezultatele stabilite anterior.

M. G.

25. *Asupra problemei 3944.* Pe lângă soluţia extrem de frumoasă, dar nu tocmai elementară, în sensul ortodox al cuvântului, dată acestei probleme de D-l Prof. D. BARBILIAN la pag. 467—473, voi da următoarea soluţie, în adevăr elementară, în sensul că cere numai cunoştiinţe ce nu depăşesc nivelul liceului ştiinţific.

Cele patru cercuri au centrele O_i şi razele R_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Dacă O este punctul din care ele se văd sub acelaşi unghiu 2α (unghiul tangentelor duse din O la fiecare cerc), iar d_i distanţele OO_i, avem

$$R_i = d_i \sin\alpha \quad \text{sau} \quad d_i = \lambda h_i,$$

astfel că problema revine la următoarea:

Fiind date patru puncte O_1, O_2, O_3, O_4, *să se găsească un punct* O, *ale cărui distanţe la cele patru puncte să fie proporţionale cu patru lungimi date* R_1, R_2, R_3, R_4.

Vom schiţa soluţia analitică a acestei probleme. Problema revine la determinarea lui λ, astfel încât cercurile cu centrele în O_i şi cu razele λR_i să fie concurente, ceea ce revine la condiţia ca axele lor radicale să fie concurente. Vom scrie deci ecuaţiile axelor radicale ale unuia din cercuri cu celelalte trei, apoi vom scrie că aceste trei drepte sunt concurente: se obţine o ecuaţie din care se scoate λ^2, deci punctul O există realmente într'o *singură* poziţie, sau este imaginar.

Este interesant de dat o soluţie geometrică elementară formei noi sub care am pus problema D-lui Prof. D. BARBILIAN.

M. G.

26. *Componentele intrinseci ale acceleraţiei unui punct în mişcarea circulară şi uniformă.* Dăm o metodă directă şi intuitivă pentru determinarea acestor componente.

Fie: cercul O de rază R ; M, M' poziţiile mobilului la momentele t şi $t+\Delta t$; $\sphericalangle MOM' = \Delta\theta$; $\overrightarrow{MV} = \overrightarrow{M'V'} = v$, viteza lineară, aşezată pe tangente.

Ducem $\overrightarrow{V'P}$ egal, paralel şi de sens contrar cu $\overrightarrow{MV}$ şi apoi $\overrightarrow{VQ} = \overrightarrow{MR}$ echipolenţi cu $\overrightarrow{M'P}$. Se observă uşor că avem:

$$\sphericalangle VMQ = \Delta\theta \quad ; \quad \sphericalangle OMR = \frac{1}{2}\Delta\theta \quad ; \quad \overline{VQ} = 2v \sin\frac{1}{2}\Delta\theta.$$

Prin definiţie avem acceleraţia limită:

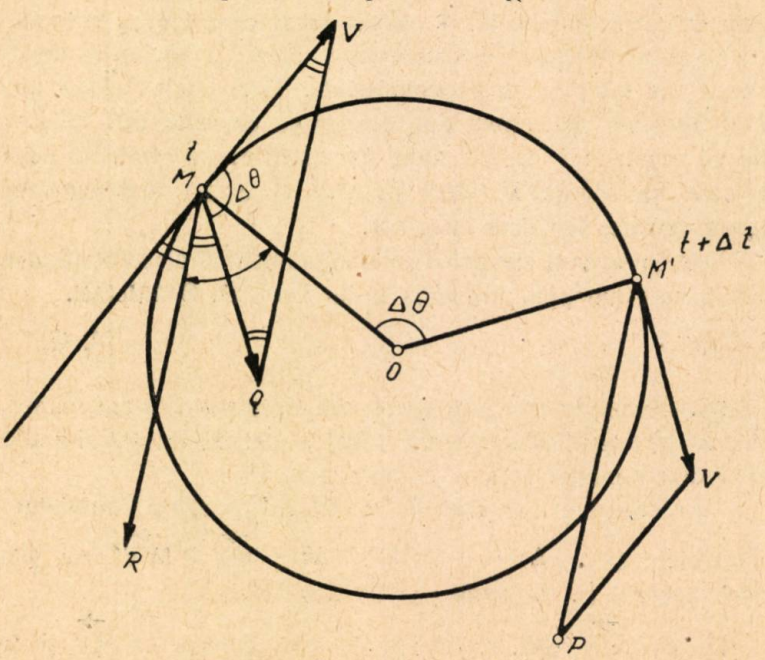
$$J = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MR}}{\Delta t} = \lim \frac{2v \sin \frac{1}{2}\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Ecuaţia mişcării lui M fiind $\theta = \omega t + \theta_0$, dând creşteri variabilelor, găsim $\Delta\theta = \omega\Delta t$, unde ω este viteza unghiulară, constantă.

Rezultă deci: $$J = \lim_{\Delta t \to 0} v \left[\frac{\sin \frac{1}{2}\omega\Delta t}{\frac{1}{2}\omega\Delta t} \right] \omega = v\omega$$

T fiind durata rotaţiei complecte, avem:

$$\frac{2\pi R}{T} = v \qquad \frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{v}{R}.$$



Deci: $$J = \frac{v^2}{R}.$$

In fine întru cât la limită $\overrightarrow{MR}$ se aşterne peste MO, componentele acceleraţiei pe normală şi tangentă sunt evident

$$J_n = \frac{V^2}{R} \quad , \quad J_t = 0.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Politechnica din Bucureşti. Facultatea de Agronomie

Examenul de admitere Octomvrie 1942. Lucrarea scrisă

I. Să se aducă la acelaşi numitor fracţiile din expresia

$$E = \frac{2x^2 + k}{(x-1)^2} - \frac{x+1}{3x^2 - 2x - 1}$$

şi să se determine parametrul k astfel ca polinomul obţinut la numărător să admită rădăcina $x = 1$. Să se rezolve apoi ecuaţia $E = 0$, după ce s'a înlocuit k prin valoarea găsită.

II. O persoană A asistă la un concert în Bucureşti, iar o altă persoană B din Timişoara ascultă retransmiterea concertului la un aparat de radio. Ştiind că A este situat la 4 m. de microfon, iar B la un m. de aparat, să se spună care persoană aude mai întâi un acelaşi sunet. La ce distanţă de aparatul de radio poate auzi B în acelaşi timp cu A ? Se ştie că undele hertziene se deplasează cu viteza luminii, iar sunetul cu 340 m/s şi că distanţa Bucureşti-Timişoara este de 400 km.

III. Un siloz în formă de triunchiu de con este plin cu grâu de 75 kgr. greutate hectrolitrică. Ştiind că lungimile circonferinţelor exterioare ale cercurilor celor două baze sunt respectiv 14 şi 12 m., că lungimea generatoarei trunchiului de con este de 8 m., iar grosimea zidului de 0,26 m., se cere să se determine greutatea grâului conţinut în siloz.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societăţii Politechnice din România. Anul LVI, Nr. 8, August 1942. P. VERCESCU: † Inginerul ŞTEFAN PRETORIAN; I. LINTEŞ: Asupra autofretajului ţevilor prin presiuni exterioare. IUL. ALEXIU: Asupra pantelor de triere. I. MANOLESCU: Propuneri în vederea modificării caietului de sarcini O. N. R. C. 42 pentru aprovizionarea cu ţigle.

Deutsche Mathematik. H. SCHMIDT & K. SCHRÖDER: Ecuaţiile limită ale lui L. PRANDTL ca apropieri asimptotice de ecuaţiile diferenţiale NAVIER-STOKES. K. FABER: Asupra legăturii a trei tipuri de ecuaţii diferenţiale cu anume teorii ale funcţiunilor. J. MEIXNER: Asupra unor serii ale căror termeni sunt produse de funcţii hipergeometrice. A LOTZE: Ecuaţii vectoriale pentru

medii elastice. E. RENGEL: Transformări conforme. U. GRAF: Anaglife mobile şi suprafeţe bombate. W. KIRSTEN: Transformări geometrice. FR. BAUR: Asupra numerelor perfecte. G. KANTZ: Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei $\varphi(x) = n$. K. MOLSEN: Ireductibilitatea unor polinoame algebrice. J. E. HOFFMANN: O nouă metodă pentru apropierea de rădăcina patrată şi însemnătatea sa istorică. L. BIEBERBACH: Programul învăţământului matematic în şcolile germane superioare. G. FEIGL: Rezultatele studiului matematicelor după noul program. U. GRAF: Geometria descriptivă în şcoli. H. HORNINGER: Asupra însemnătăţii geometriei descriptive. A. KLOSE: Matematica aplicată. L. KOSCHMIEDER: Ce urmări rezultă din noul program al învăţământului în şcoalele superioare, asupra învăţământului matematic în şcoalele technice? E. MOHR: Asupra actualului program în matematica aplicată.

SOPHIE PICCARD: Sur des ensembles parfaits. Paris 1942. Gauthier-Villars & Co.

T. VESCAN. *Considérations sur certaines recherches quantiques de l'école française de physique théorique.*

Autorul vrea să expună câteva noţiuni matematice care ar putea aduce o contribuţie la deslegarea problemei interpretării fizice a teoriei quantelor.

Atât în ceea ce priveşte scopul, cât şi în ceea ce priveşte expunerea în sine, articolul D-lui VESCAN trebuie considerat ca o lucrare de diletant. In adevăr, problema interpretării fizice a teoriei quantelor (în forma ei actuală), a fost de mult rezolvată, şi teoriile înşirate de autor n'au nimic comun cu soluţia problemei. In fine, ţinem să atragem atenţiunea cetitorului asupra unor grave greşeli în expunere, cum e spre exemplu următoarea (pag. 7 şi 8): Autorul consideră un triunghiu ABC; duce apoi prin mijlocul bazei AB paralele la celelalte laturi, obţinând 2 noi triunghiuri care au ca baze jumătăţile bazei triunghiului iniţial; aplicând aceeaşi construcţie acestor triunghiuri şi repetând-o apoi la infinit se obţine un şir de linii frânte care evident tinde către baza AB.

Dacă luăm această bază ca axă a absciselor şi traducem analitic construcţiile geometrice, obţinem un şir de funcţiuni care tind toate către o funcţie identic nulă. Ei bine, autorul pretinde că limita şirului e o funcţie continuă fără derivată! Evident că face o regretabilă confuzie între derivata funcţiei limită şi limita derivatelor funcţiilor şirului. Se recomandă deci multă atenţie la cetirea articolului.

Ş. Ţ.

T. VESCAN. *Die Sedimentationsgleichgewichtsgleichung und die Molekulargewichtsformel von Svedberg.* Autorul verifică pe cazul particular al difuziunii sub acţiunea forţei centrifuge că distribuţia concentraţiilor în regimul staţionar e cea dată de termodinamică.

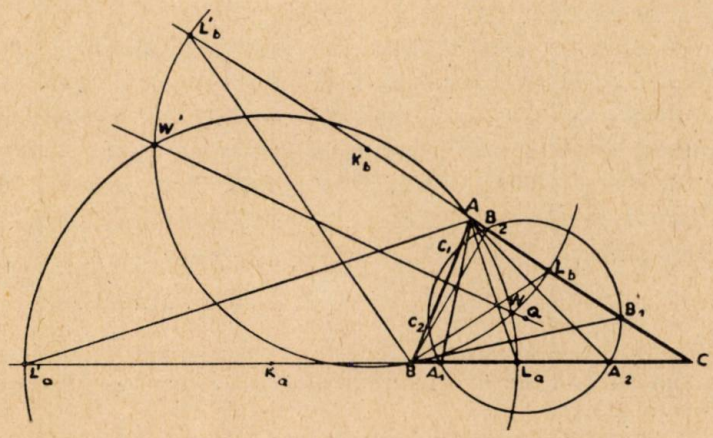
Ş. Ţ.

PROBLEME REZOLVATE.

PROBLEMA 4389. *Prin picioarele izogonalelor unui triunghiu, trec cercurile unui fascicol de cercuri de primul gen, având ca bază dreapta ce unește centrele izodinamice ale triunghiului și ca puncte limită însăși aceste centre.*

G-L GH. I. POPESCU.

Fie L_a, L'_a picioarele bisectoarelor unghiului A al triunghiului ABC; L_b, L'_b picioarele bisectoarelor unghiului B; K_a, K_b mijloacele segmentelor $L_a L'_a$, $L_b L'_b$; și W, W′ intersecțiile cercurilor de diametre $L_a L'_a$, $L_b L'_b$.



Aceste cercuri sunt cercurile lui APOLLONIUS ale triunghiului ABC, iar punctele W, W′ se numesc centrele izodinamice ale aceluiași triunghiu.

Fie încă AA_1, AA_2 două izogonale în unghiul A. Deoarece AL_a, AL'_a sunt și bisectoarele unghiului A_1AA_2 rezultă că diviziunea $L'_a A_1 L_a A_2$ este armonică și că

$$(1) \qquad \overline{K_a L_a^2} = \overline{K_a A_1} \cdot \overline{K_a A_2}.$$

Notăm cu O intersecția lui WW′ cu perpendiculara pe $A_1 A_2$ în mijlocul său. O va fi deci centrul unuia din cercurile care trec prin A_1, A_2.

Relaţia (1) arată că cercul $L_a AL'_a$ este ortogonal tuturor cercurilor trecând prin A_1, A_2 deci şi cercului O considerat. Dar deoarece O este pe axa radicală WW' a cercurilor K_a, K_b atunci cercul O care este ortogonal cu K_a va fi ortogonal şi cu K_b deci dacă O taie pe AC în B_1, B_2 atunci

$$\overline{K_b L_b^2} = \overline{K_b B_2} \times \overline{K_b B_1}$$

ceea ce arată că $L'_b AB_2B_1C$ formează o diviziune armonică. Cum BL_a, BL'_b sunt bisectoarele unghiului ABC, ele vor fi şi bisectoarele unghiului B_1BB_2. Prin urmare BB_1, BB_2 sunt izogonale în unghiul B al triunghiului ABC.

Dacă cercul O taie şi latura AB în două puncte C_1, C_2 se arată la fel că CC_1, CC_2 sunt izogonale.

Prin urmare cercurile care trec prin picioarele izogonalelor unui triunghiu şi au centru pe WW' taie ortogonal cercurile lui APOLLONIUS. Se cunoaşte însă proprietatea că aceste cercuri ortogonale formează un fascicol de gen opus aceluia definit de cele trei cercuri APOLLONIUS, care având două puncte comune reale sunt de speţa *„genul al doilea"*, iar cele două puncte reale W şi W', sunt punctele limită al fascicolului ortogonal de *„primul gen"*.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

Notă. D-l G-L GH. I. POPESCU propunătorul problemei, a enunţat-o sub forma:

Să se găsească cercurile care trec prin picioarele izogonalelor unui triunghiu.

Soluţia D-sale diferă de precedenta şi se încheie cu concluzia care este tocmai enunţul sub care a fost propusă problema.

Atât din soluţia D-lui G-L GH. I. POPESCU cât şi din soluţia precedentă se vede însă că în un triunghiu *sunt numai anumite izogonale prin picioarele căror trece un cerc şi că acest cerc are centrul pe linia centrelor izodinamice.*

Prin urmare enunţul cel mai adecuat acestei frumoase proprietăţi ar putea fi: *Dacă prin picioarele izogonalelor* (AA_1, AA_2), (BB_1, BB_2), (CC_1, CC_2) *ale unui triunghiu trece un cerc* (*w*), *acest cerc face poate din un fascicol de cercuri având ca bază dreapta ce uneşte centrele izodinamice ale triunghiului şi ca puncte limită însăşi aceste cercuri.*

GH. B.

PROBLEMA 5001. *Se consideră numărul* $N = 1000!$ *Se cere:*
1°. *Câte cifre are acest număr?*
2°. *Care sunt primele lui cinci cifre?*
3°. *Cu câte zerori se termină?*
4°. *Care este ultima lui cifră semnificativă (diferită de zero)?*

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

1° şi 2°. Se aplică formula lui STIRLING:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1+\theta_n}{288n^2}\right]$$

unde: $|\theta_n| < 1$ şi $\lim_{n\to\infty} |\theta_n| = 0.$

Punem:

$$A = 1.000^{1.000}\, e^{-1.000} \sqrt{2\pi \,.\, 1000}$$

şi

$$B = 1 + \frac{1}{12.000} + \frac{1+\theta_n}{288\,.\,(1.000)^2}.$$

Avem, evident:

$$\log N = \log A + \log B \qquad (1)$$

log. fiind simbolul logaritmilor cu baza 10.
Se obţine:

$$\log A = 3 \times 1000 - 1.000 \times 0,\ 434294481903$$

$$+ \frac{1}{2}[0,\ 3010300 + 0,\ 4971499 + 3]$$

$$\therefore \quad \log A = 2567{,}6046080.$$

Pe de altă parte, se ştie că pentru $|x| < 1$ avem:

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}$$

θ fiind un factor pozitiv mai mic decât unitatea, iar L însemnând logaritm cu baza *e*. Prin urmare:

$$LB = \frac{1}{12.000} + \lambda$$

$$|\lambda| \leqslant \frac{2}{288 \cdot (1.000)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(12.000)^2} 2 \cdot \frac{1}{4}$$

sau: $|\lambda| < 10^{-8}$. Trecând la logaritmii cu baza 10, obţinem:

$$\log B = \frac{0,43.429.45}{12.000} + \lambda' = 36.191.10^{-9} + \lambda'$$

$$|\lambda'| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-8}.$$

Introducând în (1) valorile lui logA şi logB, avem:

$$\log N = 2567,\ 604.644.2 + \lambda'$$

aproximaţia fiind de ordinul celei de a şaptea cifră zecimală.

Rezultă, în definitiv:

1°. Numărul N are 2568 cifre.

2°. Primele cifre sunt: 4, 0, 2, 3, 8 cum se poate citi fără nicio interpolare în tabelele de logaritmi cu 7 zecimale. Prin interpolare se obţine că cea de a şasea cifre este 7.

3°. Numărul zerorilor se obţine căutând puterea α cea mai mare a lui 5 care divide pe N, sau:

$$\alpha = E\left(\frac{1000}{5}\right) + E\left(\frac{1000}{25}\right) + E\left(\frac{1000}{125}\right) + E\left(\frac{1000}{625}\right) = 249$$

$E(\lambda)$ însemnând cel mai mare întreg cuprins în α.

Numărul N se termină deci cu 249 zerori.

4°. Începem prin a pune în evidenţă factorii 2 şi 5 ai numărului N. Pentru aceasta observăm că avem:

$$N = \frac{2^{500} \cdot 500!\ 5^{200} \cdot 200!}{10^{100} \cdot 100!} Q_1,$$

Q_1 fiind numărul întreg obţinut făcându-se produsul din 10 în 10 al numerilor întregi, mai mici ca 1.000 şi terminate cu 1, 3, 7 sau 9, adică:

$$Q_1 = (1.11.21 \ldots 991) \cdot (3.13.23 \ldots 993) \times (7.17.27 \ldots 997) \cdot (9.19.29 \ldots 999).$$

$Q_2, Q_3, \ldots, Q_{15}$ fiind produse analoage lui Q_1, însă cu factori mai mici sau egali cu numărul ce figurează sub semnul ! în egalităţile prin care este definit fiecare, separat, avem succesiv:

$$500! = \frac{2^{250}.250!\,5^{100}.100!}{10^{50}!\;50!}Q_2 \quad , \quad 200! = \frac{2^{100}.100!\,5^{40}.40!}{10^{20}.20!}Q_3 ,$$

$$250! = \frac{2^{125}.125!\,5^{50}.50!}{10^{25}.25!}Q_4 \quad , \quad 100! = \frac{2^{50}.50!\;5^{20}.20!}{10^{10}.10!}Q_5 ,$$

$$40! = \frac{2^{20}.20!\;5^{8}.8!}{10^{4}.4!}Q_6 \quad , \quad 125! = \frac{2^{62}.62!\;5^{25}.25!}{10^{12}.12!}Q_7 ,$$

$$50! = \frac{2^{25}.25!\;5^{10}.10!}{10^{5}.5!}Q_8 \quad , \quad 20! = \frac{2^{10}.10!\;5^{4}.4!}{10^{2}.2!}Q_9 ,$$

$$62! = \frac{2^{31}.31!\;5^{12}.12!}{10^{6}.6!}Q_{10} \quad , \quad 25! = \frac{2^{12}.12!\;5^{5}.5!}{10^{2}.2!}Q_{11} ,$$

$$10! = \frac{2^{5}.5!\;5^{2}.2!}{10}Q_{12} \quad , \quad 31! = \frac{2^{15}.15!\;5^{6}.6!}{10^{3}.3!}Q_{13} ,$$

$$12! = \frac{2^{6}.6!\;5^{2}.2!}{10}Q_{14} \quad , \quad 15! = \frac{2^{7}.7!\;5^{3}.3!}{10}Q_{15} .$$

De unde înmulţind membru cu membru, se deduce:

$$\frac{N}{10^{249}} = 2^{745}.3^{7}.7^{2}\,Q_1.Q_2,\ldots Q_{15} .$$

Pe de altă parte, numerele $Q_1, Q_2, \ldots Q_{15}$ fiind produs de factori terminaţi cu 1, 3, 7 sau 9 rezultă:

$$Q_1 \equiv 3^{100}.7^{100}.9^{100} \equiv 1 \quad \text{(Mod. 10)}$$
$$Q_2 \equiv 3^{50}.7^{50}.9^{50} \equiv 1 \quad \text{„}$$
$$Q_3 \equiv 3^{20}.7^{20}.9^{20} \equiv 1 \quad \text{„}$$
$$Q_4 \equiv 3^{25}.7^{25}.9^{25} \equiv -1 \quad \text{„}$$
$$Q_5 \equiv 3^{10}.7^{10}.9^{10} \equiv 1 \quad \text{„}$$
$$Q_6 \equiv 3^{4}.7^{4}.9^{4} \equiv 1 \quad \text{„}$$
$$Q_7 \equiv 3^{13}.7^{12}.9^{12} \equiv 3 \quad \text{„}$$
$$Q_8 \equiv 3^{5}.7^{5}.9^{5} \equiv -1 \quad \text{„}$$
$$Q_9 \equiv 3^{2}.7^{2}.9^{2} \equiv 1 \quad \text{„}$$
$$Q_{10} \equiv 3^{6}.7^{6}.9^{6} \equiv 1 \quad \text{„}$$
$$Q_{11} \equiv 3^{3}.7^{2}.9^{2} \equiv 3 \quad \text{„}$$
$$Q_{12} \equiv 3.7.9 \equiv -1 \quad \text{„}$$
$$Q_{13} \equiv 3^{3}.7^{3}.9^{3} \equiv -1 \quad \text{„}$$
$$Q_{14} \equiv 3.7.9 \equiv -1 \quad \text{„}$$
$$Q_{15} \equiv 3^{2}.7.9 \equiv -3. \quad \text{„}$$

Făcând produsul şi ţinând seamă că avem:

$$2^{4p+1} \equiv 2 \pmod{10}, \quad 3^7 \cdot 7^3 \equiv 1 \pmod{10}$$

obţinem, în definitiv:

$$\frac{N}{10^{249}} \equiv 2 \pmod{10}.$$

Ultima cifră căutată este 2.

D-nii O. SACTER şi M. F. VĂDUVA au rezolvat problema găsind rezultatele exacte la punctele 1°, 3° şi 4°. La punctul 2° întrebuinţând table de logaritmi cu 5 zecimale nu au determinat decât primele 4 cifre. Ultima parte au rezolvat-o extrăgând din tabele numerile prime mai mici decât 1.000 şi apoi descompunând pe N în factorii săi primi.

Ş. A. G.

PROBLEMA 5181. *In „Gazeta Matematică", Vol. XXVIII, pag. 217, am demonstrat că nici unul din numerele* $55\ldots5_{2n-1}6$ *nu poate fi patrat perfect. Să se demonstreze că de asemeni nici numerele* $55\ldots5_{2n}6$ *nu pot fi patrate perfecte în baza zecimală.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l A. O. ŞAICHIN (Elev-inginer, Politechnica Bucureşti).

Faţă de divizorul 11, numerele $55\ldots5_{2n}6$ sunt de forma $11m+6$. Dar numerele de această formă nu sunt patrate perfecte, căci faţă de acest divizor patratele perfecte sunt numai de formele

$$11m+1,\ 11m+3,\ 11m+4,\ 11m+5 \text{ sau } 11m+9.$$

Notă. 1°. Metoda aceasta nu se poate aplica la numerele $55\ldots5_{2n-1}6$, care sunt de forma $11m+1$,

2°. Această problemă rezolvă unul din cazurile ce se întâlnesc la problema 2865 propusă la pag. 70, Vol. XXVII, G. M.

PROBLEMA 5368. *Polara unui punct variabil* M *în raport cu elipsa* (E) *de centru* O, *o taie în punctele* A *şi* B.

Să se găsească locul punctelor M, *ştiind că suprafaţa elipsei* (E) *este egală cu suprafaţa patrulaterului* MAOB.

ION C. VASILIU.

Soluție dată de D-l IULIAN PETRESCU (Liceul Gh. Lazăr, București).

Fie: (E) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ $M(X, Y)$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ (AB) $\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-1=0$

elementele problemei.

Vom avea evident relațiile:

(1) $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0$ (2) $\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}-1=0$

(3) $\frac{Xx_1}{a^2}+\frac{Yy_1}{b^2}-1=0$ (4) $\frac{Xx_2}{a^2}+\frac{Yy_2}{b^2}-1=0$

și: aria MAOB = aria OMA + aria OBM =

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&1\\X&Y&1\\x_1&y_1&1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&1\\x_2&y_2&1\\X&Y&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(y_1-y_2)x-\frac{1}{2}(y_1-x_2)y$$

$$=\pi ab.$$

(5) $(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y=2\pi ab.$

Prin scăderea (3) — (4), deducem:

$$\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=-\frac{a^2Y}{b^2X},$$

iar din (1) — (2):

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{y_1^2-y_2^2}=-\frac{a^2}{b^2},$$

sau: $$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}=-\frac{a^2}{b^2}.$$

De unde rezultă:

(6) $(y_1+y_2)X-(x_1+x_2)Y=0.$

Din (5) + (6):

(7) $Xy_1-Yx_1=\pi ab.$

Vom elimina apoi pe x_1 şi y_1 dintre relaţiile (1), (3) şi (7) şi vom avea în definitiv locul lui M:

$$\frac{X^2}{a^2(1+\pi^2)}+\frac{Y^2}{b^2(1+\pi^2)}=1.$$

O elipsă omotetică cu (E), centru de omotetie O, raport de omotetie $k=\sqrt{1+\pi^2}$.

Observaţiuni. Mai general, dacă notăm cu Ω_1 suprafaţa MAB, cu Ω_2 suprafaţa OAB, găsim:

$$\Omega_1=ab\,\frac{\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1\right)^{3/2}}{\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}} \qquad \Omega_2=ab\,\frac{\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1\right)^{1/2}}{\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}}.$$

Ω fiind suprafaţa elipsei (E), vom putea impune diferite condiţii, cărora le va corespunde o serie de locuri geometrice:

1) $$\Omega_1+\Omega_2=\lambda\Omega.$$

Locul e elipsa omotetică:

$$\frac{X^2}{a^2(1+\lambda^2\pi^2)}+\frac{Y^2}{b^2(1+\lambda^2\pi^2)}=1.$$

Pentru $\lambda=1$ avem problema de faţă

2) $$\Omega_1=\lambda\Omega_2.$$

Locul e elipsa omotetică:

$$\frac{X^2}{a^2(1+\lambda)}+\frac{Y^2}{b^2(1+\lambda)}=1.$$

3) $$\Omega_1\,\Omega_2=\lambda\Omega^2.$$

Locul e format din elipsele omotetice:

$$\frac{X^2}{\frac{a^2}{1\pm\lambda\pi^2}}+\frac{Y^2}{\frac{b^2}{1\pm\lambda\pi^2}}=1.$$

I. C. V.

PROBLEMA 5379. *Dacă* a *este un număr prim şi* $\varphi_i(I)$ *este indicatorul de ordinul* i *a lui* I, *atunci avem*:

$$[\varphi_\alpha(a^\alpha)]^n \geqslant \varphi_{\alpha n}(a^{\alpha n}).$$

Proprietatea poate fi extinsă la un număr oarecare?

COMANDOR I. LINTEŞ.

Ştim că:

$$\varphi_1(a^\alpha) = a^{\alpha-1}.(a-1).$$

Vom admite apoi că:

$$a - 1 = 2^\beta . 3^\gamma \ldots p^\lambda$$

unde p este prim şi inferior lui a.

Atunci:

$$\varphi_2(a^\alpha) = a^{\alpha-2}.(a-1).\varphi(2^\beta . 3^\gamma \ldots p^\lambda)$$
$$= a^{\alpha-2}.(2^\beta . 3^\gamma \ldots p^\lambda)\,(2^{\beta-1} . 3^{\gamma-1} \ldots p^{\lambda-1})$$
$$\times (2-1).(3-1)\ldots(p-1).$$

Admitem apoi că:

$$(2-1).(3-1)\ldots(p-1) = 2^x . 3^y \ldots q^z$$

unde q este prim şi inferior lui p.

Cu aceasta avem:

$$\varphi_2(a^\alpha) = a^{\alpha-2} . 2^{2\beta-1+x} . 3^{2\beta-1+y} \ldots 9^{2\varepsilon-1+z} \ldots p^{2\lambda-1}.$$

In aceste condiţiuni putem scrie:

$$\varphi_i(a^\alpha) = a^{\alpha-i} . 2^{i.\beta-(i-1)+x} . 3^{i.\gamma-(i-1)+y} \ldots p^{i\lambda-(i-1)}.$$

Prin urmare:

$$\varphi_\alpha(a^\alpha) = 2^{\alpha.\beta-\alpha+x+1} . 3^{\alpha.\gamma-\alpha+y+1} \ldots p^{\alpha.\lambda-\alpha+1}$$

şi

$$\varphi_{n\alpha}(a^{n\alpha}) = 2^{n\alpha.\beta-n\alpha+x+1} . 3^{n\alpha.\gamma-n\alpha+y+1} \ldots p^{n\alpha.\lambda-n\alpha+1}.$$

Dar observăm că:

$$n(\alpha.\beta - \alpha + x + 1) > n\alpha\beta - n\alpha + x + 1$$

căci se reduce la: $n \geqslant 1$ ceea ce este evident. Aceeaşi neegalitate vom avea cu toţi ceilalţi exponenţi, prin urmare neegalitatea dată este stabilită.

Pentru cazul când $a = 2$ avem egalitate căci:

$$\varphi_\alpha(2^\alpha) = 1 \quad \text{şi} \quad \varphi_{n\alpha}(2^{n\alpha}) = 1.$$

Pentru $a > 2$ avem neegalitate, căci:

$$\varphi_\alpha(3^\alpha) = 2 \quad \text{şi} \quad \varphi_{n\alpha}(3^{n\alpha}) = 2$$

deci:

$$2^n > 2.$$

Pentru cazul când $a = 2^k + 1$, avem:

$$\varphi_\alpha(a^\alpha) = 2^{\alpha(k-1)+1} \quad \text{şi} \quad \varphi_{n\alpha}(a^\alpha) = 2^{n\alpha(k-1)+1}$$

deci:

$$2^n > 2.$$

Pentru cazul unui număr oarecare N, ar trebui să avem:

$$[\varphi_m(N^m)]^n \geqslant \varphi_{n.m}(N^{n.m}).$$

Vom examina câteva cazuri.

Fie $N = a^\alpha . b^\alpha$, în acest caz exponenţii finali ai factorilor: 2, 3, ... p, analog cazului problemei: 5379 vor fi în cazul când $m = \alpha$:

— pentru 2: $\alpha . \beta - \alpha + x + 1 + \alpha . \beta' - \alpha + x' + 1$

— „ 3: $\alpha . \gamma - \alpha + y + 1 + \alpha . \gamma' - \alpha + y' + 1$

.....

— pentru p: $\alpha . \lambda - \alpha + 1 + \alpha . \lambda' - \alpha + 1$

unde exponenţii $\beta', \gamma', \ldots \lambda'$ corespund factorilor lui b.

In consecinţă neegalitatea va subsista.

Dacă exponentul lui b va fi mai mare sau mai mic decât α, atunci exponenţii finali vor diferi în aceeaşi măsură faţă de cei de mai sus şi în consecinţă neegalitatea va subsista.

In mod analog procedându-se pentru oricâţi factori primi ar avea N, vom constata că neegalitatea subsistă.

Condiţia pusă mai sus că $m = \alpha$, poate să fie ridicată de oarece putem înlocui pretutindeni pe α prin m.

Egalitate putem avea în unele cazuri particulare, cum ar fi dacă $N = 2^\alpha . 3^\beta$, atunci:

$$\varphi_m(N^m) = 2^{m.\alpha} . 3^{m(\beta-1)}$$

$$\varphi_{n.m}(N^{n.m}) = 2^{n.m.\alpha} . 3^{n.m(\beta-1)}$$

deci în acest caz:

$$[\varphi_m(N^m)]^n = \varphi_{n.m}(N^{n.m}).$$

Dacă luăm $N = 3^{\alpha} . 5^{\beta}$, atunci avem:

$$\varphi_m (N^m) = 3^{m(\alpha-1)} . 5^{m(\beta-1)} . 2^{2m+1}$$

$$\varphi_{n.m} (N^{n.m}) = 3^{n.m(\alpha-1)} . 5^{n.m(\beta-1)} . 2^{2.n.m+1}.$$

Prin urmare neegalitatea se reduce la: $2^n > 2$ ceea ce este evident pentru $n > 1$.

Observaţiuni. 1. O soluţie mai lungă însă mai riguroasă a dat D-l D. BOIANGIU (elev-inginer Bucureşti).

Soluţiuni mai puţin riguroase au dat D-nii: I. C. NEGRESCU şi M. GH. POPESCU.

2. Pentru cazul general unii corespondenţi au plecat dela egalitatea:

$$\varphi_k (a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} \ldots) = \varphi_k (a^{\alpha}) . \varphi_k (b^{\beta}) \ldots$$

care nu este adevărată decât numai în unele cazuri, aşa după cum vom arăta într'o notă ulterioară.

C-DOR I. LINTEŞ.

PROBLEMA 5445. *Să se găsească locul punctelor din care se pot duce la o elipsă dată normale care formează un fascicol armonic.*

ION C. VASILIU.

Fie elipsa: (E) $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ şi M (α, β) un punct din planul său.

Scriem că dreapta $y - \beta = t(x - \alpha)$ e normală elipsei (E) şi avem ecuaţia care dă coeficienţii unghiulari ai normalelor ce trec prin punctul M:

$$6\alpha^2 b^2 t^4 - 12\alpha\beta b^2 t^3 + 6(\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - c^4) t^2 - 12\alpha\beta a^2 t + 6\beta^2 a^2 = 0.$$

Luând pe o axă orientată:

$$\overline{OA_1} = t_1 \quad , \quad \overline{OA_2} = t_2 \quad , \quad \overline{OA_3} = t_3 \quad , \quad \overline{OA_4} = t_4$$

condiţia ca punctele A_1, A_2, A_3, A_4 să formeze o diviziune armonică se găseşte a fi:

$$\begin{vmatrix} 6\alpha^2 b^2 & -3\alpha\beta b^2 & \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - c^4 \\ -3\alpha\beta b^2 & \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - c^4 & -3\alpha\beta a^2 \\ \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - c^4 & -3\alpha\beta a^2 & 6\beta^2 a^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vezi de ex.: *Exercices d'algèbre.* AUBERT et PAPELIER. Vol. I.

Desvoltând, ecuaţia lui M se scrie:

$$(\alpha^2a^2 + \beta^2b^2 - c^4)^3 + 54a^2b^2c^4\alpha^2\beta^2 = 0.$$

Sau, schimbând notaţiile variabilelor,

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 54a^2b^2c^4x^2y^2 = 0.$$

Considerând astroida (desfăşurată) elipsei (E):

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0,$$

putem spune:

Curba lor este de gradul 6, are punctele singulare de întoacere comune cu astroida şi e interioară acesteia.

Soluţie bună, ceva mai lungă dela D-l PAUL P. DRĂGHICESCU (Liceul Militar, Iaşi).

I. C. V.

PROBLEMA 5473. *Să se stabilească identitatea*

$$2 \times 5^n \sin(x + 2n\varphi) = A \sin x - i\, B \cos x,$$

unde,

$$\varphi = \text{arc cotg}2 \quad ; \quad A = (2+i)^{2n} + (2-i)^{2n} \quad ;$$

$$B = (2+i)^{2n} - (2-i)^{2n} \quad , \quad i = \sqrt{-1}.$$

Să se verifice pentru cazul $n = 1$ *şi* $n = 2$.

V. ALACI.

Soluţie. Dacă $\varphi = \text{arc cotg}2$, rezultă $\text{cotg}\varphi = 2$ şi atunci

$$(1) \quad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{cotg}^2\varphi}} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{5}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{\text{cotg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\text{cotg}^2\varphi}} = \dfrac{2}{\pm\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Dacă acum în relaţia lui MOIVRE

$$(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^{2n} = \cos 2n\varphi \pm i \sin 2n\varphi$$

înlocuim $\cos\varphi$ şi $\sin\varphi$ prin valorile lor din (1), găsim

$$(2) \quad \begin{cases} (2+i)^{2n} = 5^n(\cos 2n\varphi + i \sin 2n\varphi) \\ (2-i)^{2n} = 5^n(\cos 2n\varphi - i \sin 2n\varphi) \end{cases}.$$

In virtutea relațiilor (2), expresiile lui A și B din enunț, devin

$$(3)\qquad \begin{cases} A = (2+i)^{2n} + (2-i)^{2n} = 2 \times 5^n \cos 2n\varphi \\ B = (2+i)^{2n} - (2-i)^{2n} = 2 \times 5^n\, i \sin 2n\varphi \end{cases}$$

De aci deducem

$$(4)\qquad A \sin x - iB \cos x = 2 \times 5^n (\cos 2n\varphi \sin x + \sin 2n\varphi \cos x),$$

sau

$$A \sin x - iB \cos x = 2 \times 5^n \sin (2n\varphi + x).$$

Verificări. 1°. Pentru $n = 1$, din (3) deducem

$$\begin{cases} A = (2+i)^2 + (2-i)^2 = 6 \\ B = (2+i)^2 - (2-i)^2 = 8i \end{cases}$$

Ținând seamă de relațiile (1), avem:

$$(5)\qquad \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{3}{5}, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi = \frac{4}{5}.$$

Inlocuind aceste valori în identitatea dată scrisă sub forma (4), găsim identitatea

$$6 \sin x + 8 \cos x = 2 \times 5 \left(\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right).$$

2°. Pentru $n = 2$, din (3) deducem

$$\begin{cases} A = (2+i)^4 + (2-i)^4 = -14 \\ B = (2+i)^4 - (2-i)^4 = 48i \end{cases}$$

Ținând seamă de relațiile (5), avem:

$$\cos 4\varphi = 2\cos^2 2\varphi - 1 = -\frac{7}{25}, \quad \sin 4\varphi = 2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi = \frac{24}{25}.$$

Inlocuind aceste valori în identitatea dată scrisă sub forma (4), găsim identitatea

$$-14 \sin x + 48 \cos x = 50 \left(-\frac{7}{25} \sin x + \frac{24}{25} \cos x \right).$$

Soluții date de D-nii: C. BAKONYI (Polit., Timișoara), CH. BALTĂ, GH. GH. BROȘTEANU, P. P. DRĂGHICESCU (Lic. Milit., Iași), C. D. EFTIMIE (Polit. București), O. M. GHEORGHIU (Student, București), I. N. GLIGOR (Șc. Of. Rez. Art., Craiova), M. A. NEGREA (Brăila), I. C. NEGRESCU (Lic. Spiru Haret, București), A. N. POPA (Lic. Milit., Iași), M. D. STOENESCU (Șc. Of. de Aviație, București), GH. D. VOICU (Șc. Of. de Aviație, București) și E. WEGENER (București).

Observare. D-nii: P. P. DRĂGHICESCU şi A. N. POPA, au generalizat problema în felul următor:

Să se stabilească identitatea

$$2 \times (k^2 + 1)^n \sin(x + 2n\varphi) = A \sin x - i\, B \cos x,$$

unde,

$$\varphi = \operatorname{arc\,cotg} k \quad ; \quad A = (k + i)^{2n} + (2 - i)^{2n} \quad ;$$

$$B = (k + i)^{2n} - (k - i)^{2n} \quad , \quad i = \sqrt{-1}.$$

Demonstraţia este analoagă cu cea dată în soluţia precedentă.

PROBLEMA 5504. *Fie* AA_1, BB_1, CC_1 *cevienele punctului* I *în triunghiul* ABC, c_β *şi* b_γ *intersecţiile paralelelor din* C_1 *şi* B_1 *la* AA_1 *cu* BB_1 *şi* CC_1.

1°. *Dreptele* AA_1, Bb_γ, Cc_β *sunt concurente.*

2°. *Triunghiul format de dreptele analoage* $c_\beta b_\gamma$, $a_\beta b_\alpha$, $a_\gamma c_\alpha$ *este omologic cu triunghiul* ABC.

S-LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (Liceul militar Iaşi).

1°. Fiindcă:

$$\frac{c_\beta B}{c_\beta I} = \frac{C_1 B}{C_1 A} \quad \text{şi} \quad \frac{b_\gamma I}{b_\gamma C} = \frac{B_1 A}{B_1 C}$$

rezultă:

$$\frac{A_1 C}{A_1 B} \cdot \frac{c_\beta B}{c_\beta I} \cdot \frac{b_\gamma I}{b_\gamma C} = \frac{A_1 C}{A_1 B} \cdot \frac{C_1 B}{C_1 A} \cdot \frac{B_1 A}{B_1 C} = -1$$

adică dreptele AA_1, Bb_γ, Bc_β sunt concurente.

2°. Dreapta $c_\beta b_\gamma$ taie pe BC în conjugatul punctului A, faţă B, C şi cum conjugatele armonice ale picioarelor cevienelor sunt colineare, dreptele considerate şi laturile omoloage ale triunghiului de referinţă se întâlnesc în 3 puncte colineare, triunghiurile respective sunt omologice.

Au dat soluţii omoloage D-nii: H. M. BODNĂRESCU (Şc. Polit. Bucureşti), C. V. PANTELIMON (Şc. Of. art. antiaeriană), A. ANDREI, C. BOSINCEANU (Lic. militar, Iaşi), M. GH. POPESCU (Lic. Brătianu, Piteşti) şi R. P. VOINEA (Craiova).

Observaţiune. 1°. Se vede imediat că triunghiul dreptelor $c_\beta b_\gamma$ şi analoagele este omologic cu triunghiul pedal al punctului I, adică cu $A_1B_1C_1$, laturile omoloage întâlnindu-se în conjugatele picioarelor cevienelor corespunzătoare care sunt colineare.

2°. Prelungind paralelele Bb_γ, C_1c_β până taie cevienele Cc_β, Bb_γ, punctele obţinute determină o dreaptă ce trece tot prin conjugatul armonic al lui A_1. Ş. a. m. d., operaţia putându-se repeta la infinit şi deci toate triunghiurile corespunzătoare sunt omologice între ele, cu triunghiul $A_1B_1C_1$ şi cu triunghiul ABC.

CPT. I. GH. Z.

PROBLEMA 5507. *Să se stabilească identitatea*

$$\frac{\sin 6\alpha - 2\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\sin 8\alpha - 4\sin 6\alpha + 6\sin 4\alpha - 4\sin 2\alpha} + \frac{1}{4\sin^2\alpha} = 0.$$

V. ALACI.

Prima soluţie. Fie A şi B termenii primei fracţii. Folosind formulele de transformare cunoscute, avem succesiv:

$$A = (\sin 6\alpha + \sin 2\alpha) - 2\sin 4\alpha =$$

$$= 2\sin 4\alpha \cos 2\alpha - 2\sin 4\alpha = 2\sin 4\alpha (\cos 2\alpha - 1),$$

$$B = \sin 8\alpha - 4(\sin 6\alpha + \sin 2\alpha) + 6\sin 4\alpha =$$

$$= 2\sin 4\alpha \cos 4\alpha - 8\sin 4\alpha \cos 2\alpha + 6\sin 4\alpha =$$

$$= 2\sin 4\alpha (\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3) =$$

$$= 2\sin 4\alpha (2\cos^2 2\alpha - 1 - 4\cos 2\alpha + 3) = 4\sin 4\alpha (\cos 2\alpha - 1)^2.$$

De aci rezultă

$$\frac{A}{B} = \frac{2\sin 4\alpha (\cos 2\alpha - 1)}{4\sin 4\alpha (\cos 2\alpha - 1)^2} = \frac{1}{2(\cos 2\alpha - 1)} = -\frac{1}{4\sin^2\alpha}$$

şi prin urmare identitatea dată este stabilită.

Bune soluţii analoage date de D-nii: A. GH. ANDREI (Lic. Milit., Iaşi), C. BAKONYI (Polit., Timişoara), C. BALTĂ, H. C. BODNĂRESCU (Polit. Bucureşti), C-TIN BOSINCEANU (Lic. Milit., Iaşi), P. DRĂGHICESCU (Lic. Milit., Iaşi), I. GR. ENĂCHESCU (Lic. Milit., Timişoara), I. N. GLIGOR (Şc. Of. Rez. Art., Craiova), P. I. OANŢĂ, SORIN N. OLTEANU, GH. D. OPREA (Lic. Milit., Timişoara), CICERONE ROMANESCU (Lic. Milit., Iaşi), M. D. STOENESCU (Şc. Of. de Aviaţie), T. D. TURCULEŢ (Lic. Milit., Iaşi), GH. ŢONCIU (Lic. Milit., Timişoara), D-TRU GH. VASILIU (Lic. Milit., Iaşi) şi D. VOICU (Şc. Of. de Aviaţie).

Soluția 2-a, dată de D-l C. BAKONYI (Polit., Timișoara). Folosim metoda dată de D-l Prof. V. ALACI în *„Revista Matematică din Timișoara"*, Anul XV, pag. 82.

In acest scop, considerăm identitatea algebrică, evidentă

$$\frac{y(y^6-2y^5+y^4-y^2+2y-1)}{(y^2-2y+1)(y^6-2y^5+y^4-y^2+2y-1)}=\frac{y}{(y-1)^2},$$

sau

$$\frac{y^7-2y^6+y^5-y^3+2y^2-y}{y^8-4y^7+6y^6-4y^5+4y^3-6y^2+4y+1}-\frac{y}{(y-1)^2}=0.$$

Impărțim prin y^4 termenii primei fracții și prin y termenii fracției a 2-a, și apoi grupând convenabil termenii, obținem:

$$(1)\quad \frac{(y^3-y^{-3})-2(y^2-y^{-2})+(y-y^{-1})}{(y^4-y^{-4})-4(y^3-y^{-3})+6(y^2-y^{-2})-4(y-y^{-1})}-$$

$$-\frac{1}{(y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})^2}=0.$$

Dacă aci facem substituția

$$(2)\qquad y=e^{2i\alpha}\qquad (i=\sqrt{-1})$$

și observăm că, conform formulelor lui EULER avem din (2)

$$y^k-y^{-k}=e^{2ik\alpha}-e^{-2ik\alpha}=2i\sin k\alpha,$$

egalitatea (1) devine, simplificând prin $2i$ prima fracție și observând în a 2-a fracție că $i^2=-1$:

$$\frac{\sin 6\alpha-2\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 8\alpha-4\sin 6\alpha+6\sin 4\alpha-4\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}=0.$$

Observare. Metoda folosită, poate sugera stabilirea și altor identități analoage. (A se vedea articolul menționat în soluția 2-a).

PROBLEMA 5562. R, S, ω *fiind elementele ştiute ale unui triunghiu, să se demonstreze că, dacă avem relaţia*

$$S\cot^3\omega + 9S\cot.\omega = 27R^2$$

triunghiul este automedian.

ION C. VASILIU.

Soluţie dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU şi D. GH. VASILIU (elevi liceul Militar, Iaşi).

Ştiind că:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad \cot\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S},$$

relaţia devine:

$$(a^2+b^2+c^2)[(a^2+b^2+c^2)^2 + 144S^2] = 108a^2b^2c^2.$$

Insă: $$16S^2 = -\Sigma a^4 + 2\Sigma b^2c^2$$

şi relaţia se scrie:

$$(a^2+b^2+c^2)[20\Sigma b^2c^2 - 8\Sigma a^4] - 108a^2b^2c^2 = 0$$

$$2\Sigma a^6 - 3\Sigma a^4(b^2+c^2) + 12a^2b^2c^2 = 0.$$

Sau, grupând convenabil:

$$(2a^2-b^2-c^2)(2b^2-c^2-a^2)(2c^2-a^2-b^2) = 0.$$

Ceea ce arată că triunghiul e automedian.

D-nii: CONST. PANTELIMON (Şc. of. art. antiaeriană), MIREL D. STOENESCU (Şc. of. aviaţie), CLAUDIU SENI (Bacalaureat Bucureşti) şi C. C. ILIESCU (Colegiul N. M. N. F.) au rezolvat parţial problema, izolând numai termenul I.

D-nii: EUGEN WEGENER (Bacalaureat Bucureşti) şi ŞERB. I. STOIANOVICI (Colegiul N. M. N. F) s'au mulţumit să verifice relaţia, în ipoteza că triunghiul e automedian.

I. C. V.

EXERCIŢII

10. Să se arate că între unghiurile unui triunghiu există relaţia:

$$\sin A \sin B \sin C (\sin A \sin B \sin C - 1) + \sum \sin^2 A (\sin C - \sin B) = \prod (\sin^2 A - \sin B).$$

CPT. E. ŞT. IACOB.

R. In identitatea

$$xyz(xyz - 1) + \sum x^2 (z - y) = (x^3 - y)(y^2 - z)(z^2 - x)$$

din *Cours d'Algèbre* de B. NIEWENGLOWSKI, Vol. I, pag. 38 facem

$$x = \sin A \quad , \quad y = \sin B \quad , \quad z = \sin C$$

şi se găseşte relaţia din enunţ.

11. Să se afle urmele unei drepte de profil cunoscând: urmele planului de profil $P'\alpha P$ în care este situată dreapta, proiecţiunile a două puncte (a', a), (b', b) şi distanţele respective d_1, d_2, dela aceste puncte la dreapta de profil.

VIRGIL GHIŢESCU.

R. Fie (a_1', a_1), (b_1', b_1), proiecţiunile punctelor pe planul $P'\alpha P$. Rabatem acest plan pe planul orizontal de proiecţie. Fie A_1, B_1, rabaterile punctelor precedente. Potrivit teoremei celor trei perpendiculare, descriem cercurile cu centrele în A_1, B_1 şi cu razele respective $\delta_1 = \sqrt{d_1^2 - \overline{aa_1}^2}$ şi $\delta_2 = \sqrt{d_2^2 - \overline{bb_1}^2}$. Dreapta de profil în rabatere este tangenta comună cercurilor (A_1), (B_1). Urcând această dreaptă $H_1 V_1$ în proiecţie, obţinem proiecţiunile urmelor ei. Problema poate avea 4, 3, 2, 1, 0 soluţiuni după poziţia unul faţă de altul a cercurilor (A_1) şi (B_1).

12. Într'un triunghiu cu laturile în progresie aritmetică avem

$$3 \sin \frac{B}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

MARCEL D. COTARIU.

R. Fie

$$a + c = 2b.$$

Din relaţiile fundamentale se scoate

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{3b}{\sum \sin A}$$

$$\therefore \quad 3 \sin B = \sum \sin A = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

de unde derivă relaţia din enunţ.

13. In triunghiul ABC se consideră punctele M, N colineare cu C şi fie b, b' intersecţiile lui AC cu BM şi BN, iar a, a' intersecţiile lui BC cu AM şi AN. Să se demonstreze că:

$$\frac{Ab}{Ab'} \cdot \frac{Ba'}{Ba} \cdot \frac{Cb'}{Cb} \cdot \frac{Ca}{Ca'} = 1.$$

M. I. POPESCU-STĂNEŞTI.

R. Fie c intersecţia lui AB cu CNM. Avem, după teorema lui CEVA:

$$\frac{cB}{cA} \cdot \frac{b'A}{b'C} \cdot \frac{a'C}{a'B} = -1$$

$$\frac{cB}{cA} \cdot \frac{bA}{bC} \cdot \frac{aC}{aB} = -1.$$

Impărţind aceste relaţii membru cu membru se găseşte relaţia din enunţ.

14. Să se demonstreze relaţiile

$$(a-b)\,r_a\,r_b + (b-c)\,r_b\,r_c + (c-a)\,r_c\,r_a = 0$$

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_a^3} - \frac{1}{r_b^3} - \frac{1}{r_c^3} = \frac{12R}{S^2}.$$

MARCEL D. COTARIU.

R. *Prima relaţie*, prin împărţirea cu $r_a\,r_b\,r_c$ şi înlocuirea: r_a cu $\frac{S}{p-a}$, etc...., devine identitatea cunoscută

$$(a-b)(a+b-c) + (b-c)(-a+b+c) + (c-a)(c-b+a) \equiv 0.$$

Partea întâia a celei *de a 2-a relaţii*, ţinând seama de:

$$r = \frac{S}{p}\ ;\ r_a = \frac{S}{p-a}, \text{ etc...., devine}$$

$$\frac{(a+b+c)^3 - (-a+b+c)^3 - (a-b+c)^3 - (a+b-c)^3}{8S^3}$$

sau

$$\frac{24abc}{8S^3} = \frac{12R}{S^2}.$$

PROBLEME PROPUSE

5739. Să se găsească toate numerele ale căror bipatrate se termină cu 00001.

A. GLODEN.

5740. Intre patratele a două numere consecutive este totdeauna cel puţin un număr prim.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5741. Să se determine funcţia cea mai generală $F(x, y)$, care satisface ecuaţiei funcţionale

$$F(x, y) + F(y, x) = 1.$$

M. GHERMĂNESCU.

5742. Să se elimine φ între relaţiile:

$$A \cdot \sin\varphi + B \cdot \cos\varphi = \sin 3\varphi$$

$$A \cdot \sin(V + \varphi) + B\cos(V + \varphi) = \sin 3(V + \varphi)$$

A, B, V fiind date.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

5743. Să se arate că triunghiurile formate de axele radicale ale cercurilor variabile I faţă de trei cercuri fixe O_1, O_2, O_3 sunt omologice şi au: *a)* acelaşi centru de omologie; *b)* axele de omologie sunt trei câte trei concurente.

THEODOR GH. COCEA.

5744. In triunghiul ABC, fie A_1, B_1, C_1 picioarele cevienelor punctului I. Paralelele duse din B şi C la AA_1 taie respectiv pe AC în A_2 şi B_2, iar pe CC_1 şi BB_1 în C′ şi B′.

Se cere locul intersecţiei dreptei A_2B_2 şi B′C′ când I variază în planul triunghiului de referinţă.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5745. Din vârfurile triunghiului ABC, luate drept centre, se construiesc trei cercuri oarecare. Fie A'A'', B'B'', C'C'' cele trei coarde comune ale acestor cercuri şi M centrul lor radical. Punctele A', B', C' sunt către interiorul triunghiului ABC, iar A'', B'', C'' către exterior. Să se demonstreze, că:

1°. Centrele O', O'' ale cercurilor A'B'C', A''B''C'' sunt puncte izogonale în triunghiul ABC;

2°. Dacă O', O'' rămân fixe, vârfurile triunghiurilor A'B'C', A''B''C'' descriu nişte drepte;

3°. Se pot construi mai multe triunghiuri A'B'C' sau A''B''C'' egale cu un triunghiu dat? Câte anume?

4°. Triunghiul podar al punctului M în triunghiul A'B'C' este asemenea cu triunghiul A''B''C'' şi invers, iar triunghiurile podare ale izogonalelor lui M în triunghiurile A'B'C' şi A''B''C'' sunt omotetice cu triunghiul ABC.

G-L GH. I. POPESCU.

5746. Se consideră un cerc (O) cu centrul O şi două puncte P şi Q. Notăm cu P_1 şi Q_1 inversele punctelor P şi Q în raport cu cercul (O), iar cu R punctul comun dreptelor PQ_1 şi QP_1. Să se demonstreze, că:

1°. Printre conicele având focarele în P şi Q se găseşte una singură (Σ) astfel că există triunghiuri înscrise în cercul (O) şi circumscrise ei.

Analog, printre conicele cu focarele în P_1 şi Q_1, se găseşte una singură (Σ_1) astfel că există triunghiuri înscrise în cercul (O) şi circumscrise ei.

2°. β şi β_1 fiind axele mici ale conicelor (Σ) şi (Σ_1) avem relaţia:

$$\frac{\beta^2}{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}} = \frac{\beta_1^2}{\overline{OP_1}\cdot\overline{OQ_1}}.$$

3°. Două din tangentele comune conicelor (Σ) şi (Σ_1) trec prin punctul R. Aceste tangente sunt imaginare.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5747. Laturile, unui unghiu drept cu vârful în punctul fix A, întâlnesc în B, C şi B', C' două drepte paralele Δ şi Δ'. Să se determine poziţia unghiului drept aşa încât suprafaţa patrulaterului BCB'C' să fie egală cu un număr dat.

G-L GH. BUICLIU.

5748. Să se studieze ecuaţiile integrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^a \frac{1}{2} |x - s| \varphi(s)\, ds \quad ; \quad \int_0^a \frac{1}{2} |x - s| \varphi(s)\, ds = f(x)$$

unde a e o constantă, determinându-se valorile caracteristice, funcţiile fundamentale şi soluţia ecuaţiei de specia I-a.

G. CĂLUGĂREANU.

5749. O masă orizontală are *două* găuri la o distanţă l una de cealaltă. Un fir fără greutate este aşezat pe masă şi fiecare capăt al său trece prin câte o gaură şi prinde o greutate P. Pe porţiunea de fir aşezată pe masă, lunecă fără frecare, un inel foarte mic, de greutate G. Inelul, presupus aşezat la egală distanţă de cele două găuri este deplasat o distanţă a, tot pe masă, perpendiculară pe linia găurilor şi i se dă drumul.

Să se studieze mişcarea inelului şi a greutăţilor P, precum şi tensiunea în fir în timpul mişcării.

GABRIELA ŢIŢEICA.

ERATĂ. 1°. Semnele $\int$ dela pag. 161 se înlocuiesc prin litera ρ.

2°. Autorul problemei 4730 dela pag. 170 este A. ANGELESCU.

3°. Primele 2 egalităţi dela punctul 2° pag. 179 se înlocuiesc prin

$$S + r = 36a + 4(a + b) + 7r = 9m$$

$$4(a + b) + 7r = 9m.$$

4°. In enunţul problemei 5733 pag. 191 se înlocuieşte în rândul al doilea cuvântul *acestora* prin acestuia.

5°. La punctul 2° al problemei 5734 pag. 192 se înlocuieşte c_1BMA_1' prin c_1BMa_1'.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bârzescu M. (5056, 694); *Buzincu I. I.* (5646, 703, 07); *Căruntu D. Florin* (5698); *Ciumaşu V.* (5056); *Constantinescu I. M.* (5694); *Corbaru A. Dan* (5722); *Donţu Gh. Gh.* (5721, 22); *Drăghicescu P. P.* (3635, 736, 4407, 772, 962, 92, 5179, A, E, N, P); *Eftimie D. C.* (2130, 4360, 70, 5117, 626, 44, 94, 726); *Gheorghiu E. Oct.* (5399, 705, 07, 10, 25); *Gloden A.* (5670); *Hofer O.* (N); *Iacob Şt. E.* Căp. (5172, 575, 80, 657); *Marinescu M. Ioan* (5698); *Milea C. Const.* (5698); *Nache D.* (5056); *Pătraşcioiu I. M.* (5575, 80); *Pitiş L. N.* (5575, 667, 92); *Puchiu T. Gh.* (5698); *Roşu T. N.* (5694); *Staicu I. C.* (5706); *Ştefănescu N.* Căp. (5694, 95, 704, 05, 07, 10, 25); *Ţapu N. V.* (5703, 06); *Teodorescu St. I.* (3069, 5615); *Vasiliu Gh. D.* (5735); *Wegener N. E.* (5615, 19, 722).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică.* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 84.646

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1943

BIBLIOTECA CENTRALĂ ACADEMIA REPUBLICII SIBIU

SUMARUL

1. Spiru Haret . . . . . *V. Vâlcovici.*
2. O analogie . . . . . *Prof. D. Pompeiu.*
3. O generalizare a sumelor sinusurilor şi cosinusurilor arcelor în progresie aritmetică . . . . . *Adrian I. Popescu.*
4. Ecuaţii pseudo-reciproce . . . . . *I. V. Mătieş.*
5. Concursul „Gazetei Matematice" . . . *Delegaţia Societăţii.*
6. Note matematice: 27 — 33.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3041, 3253, 4516, 4633, 5047, 5474, 5537, 5645, 5689, 5706.
11. Exerciţii: 15.
12. Probleme propuse: 5750 — 5761.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 03, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8	300	350	100
9—16	500	580	160
Coperta	120	160	80

SPIRU HARET

De curând s'au împlinit treizeci de ani dela moartea lui SPIRU HARET.

Unele Instituţii de cultură au folosit acest prilej pentru a aduce un omagiu public marelui bărbat de Stat, căruia ţara noastră îi datoreşte un fecund impuls cultural. Căci HARET a fost nu numai un matematician de seamă, cu nume printre specialiştii din întreaga lume, dar a fost mai ales un îndrumător al învăţământului pe căi rodnice.

Gazeta Matematică şi-a văzut deodată sporite puterile în munca ei de sacrificiu pentru răspândirea ştiinţelor matematice, mulţumită acţiunii de revizuire şi de clădire a întregului nostru învăţământ, pe care a întreprins-o SPIRU HARET în calitate de Ministru al Instrucţiunii publice. De aceea *Gazeta Matematică* simte de datoria sa să pomenească numele matematicianului român, cu recunoştinţă.

HARET a trăit aproape 62 de ani (Februarie 1851—Decembrie 1912). O viaţă închinată muncii necurmate.

A intrat ca student al Facultăţii de ştiinţe din Bucureşti, în toamna anului 1869, unde îşi cucereşte titlul de licenţiat în Fizico-Matematice. Trăind într'o epocă, în care studiile ştiinţifice în România, mai ales cele matematice, se făceau cu mare greutate, HARET a trebuit să facă sforţări personale uriaşe pentru a-şi putea asimila cunoştinţele necesare unui licenţiat în matematici. Iar mai târziu, ca student la Paris, unde şi-a dat seama de marile lipsuri de cultura matematică obţinută în ţară, el se vede obligat să-şi încordeze şi mai mult forţele pentru a ajunge la nivelul cerut de atmosfera de studiu dela „Sorbona". Şi izbuteşte. Nu numai că atinge potenţialul cultural al mediului, dar reuşeşte ca în decurs de trei ani să dea o lucrare matematică originală, care-l pune imediat în atenţia lumii ştiinţifice occidentale. Lucrarea îi este acceptată ca teză de doctorat şi astfel în ziua de 18/30 Ianuarie 1878, HARET obţine diploma de doctor în matematici, prima diplomă de acest fel obţinută de vreun Român.

Teza poartă titlul: „*Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires*", o chestiune de Mecanică cerească, de care sunt legate nume celebre: LAPLACE şi POISSON.

Ambii matematicieni francezi demonstrează invariabilitatea axelor mari în ipoteza că se neglijează în desvoltare, puteri superioare primei (LAPLACE) sau celei de a doua (POISSON) de ale masei planetare.

Lumea de specialitate se deprinsese de altfel cu ideea că axele rămân invariabile, oricât de departe am împinge aproximaţia.

In această atmosferă creată de autoritatea lui LAPLACE şi a lui POISSON, HARET arată că împingând aproximaţia mai departe şi ţinând seama de puterea a treia a masei, se găsesc termeni diferiţi de zero.

Rezultatul a produs senzaţie, cum era de aşteptat. S'a vorbit şi s'a scris mult în jurul acestei chestiuni care avea aerul să dea sistemului planetar o structură nestabilă. Au trebuit două decenii de cercetări care să culmineze în epocala lucrare de amsamblu a lui HENRI POINCARÉ „*Leçons de Mécanique céleste*" pentru a se putea da o explicaţie rezultatului obţinut de HARET.

Reîntors în ţară, HARET ocupă catedra de Mecanică dela Universitatea din Bucureşti, chiar în toamna anului 1878.

Treizeci şi trei de ani, cu întreruperile pe care i le impune în trei rânduri poziţia lui de Ministru al Instrucţiunii Publice, HARET îşi ţine frumoasele lui prelegeri, cu o punctualitate de care ar trebui mulţi să râvnească.

El îşi împărţise cursul în două: *Statica* şi *Cinematica* de o parte, *Dinamica* de alta. Prima parte constituia cursul anului al doilea de matematici, iar cea de a doua era destinată studenţilor de anul al treilea.

In timpul din urmă HARET cedase prima parte, unui conferenţiar, rezervându-şi numai lecţiunile din partea a doua. Aşa am apucat, ca student, cursul de Mecanică: se începea cu Dinamica punctului şi se continua apoi cu Dinamica sistemelor.

In anul în care i-am urmat lecţiunile, HARET a fost chemat a îndeplini pentru a treia oară, funcţiunea de Ministru al Instrucţiunii publice (Ministrul Educaţiei Naţionale şi al Cultelor spunem noi azi). In ziua de 13 Martie 1907, ziua în care trebuia să depună jurământul de titular al departamentului, în faţa Suveranului, HARET ne ţine ultima sa lecţie — clar, corect şi elegant, aşa cum ne deprinsesem noi să i le gustăm. La sfârşitul prelegerii ne cere scuze că nu va

mai putea continua lecţiunile şi că va veni în locul său un alt profesor. Peste o oră depunea jurământul de membru al Guvernului.

Aceasta a fost ultima sa lecţie la Universitate, pentrucă după căderea Guvernului din care făcea parte, în Decemvrie 1910, HARET se retrage definitiv din învăţământ, din motive de sănătate.

Ca Ministru al Instrucţiunii publice, HARET a făcut o reformă răsunătoare a învăţământului secundar. Pornind dela ideea unei economiii de energie şi a unei mai bune folosinţe a timpului pentru cultivarea însuşirilor individuale ale şcolarului, HARET îndrumează învăţământul pe calea unui început de specializare, chiar din clasa V-a de liceu, împărţind cursul superior în trei secţiuni: *clasică, modernă* şi *reală.*

Reforma lui HARET a fost combătută de unii reprezentanţi ai pedagogiei. Totuşi judecând-o după roadele ei — singurul criteriu valabil de judecată — ea se prezintă ca o reformă bună. Avântul, pe care l-au luat profesiunile cu caracter constructiv, cât şi cercetările ştiinţifice mai noui, se datoreşte în mare parte substratului de învăţământ pozitiv pe care l-au obţinut elevii secţiunii reale în liceele reformei lui HARET. Este drept că secţiunea clasică a atras mai puţin populaţia noastră şcolară, ceea ce a condus pe oamenii noştri de învăţământ să încline către o bifurcare, în loc de o trifurcare a liceului, începutul ei fiind mutat ceva mai târziu — în clasa a VII-a. Totuşi liceul român de azi nu a putut renunţa la ideea fecundă a reformei lui HARET, aşa în cât se poate spune că învăţământul nostru secundar îşi are temeiul în concepţia constructivă de acum patru decenii.

Gazeta Matematică şi-a văzut deodată coloanele năpădite de lucrările unui tineret de liceu, dornic să rezolve şi să creeze, mulţumită infiinţării secţiunii reale. Corespondenţii şi colaboratorii aceştia, care-şi vedeau numele tipărit la o vârstă când alţii au grija mingii şi a zmeului, au adus un val nou de impuls şi de energie de care s'a resimţit viaţă ţării. Căci ei au purtat cu ei pretutindeni şi în orice carieră au început, dragostea de muncă disciplinată, respectul adevărului şi pornirea spre creaţie concretă, metodică.

Gazeta Matematică şi reforma lui HARET au mers mână în mână, ajutându-se reciproc, pentru ca fiecare în parte să fie cât mai de folos ţării.

Iată de ce azi, când se cinsteşte cu omagii publice memoria „omului şcoalei", *Gazeta Matematică* prinde un prilej nimerit să-şi aducă aminte cu recunoştinţă de timpul de fecundă activitate şcolărească, întemeiată pe spiritul unei reforme de hotărîtoare valoare, atât pentru determinarea impulsului creator, cât şi pentru compoziţia spiritului cultural în genere din toată ţara noastră.

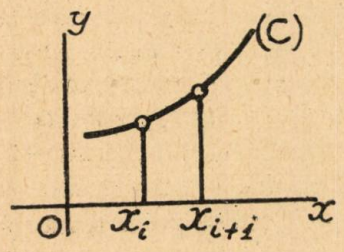
V. VÂLCOVICI.

O ANALOGIE

1. Să considerăm ecuaţia unei curbe scrisă sub forma

$$y \cdot f(x) + g(x) = C \tag{1}$$

în care C este o constantă. Dacă fixăm valoarea acestei constante (ceea ce vom presupune în cele ce urmează) atunci (1) defineşte o curbă.



Să luăm pe axa Ox un şir de puncte equidistante

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots$$

şi să considerăm şi y-urile corespunzătoare punctelor de pe curba C)):

$$y_0, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots$$

Să însemnăm valorile lui f şi g în punctele discrete x, astfel

$$f(x_k) = a_k$$
$$g(x_k) = b_k .$$

Atunci vom avea şirul de relaţii

$$(2) \quad \begin{cases} a_0 y_0 + b_0 = C \\ a_1 y_1 + b_1 = C. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k y_k + b_k = C \\ a_{k+1} y_{k+1} + b_{k+1} = C. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ca să eliminăm pe C putem introduce *diferențe* și scrie

$$(3)\quad \begin{cases} a_1(y_1-y_0)+(a_1-a_0)y_0+b_1-b_0=0 \\ a_2(y_2-y_1)+(a_2-a_1)y_1+b_2-b_1=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k+1}(y_{k+1}-y_k)+(a_{k+1}-a_k)y_k+b_{k+1}-b_k=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Iată un tablou de relații care ne dă, pe curba (C) un șir *discret* de puncte

$$(x_n, y_n).$$

Observând cu atenție tabloul (3) vedem că: una oarecare din relațiile (3) ne dă un punct (x_{k+1}, y_{k+1}) de pe curbă dacă punctul imediat precedent (x_k, y_k) este el însuși pe curbă.

Așa fiind, dacă punctul inițial, dela care plecăm în relațiile (3):

$$(x_0, y_0)$$

este pe curba noastră, atunci toate celelalte puncte (x_n, y_n) sunt și ele pe această curbă (C).

2. Prin analogie, să considerăm acum, în loc de un șir discret de puncte *pe o curbă*: un șir de propoziții matematice fiecare depinzând de un număr întreg (număr de *ordine*).

In loc de tabloul (3), care în esență cuprinde o aceeași relație sub forme diferite — să presupunem că dispunem de o demonstrație care să arate că: dacă propoziția P_n este adevărată, atunci adevărată este și propoziția următoare P_{n+1}.

In aceste condiții e destul să mai arătăm că prima propoziție, pe care o luăm ca inițială, e adevărată pentru ca să fim asigurați că toate propozițiile șirului nostru sunt adevărate.

Este metoda cunoscută de demonstrație prin inducție, sau recurență.

3. De ce, această metodă cunoscută, am pus-o în paralel cu un sistem de relații lineare care conduc la *ecuația diferențială lineară de ordinul întâi?*

Pentru a putea trage, din această analogie, folosul ce de obicei se trage din orice analogie bine aleasă.

In cazul nostru, iată cum:

Ecuaţia lineară de ordinul întâi aşa cum se prezintă ea (formă preparatorie) în tabloul (3) este de perfectă analogie (cum am văzut) cu metoda obişnuită de demonstraţie, prin recurenţă.

Dar, sunt şi ecuaţii diferenţiale lineare de ordinul *doi, trei,...* pe care le putem prezenta (forme preparatorii) prin tablouri analoage cu (3).

Dela aceste tablouri ce analogii putem stabili, în privinţa metodei de demonstraţie prin recurenţă?

E lesne de văzut.

La ecuaţiile diferenţiale lineare de ordinul *doi* (forma *discretă*): *două* puncte consecutive, luate pe curbă, hotărăsc de aşezarea tuturor celorlalte puncte următoare pe aceeaşi curbă...

In metoda demonstraţiei prin recurenţă aceasta înseamnă că: dacă dela adevărul lui P_{n-1} şi P_n trec la adevărul lui P_{n+1} atunci nu-mi rămâne decât să arăt individual pentru *două* propoziţii consecutive iniţiale adevărul ce ele exprimă.

In cazul clasic demonstraţia *directă* se făcea numai pentru o propoziţie iniţială.

Iată şi un exemplu pe care îl iau din excelenta cărticică R. JAVELOT, *Exercices d'Algèbre*, Paris, Vuibert 1929.

Exerciţiu. Să se arate că suma

$$S_n = x^n + y^n$$

poate să fie scrisă sub forma unui polinom întreg în $(x+y)$ şi xy

Am mai întâi identitatea

$$(x^n + y^n)(x+y) \equiv x^{n+1} + y^{n+1} + xy(x^{n-1} + y^{n-1})$$

adică

$$x^{n+1} + y^{n+1} \equiv (x^n + y^n)(x+y) - (x^{n-1} + y^{n-1})\, xy$$

ceea ce ne arată că dacă propoziţia în chestie e adevărată pentru S_{n-1} şi S_n ea e adevărată şi pentru S_{n+1}.

Aşa fiind considerăm *direct* pe S_3 şi S_2 şi vedem că

$$S_3 = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$S_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy.$$

Adică: adevărul pentru S_3 şi S_2 e individual stabilit.

Şi atunci, propoziţia generală exprimată prin exerciţiul din JAVELOT este complect stabilită.

4. Pentru a încheia şi pentru a da de lucru şi cititorului îi propunem:

Să caute exemple în care, prin analogie cu ecuaţiile diferenţiale de ordinul *trei,* trecerea adevărului să se facă dela trei propoziţii consecutive

$$P_n,\ P_{n+1},\ P_{n+2}$$

la a patra propoziţie consecutivă P_{n+3}, iar demonstraţia *directă* să fie necesară pentru primele trei propoziţii

$$P_0,\ P_1,\ P_2.$$

PROF. D. POMPEIU.

O GENERALIZARE A SUMELOR SINUSURILOR ŞI COSINUSURILOR ARCELOR IN PROGRESIE ARITMETICĂ

Ne propunem să calculăm sumele

$$(1)\quad S_1^m = \sin^m a + \sin^m (a+r) + \sin^m (a+2r) + \ldots + \sin^m [a+(n-1)r],$$

$$(2)\quad S_2^m = \cos^m a + \cos^m (a+r) + \cos^m (a+2r) + \ldots + \cos^m [a+(n-1)r].$$

Vom folosi relaţiile cunoscute (C. P. Trig. Cap. XXIV, 1)

$$(3)\quad S_1^1 = \sin a + \sin (a+r) + \ldots + \sin [a+(n-1)r] = \frac{\sin \frac{nr}{2} \sin \left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin \frac{r}{2}},$$

$$(4)\quad S_2^1 = \cos a + \cos (a+r) + \ldots + \cos [a+(n-1)r] = \frac{\sin \frac{nr}{2} \cos \left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin \frac{r}{2}}.$$

precum şi formulele (5), (6), (7) şi (8) din HÜTTE, ed. 25/1925, pag. 60, care sunt:

— pentru *m impar:*

$$(5)\quad \sin^m\alpha = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}}{2^{m-1}}\Big[\sin m\alpha - C_m^1 \sin(m-2)\alpha + C_m^2 \sin(m-4)\alpha - C_m^3 \sin(m-6)\alpha + \ldots \ldots + (-1)^{\frac{m-3}{2}} C_m^{\frac{m-3}{2}} \sin 3\alpha + (-1)^{\frac{m-1}{2}} C_m^{\frac{m-1}{2}} \sin\alpha\Big],$$

$$(6)\quad \cos^m\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\Big[\cos m\alpha + C_m^1 \cos(m-2)\alpha + C_m^2 \cos(m-4)\alpha + C_m^3 \cos(m-6)\alpha + \ldots \ldots + C_m^{\frac{m-3}{2}} \cos 3\alpha + C_m^{\frac{m-1}{2}} \cos\alpha\Big];$$

— pentru *m par:*

$$(7)\quad \sin^m\alpha = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^{m-1}}\Big[\cos m\alpha - C_m^1 \cos(m-2)\alpha + C_m^2 \cos(m-1)\alpha - \ldots + (-1)^{\frac{m-4}{2}} C_m^{\frac{m-4}{2}} \cos 4\alpha + (-1)^{\frac{m-2}{a}} C_m^{\frac{m-2}{2}} \cos 2\alpha\Big] + C_m^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^m},$$

$$(8)\quad \cos^m\alpha = \frac{1}{2^{m-1}}\Big[\cos m\alpha + C_m^1 \cos(m-2)\alpha + C_m^2 \cos(m-4)\alpha + \ldots + C_m^{\frac{m-4}{2}} \cos 4\alpha + C_m^{\frac{m-2}{2}} \cos 2\alpha\Big] + C_m^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^m}.$$

Ţinând seamă de relaţiile (5) şi (6), precum şi de valorile sumelor de forma relaţiilor (3) şi (4), pentru *m impar*, sumele (1) şi (2) devin:

$$(9)\quad S_1^m = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}}{2^{m-1}}\left\{\frac{\sin\frac{m-nr}{2}\sin m\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{mr}{2}} - \right.$$

$$- C_m^1 \frac{\sin\frac{(m-2)nr}{2}\sin(m-2)\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{(m-2)r}{2}} +$$

$$+ C_m^2 \frac{\sin\frac{(m-4)nr}{2}\sin(m-4)\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{(m-4)r}{2}} - \ldots$$

$$\left.\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} C_m^{\frac{m-1}{2}} \frac{\sin\frac{nr}{2}\sin\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{r}{2}}\right\},$$

$$(10)\quad S_2^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left\{\frac{\sin\frac{mnr}{2}\cos m\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{mr}{2}} + \right.$$

$$+ C_m^1 \frac{\sin\frac{(m-2)nr}{2}\cos(m-2)\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{(m-2)r}{2}} +$$

$$+ C_m^2 \frac{\sin\frac{(m-4)nr}{2}\cos(m-4)\left[a+(m-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{(m-4)r}{2}} + \ldots$$

$$\left.\ldots + C_m^{\frac{m-1}{2}} \frac{\sin\frac{nr}{2}\cos\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{r}{2}}\right\}.$$

La fel, ţinând seamă de relaţiile (7), (8) şi de valorile sumelor de forma (3) şi (4), pentru *m par*, sumele (1) şi (2) devin:

$$(11)\quad S_1^m = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}}\left\{\frac{\sin\frac{mnr}{2}\cos m\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{mr}{2}} - \right.$$

$$-C_m^1\frac{\sin\frac{(m-2)nr}{2}\cos(m-2)\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{(m-2)r}{2}}+$$

$$+C_m^2\frac{\sin\frac{(m-4)nr}{2}\cos(m-4)\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{(m-4)r}{2}}-\ldots$$

$$\left.\ldots(-1)^{\frac{m-2}{2}}C_m^{\frac{m-2}{2}}\frac{\sin nr\cos[2a+(n-1)r]}{\sin r}\right\}+C_m^2\frac{1}{2^m}n$$

$$(12)\quad S_2^m=\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left\{\frac{\sin\frac{mnr}{2}\cos m\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{mr}{2}}+\right.$$

$$+C_m^1\frac{\sin\frac{(m-2)nr}{2}\cos(m-2)\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{(m-2)r}{2}}+$$

$$C_m^2\frac{\sin\frac{(m-4)nr}{2}\cos(m-4)\left[a+(n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin\frac{(m-4)r}{2}}+\ldots$$

$$\left.\ldots+C_m^{\frac{m-2}{2}}\frac{\sin nr\cos[2a+(n-1)r]}{\sin r}\right\}+C_m^2\frac{1}{2^m}n.$$

Cunoscând aceste relații, calculul este foarte mult simplificat.

Exemple. Să se calculeze sumele

$$S_2^2 = \cos^2 a + \cos^2 (a+r) + \ldots + \cos^2 [a+(n-1)r]$$

$$S_1^4 = \sin^4 a + \sin^4 (a+r) + \ldots + \sin^4 [a+(n-1)r].$$

Ținând seamă de relațiile (12) și (11), obținem, făcând respectiv $m = 2$ și $m = 4$:

$$S_2^2 = \frac{\sin nr \cos [2a+(n-1)r]}{2\sin r} + \frac{n}{2};$$

și

$$S_1^4 = \frac{1}{2^3}\left\{ \frac{\sin 2nr \cos [4a+2(n-1)r]}{\sin 2r} - \frac{4\sin nr \cos [2a+(n-1)r]}{\sin r} \right\} + \frac{3n}{2^3};$$

sau

$$S_1^4 = \frac{\sin nr\{\cos nr \cos 2[2a+(n-1)r] - 4\cos r \cos [2a+(n-1)r]\}}{4\sin 2r} + \frac{3n}{2^3}.$$

Aplicație: Să luăm $a = 0$, $r = 30^0$, $n = 4$, avem

$$S_2^2 = 2 \quad \text{și} \quad S_1^4 = \frac{13}{8}.$$

ADRIAN I. POPESCU.

ECUAȚII PSEUDO-RECIPROCE

In „*Gazeta Matematică*“ vol. XLV, pag. 565, în articolul „*Contribuțiuni la rezolvarea ecuațiilor de gradul al patrulea*“, am definit în mod tangențial, ecuațiile pseudo-reciproce de gradul al patrulea și anume:

(1) $$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bax + Aa^2 = 0$$

care scriindu-se

$$A\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) + B\left(x + \frac{a}{x}\right) + C = 0$$

prin substituția

(2) $$y = x + \frac{a}{x} \qquad \therefore \quad y^2 - 2a = x^2 + \frac{a^2}{x^2}$$

se reduc la forma:

(3) $$Ay^2 + By + C - 2Aa = 0.$$

Rezolvând ecuaţia (3) şi apoi ecuaţia (2), scrisă sub forma:

$$x^2 - yx + a = 0$$

se găsesc cele patru rădăcini ale ecuaţiei (1).

In mod analog se pot defini şi ecuaţiile pseudo-reciproce de gradul $2n$.

O ecuaţie de gradul $2n$

$$(4) \quad A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + \ldots + A_{2n-1} x + A_{2n} = 0$$

se zice pseudo-reciprocă, dacă între coeficienţii ei există relaţiunea

$$(5) \quad A_{2n-i} = A_i a^{n-i} \quad , \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Ecuaţia (4) este deci:

$$(6) \quad A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + \ldots + A_{n-1} x^{n+1} +$$

$$+ A_n x^n + A_{n-1} a x^{n-1} + \ldots + A_1 a^{n-1} x + A_0 a^n = 0$$

$$\therefore A_0\left(x^n + \frac{a_n}{x_n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{a^{n-1}}{x^{n-1}}\right) + \ldots + A_{n-1}\left(x + \frac{a}{x}\right) + A_n = 0.$$

Se observă deci că prin substituţia (2) şi după ce s'au calculat polinoamele $P_m(y)$

$$(7) \quad P_m(y) = x^m + \frac{a_m}{x_m} \quad , \quad (m = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

se ajunge la ecuaţia de gradul n:

$$(8) \quad a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Dacă ecuaţia (8) este rezolvabilă, cum este cazul pentru $n \leqslant 4$ (sau chiar pentru $n \geqslant 5$, în anumite cazuri particulare), va fi rezolvabilă şi ecuaţia pseudo-reciprocă (6), de gradul $2n$.

Rămâne să se calculeze polinoamele $P_m(y)$. Aplicând calea urmată de D-l ŞT. MUSTA în articolul „*Asupra unor polinoame*“, publicat în „*Gazeta Matematică*“ vol. XXXIV, pag. 245, urmează să se determine o funcţiune generatoare $Z(\alpha, y)$ a acestor polinoame. Pentru aceasta, se va înmulţi egalitatea (7) cu α^m, se va face $m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ şi însumându-se, se va găsi:

$$(9) \quad Z(\alpha, y) = \sum_0^\infty \alpha^m P_m(y) = \sum_0^\infty \alpha^m x^m + \sum_0^\infty \alpha^m \frac{a^m}{x^m}.$$

Presupunând $|\alpha x| < 1$, $\left|\frac{\alpha a}{x}\right| < 1$, α fiind arbitrar, după însumare se va găsi:

$$\sum_0^\infty \alpha^m P_m(y) = \frac{1}{1-\alpha x} + \frac{1}{1-\frac{\alpha a}{x}}.$$

Luând în considerare substituția (2), se va obține:

$$Z(\alpha, y) = \sum_0^\infty \alpha^m P_m(y) = \frac{2-\alpha y}{1-\alpha(y-\alpha a)}.$$

Urmărind numai calcularea polinoamelor $P_m(y)$, se va putea lua un α, astfel ca $|\alpha(y-\alpha a)| < 1$, permițându-se astfel desvoltarea în serie:

$$\frac{2-\alpha y}{1-\alpha(y-\alpha a)} = (2-\alpha y)[1+\alpha(y-\alpha a)+\alpha^2(y-\alpha a)^2+\ldots+\alpha^m(y-\alpha a)^m+\ldots].$$

Coeficienții lui α^m, $(m = 1, 2, \ldots, n)$ vor fi tocmai polinoamele $P_m(y)$. Coeficienții lui α^m și α^{m-1} respectiv sunt:

$$y^m - C^1_{m-1} a y^{m-2} + C^2_{m-2} a^2 y^{m-4} \ldots$$
$$y^{m-1} - C^1_{m-2} a y^{m-3} + C^2_{m-3} a^2 y^{m-5} \ldots$$

Făcând produsul cu factorul $(2-\alpha y)$, se va găsi factorul lui α^m, adică:

$$P_m(y) = y^m - (2C^1_{m-1} - C^1_{m-2}) a y^{m-2} + (2C^2_{m-2} - C^2_{m-3}) a^2 y^{m-4} \ldots$$

$$(10) \quad \therefore \quad P_m(y) = y_m - m a y^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2!} a^2 y^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{3!} a^3 y^{m-1} \ldots$$

Relația (10) dă forma polinoamelor $P_1, P_2, \ldots P_n$, cerute de (7).

Observări: 1°. Ecuații pseudo-reciproce de grade fără soț nu există, în forma concepută pentru cele de grade cu soț.

2°. Ecuația (6) pentru $a = 1$, se transformă într'o ecuație reciprocă de grad superior. Deci clasa ecuațiilor pseudo-reciproce este o generalizare a ecuațiilor reciproce de grade cu soț.

Notă. Ideea de a cerceta ecuațiile pseudo-reciproce de grade superioare, analoage celor de gradul al patrulea, mi-a fost sugerată de D-l G-l Gh. Buicliu, după ce am publicat articolul citat din „*Gazeta Matematică*“ vol. XLV.

I. V. Mătieș.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“

După cum s'a anunţat la pag. 59 în numărul de Octombrie 1942 al revistei noastre, anul acesta se va ţine după sărbătorile *Sfintelor Paşti*, concursul obişnuit al societăţii *Gazeta Matematică*.

Din 48 de candidaţi, care au înaintat cereri în termen, următorii au fost admişi a lua parte la concurs:

Clasa IV-a: *Chiran Paul, Dumitrescu F. Sorin, Seni G. Dinu, Vlad N. Mircea.*

Clasa V-a: *Bârzescu I. Vasile, Ciumaşu Viorel, Nache D. Dumitru, Volanschi A. Dan, Vrânceanu G. Gheorghe.*

Clasa VI-a: *Cârstea D. Marin, Cârstoiu G. Nicolae, Columbeanu D. Petre, Ghiţă M. Vasile, Ieşan St. Alexandru, Mihăileanu I. Ştefan, Oprea D. Nifon, Pavica A. Victor, Pitiş L. Nicolae, Popa A. Nicolae, Roşu Tr. Nicolae.*

Clasa VII-a: *Andrei G. Aurel, Dumitrescu F. Dan, Enăchescu Ioan, Iliescu C. Constantin, Păläceanu D. Vasile, Turculeţ D. Tiberiu, Vasiliu G. Dumitru.*

Clasa VIII-a: *Căruntu D. Florin, Constantinescu I. Emil, Cubat Aurel, Donţu G. Gheorghe, Ionescu F. Petre, Oprea D. Gheorghe, Popescu G. Marin, Puchiu T. Gheorghe.*

Nu s'a înscris niciun candidat din anul I al Politechnicei din Bucureşti.

Au fost admişi la concurs 35 candidaţi şi anume 4 pentru clasa IV-a, 5 pentru clasa V-a, 11 pentru clasa VI-a, 7 pentru clasa VII-a, şi 8 pentru clasa VIII-a.

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris.

Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima lucrare scrisă se va da Joi 29 Aprilie 1943 dela ora 8^{30} până la ora 11^{30}; iar a doua lucrare scrisă în aceeaşi zi dela ora 15 la ora 18, la *Politechnică, Calea Griviţei 132, Bucureşti.*

Oralul va începe Vineri 30 Aprilie 1943, tot în localul Politechnicei.

Candidaţilor elevi de liceu admişi la concurs şi care nu dispun de mijloace pentru venirea la Bucureşti sau întreţinerea în Bucureşti pe timpul concursului (după cum au arătat în cererile

de înscriere), li se vor trimete în timpul vacanței de Paști mijloacele necesare transportului și întreținerii pe tot timpul concursului.

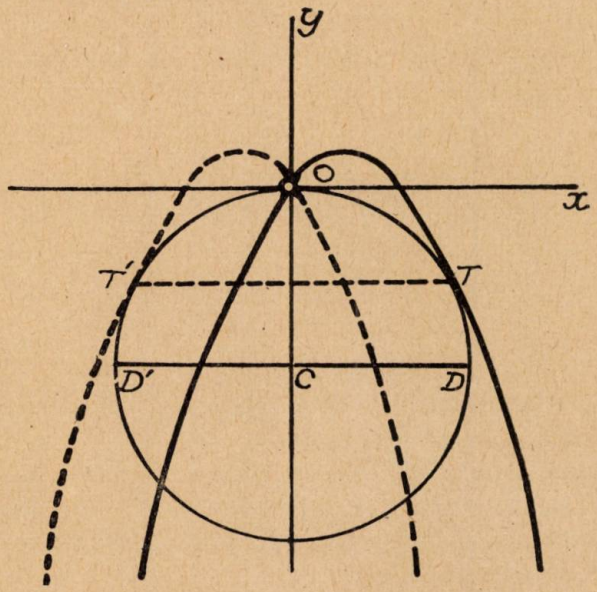
Eventualele modificări vor fi comunicate la timp.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

NOTE MATEMATICE

27. *Rectificarea soluției problemei 5628.* Soluția dată acestei probleme, la pag. 181 din volumul de față, este greșită din cauză că s'a neglijat în demonstrație o proprietate esențială a parabolei, anume proprietatea *că parabola nu are tangentă paralelă cu axa decât în punctele ei dela infinit.*

Problema 5628 *cere să se determine viteza minimă a unui proiectil aruncat din punctul cel mai de sus al unei emisfere așa încât emisfera să nu fie atinsă.*



Este evident vorba de o aplicațiune a traiectoriei balistice în vid, căci în aer traiectoria proiectilului neavând o ecuație bine determinată, problema teoretică se rezolvă cu aproximații, iar cea practică, prin reguli de tragere specifice regulamentelor și teoriei tragerilor de artilerie.

Dacă DD' este diametrul emisferei de centru C, iar O punctul său cel mai de sus, în soluţia dela pag. 181 s'a considerat că traiectoria limită este parabola de ax paralel cu OC, deci o parabolă verticală, care trece prin D.

Aceasta înseamnă că cercul şi parabola au în D o tangentă comună, deci o tangentă paralelă cu axa parabolei la o depărtare finită, ceea ce *nu se poate.*

Problema trebuie atacată pe altă cale. Să o transpunem pe plan geometric şi să o enunţăm astfel: *Să se construiască o parabolă trecând prin* O *ştiind că are axa paralelă cu* OC *şi este tangentă cercului* C.

Luăm ca axe tangenta în O la cerc şi direcţia diametrului CO. Vom avea două parabole răspunzând problemei, una cu vârful în cadranul I şi alta simetrica primei faţă de CO.

Ecuaţia unei parabole cu axul paralel cu CO şi cu vârful în cadranul I este

$$(1) \qquad y = -ax^2 + bx$$

unde a şi b sunt de aceleaşi semne. In aceleaşi axe, ecuaţia cercului C este

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + 2Ry = 0.$$

Intersecţiile parabolei (1) şi a cercului (2) se găsesc rezolvînd sistemul (1), (2). Eliminând pe y între aceste 2 ecuaţii găsim că abscisele punctelor de intersecţie sunt date de: $x = 0$, care corespunde lui O şi de

$$(3) \qquad x^3 - \frac{2b}{a}x^2 + \frac{1 + b^2 - 2aR}{a^2}x + \frac{2bR}{a^2} = 0.$$

Pentru ca parabola să fie tangentă cercului trebuie ca ecuaţia (3) să aibă o *rădăcină dublă.*

De aici înainte suntem în câmpul algebrei, în faţa unei probleme ale cărei metode de rezolvare sunt cunoscute. Totuşi voi duce calculele mai departe pentru a stabili şi valoarea aplicativă practică a problemei. Notăm

$$m = -\frac{2b}{a} \quad ; \quad n = \frac{1 + b^2 - 2aR}{a^2} \quad ; \quad l = \frac{2bR}{a^2}$$

ecuaţia (3) devine

$$(4) \qquad x^3 + mx^2 + nx + l = 0$$

pe care o transformăm prin substituţia

$$x = z - \frac{m}{3} \tag{5}$$

în ecuaţia clasică fără termen de gradul II:

$$z^3 + \frac{3n - m^2}{3} z + \frac{2m^3 - 9mn + 27l}{27} = 0 \tag{6}$$

care are rădăcini duble, dacă

$$4(3n - m^2)^3 + (2m^3 - 9mn + 27l)^2 = 0. \tag{7}$$

Se ştie că în acest caz ecuaţia (6) are toate rădăcinile reale. Prin urmare dacă înlocuim în (7) pe m, n, l prin valorile lor găsim condiţia *necesară şi suficentă* ca ecuaţia (3) să aibă o rădăcină dublă, deci condiţia *necesară şi suficientă* ca parabola (1) să fie tangentă cercului (2). Această condiţie o scriem în următoarele feluri, după cum ordonăm după puterile lui a, b sau R:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} 24R^3a^3 + 4R^2(13b^2 - 9)a^2 + 2R(16b^4 + b^2 + 9)a \\ \qquad - (8b^6 + 19b^4 - 14b^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

$$(\beta) \quad \begin{cases} 8b^6 + (19 - 32aR)b^4 + 2(7 - aR - 26a^2R^2)b^2 \\ \qquad + (3 - 18aR + 36a^2R^2 - 24a^3R^3) = 0. \end{cases}$$

Problema se reduce acum la a discuta ecuaţia (α) în a, în R sau în aR sau a discuta ecuaţia (β) în b.

In cazul problemei 5628 parabola (1) este

$$y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\varphi} x^2 + x\,\mathrm{tg}\varphi.$$

Se înlocuieşte în (α) a prin $\frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}$ şi b prin $\mathrm{tg}\varphi$ şi se obţine o ecuaţie de gradul al şaselea în v a cărei rezolvare nu este în general posibilă din cauza valorilor parametrice R şi φ.

Ecuaţia (α) arată că pentru valori numerice date lui R şi b se pot avea *una* sau *trei parabole* care trec prin O şi sunt tangente cercului C, deci când se înlocuieşte a în funcţie de v se pot găsi mai multe valori v la un φ dat şi pentru a fi în spiritul problemei 5628, se va alege cea mai mică din aceste valori v.

La fel ecuaţia (β) arată că la un a şi un R date, se pot avea până la 6 valori pentru b, deci pot exista până la 6 parabole trecând prin O şi tangente cercului C.

Din punct de vedere practic artileristic, problema are sens şi se întâlneşte în realitate pe câmpul de luptă înlocuind emisfera prin o formă de pământ ca o movilă (de dimensiuni destul de mari), un deal sau eventual chiar un munte. Rezolvarea în acest caz se face cu ajutorul unor reguli speciale de trageri, cu ajutorul aparatelor de ochire şi cu ajutorul tablelor de tragere, mijloace care ies din cadrul preocupărilor revistei noastre.

G-L GH. BUICLIU.

28. *Numărul termenilor egalităţilor multigrade.* Reamintim că se numeşte egalitate multigradă, un sistem diofantian de forma

$$\sum_{i=1}^{i=p} a_q^i = \sum_{i=1}^{i=p} b_i^q, \ldots \qquad (q = r_1, r_2, \ldots r_n).$$

Dacă $r_1, r_2, \ldots r_n$ reprezintă primele n numere întregi, avem o egalitate multigradă adevărată la primele n grade. Pentru ca o astfel de egalitate să fie posibilă înafară de cazul banal când a_i nu sunt decât permutările lui b_i, trebuie ca p să fie cel puţin egal cu $n+1$ [1]). In acest caz numim egalitatea multigradă o *egalitate multigradă normală.*

Pentru $n \leqslant 3$, se cunoaşte soluţia complectă. Pentru $4 \leqslant n \leqslant 7$, avem soluţii parametrice. Problema existenţei *egalităţilor multigrade normale*, pentru o valoare oarecare a lui n, n'a fost încă rezolvată. Eforturile rezolvitorilor acestei probleme s'au limitat la a reduce numărul termenilor. Eu am publicat rezultatele obţinute până în 1939, în o notă în revista *Sphinx* [2]). De atunci încoace D-l AD. LETAC şi eu însumi, am obţinut unele rezultate pe care le semnalăm atenţiei lectorilor.

Pentru $n = 8$, sunt două exempte numerice ale unei *egalităţi octograde normale* [3]). Pentru $n = 9$ sunt o infinitate de exemple

---

1) *Sphinx.* 1939, pp. 14—15. A. GLODEN. Sur les égalités multigrades.

2) *Sphinx.* 1939, pp. 85—86. A. GLODEN. Une mise au point.

3) *Revista Matematică din Timişoara.* Vol. XXI, pp. 38—39. A. GLODEN. Quelques égalités multigrades remarquables.

de *egalități nonagrade normale*. Aceasta este actualmente valoarea cea mai mare a lui n, pentru care o soluție normală este cunoscută.

Se cunoaște o multigradă de 9 termeni în total, 4 în un membru și 5 în celălalt membru, adevărate la gradele 1, 3, 5, 7 și o alta decâte 5 termeni în fiecare membru, adevărată la gradele 2, 4, 6, 8.

Pentru cei ce urmăresc evoluția egalităților multigrade, cred că aceste date de ordin general sunt interesante.

A. GLODEN.

29. *Generalizarea problemei 5526*[1]). Să considerăm ecuația diferențială:

$$xy'y''' + pxy''^2 + qy'y'' = 0$$

care generalizează pe cea propusă în problema 5526.

Impărțim cu produsul $xy'y''$ și căpătăm:

$$\frac{y'''}{y''} + p\frac{y''}{y'} + q\frac{1}{x} = 0$$

care integrată ne dă

$$\log y'' + p\log y' + q\log x = \log C$$

$$\therefore \quad y''y'^p x^q = C$$

Inlocuind pe $y'' = \frac{dy'}{dx}$, relația de mai sus se scrie:

$$(1) \qquad y'^p\, dy' = Cx^{-q}\, dx$$

care se integrează imediat și ne dă

$$\frac{1}{p+1} y'^{p+1} = \frac{C}{-q+1} x^{-q+1} + C_1$$

$$\therefore \quad y'^{p+1} = C\frac{p+1}{-q+1} x^{-q+1} + C_1(p+1) = ax^{-q+1} + b$$

$$\therefore \quad y'' = (ax^{-q+1} + b)^{\frac{1}{p+1}}$$

din care se obține integrala generală:

$$(2) \qquad y = \int (ax^{-q+1} + b)^{\frac{1}{p+1}} dx + C.$$

1) Rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLVII, pag. 197.

Conform teoriei integrării diferențialelor binome, integrala din partea a doua se va putea efectua în următoarele cazuri:

a) $\dfrac{1}{p+1} = k$ (întreg), deci p trebuie să fie de forma $p = \dfrac{1-k}{k}$

b) $\dfrac{1}{-q+1} = k'$ (întreg), deci $q = \dfrac{k'-1}{k}$

c) $\dfrac{1}{-q+1} + \dfrac{1}{p+1} = k''$ (întreg).

Ecuația propusă ($p = -3$; $q = 3$) se încadrează în categoria (C).

* * *

In cele ce s'au spus mai sus nu sunt cuprinse trei cazuri, după cum se poate urmări pe ecuația (1).

1°. *Cazul* $p = -1$, $q \neq 1$. Ecuația (1) devine:

$$\frac{dy'}{y'} = Cx^{-q}\,dx \quad \therefore \quad \log y' = \frac{C}{-q+1}\,x^{-q+1} + C_1 = ax^{-q+1} + b.$$

Deducem:

$$y' = e^{ax^{-q+1}+b} \text{ și integrala generală: } y = \int e^{ax^{-q+1}+b}\,dx + C.$$

2°. *Cazul* $p \neq -1$, $q = 1$. Ecuația (1) devine:

$$y'^p\,dy' = C\frac{dx}{x} \quad \therefore \quad \frac{1}{p+1}\,y'^{p+1} = C\log x + \log C_1$$

sau

$$y'^{p+1} = (p+1)\log C_1 x^c = \log C_1^{p+1} x^{c(p+1)} = \log ax^b$$

$$\therefore \quad y' = [\log ax^b]^{\frac{1}{p+1}}$$

care dă integrala generală:

$$y = \int [\log ax^b]^{\frac{1}{p+1}}\,dx + C.$$

3°. *Cazul* $p = -1$, $q = 1$. Ecuaţia (1) devine:

$$\frac{dy'}{y'} = C\frac{dx}{x} \quad \therefore \quad \log y' = C\log x + \log C_1 = \log C_1 x^c$$

sau

$$y' = C_1 x^c \quad \therefore \quad y = \frac{C_1}{C+1} x^{c+1} + C_2 = ax^b + C.$$

GH. D. SIMIONESCU.

30. *Asupra problemei 5285.* Soluţia acestei probleme s'a publicat în G. M., Vol. XLVI, pag. 103 şi 157, iar în G. M., Vol. XLVII, pag. 130 s'a publicat o notă în care se dădea o construcţie simplă a centrului de curbură al unei cardioide. In nota de faţă voi arăta cum am ajuns la propunerea problemei 5285 şi voi da o nouă construcţie a centrului de curbură la o cardioidă.

Fie $\overline{pr}$ o coardă trecând prin focarul O al unei parabole π. Notăm cu n mijlocul lui $\overline{pr}$ şi cu m punctul de tangenţă al tangentei tt' paralelă cu $\overline{pr}$. Avem

$$\overline{pr} = 4\overline{Om} \quad \text{sau} \quad \overline{Op} + \overline{Or} = 4\overline{Om}.$$

Locul lui n este o parabolă π' cu vârful în O. Inversa parabolei π, polul de inversiune fiind O este o cardioidă având pe O ca punct de întoarcere. Dacă M, N, P, R sunt inversele punctelor m, n, p, r atunci $\overline{mn}$ este antiparalelă cu MN în unghiul MON şi avem:

$$\sphericalangle OMN = \sphericalangle mnO = \sphericalangle (mn, tt') = \sphericalangle (tt', mO) = \sphericalangle NOM.$$

Deci MN este tangentă la cardioidă şi

$$\overline{ON} = \overline{NM}.$$

Aceasta devine relaţia din problema 5285, iar locul lui N este transformata prin inversiune a parabolei π', transformată care este o cisoidă.

Centrul de curbură C al parabolei se obţine prelungind raza Om cu o lungime $\overline{Ob} = \overline{Om}$ şi luând intersecţia C a perpendicularei în b pe Om cu normala în m.

Centrul de curbură C_1 al cardioidei se va găsi luând intersecţia normalei în M la ea cu CO. Fie B proiecţia lui C_1 pe OM.

Triunghiurile OBC_1, ObC sunt asemeni. La fel sunt asemeni şi triunghiurile dreptunghice MBC_1 şi mbC pentrucă au unghiurile din C_1 şi C egale, având laturile perpendiculare.

Din aceste asemănări se scoate

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{bC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{Ob}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{bm}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{OB}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{Ob}}{\overline{mb}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \overline{OB} = \frac{\overline{BM}}{2} = \frac{\overline{OM}}{3}$$

rezultat obţinut în nota 10 dela pag. 130, Vol. XLVII.

RĂDUCAN GEORGESCU.

31. *Asupra exerciţiului 1 G. M., XLVII.* O soluţie elementară simplă a acestui exerciţiu este şi următoarea. Fie D proiecţia lui B pe perpendiculara în C pe AM. Figura BMCD este evident un dreptunghiu, aşa că ţinând seamă şi de celelalte elemente ale problemei, avem

$$\overline{BD} = \overline{MC} = \overline{MO} = \overline{OB}.$$

Deci $\overline{CD}$ este tangentă în D cercului de centru B şi rază BO.

P. P. DRĂGHICESCU.

32. *Asupra unei probleme de distribuţia numerelor prime.* In *„Nouvelles Annalles“ :* 1075 se arată că:

„Numărul de numere prime cuprins între N *şi* 2N *este mai mic decât numărul de numere prime cuprins între* 1 *şi* N“.

Pentru numerele până la *10.000* am verificat aceasta cu ocazia soluţiei problemei: *3456* din *Gazeta Matematică*, XLV: 563.

Voi căuta să dau şi o demonstraţie.

Numărul numerelor prime din intervalul de numere consecutive dela A la B este:

$$I_{A \to B}\left[2.3.5.7\ldots(\sqrt{B})\right]$$

unde $I_{\to y}(N)$ înseamnă numărul numerelor prime cu N din intervalul de numere dela x la y, iar $(\sqrt{B})$ înseamnă numărul prim imediat inferior lui $\sqrt{B}$.

Rezultă dar că trebuie să avem:

$$I_{N \to 2N}[2.3.5.7\ldots[\sqrt{2N})] < I_{1 \to N}[2.3.5.7\ldots(\sqrt{N})].$$

Dar știm însă că, în general, avem:

$$I_{A \to B}(N) = I_{2B}(N) - I_A(N)$$

și

$$I_{2B}(N) = 2 . I_B(N) - \varepsilon$$

unde $\varepsilon = 1$ dacă N este prim cu B sau $\varepsilon = 0$ în caz contrar.

Prin urmare:

$$I_{A \to 2A}(N) \leqslant I_{1 \to A}(N).$$

Cu atât mai mult vom avea:

$$I_{A \to 2A}(kN) < I_{1 \to A}(N)$$

unde $k > 1$.

COMANDOR I. LINTEȘ.

33. *Asupra problemei 4834.* Rezolvată în G. M., Anul XLIV, pag. 209. 1. O generalizare:

Fie A′ un punct oarecare pe latura BC a triunghiului ABC, iar A″ conjugatul său armonic față de segmentul $\overline{BC}$.

Prin A′ se duc două drepte arbitrare Δ și Δ′. Dreapta Δ taie pe AB în M și pe AC în N, iar dreapta Δ′ taie pe AB în P și pe AC în Q. A″P taie pe AC în P′, iar A″N taie pe AB în N′. *Dreptele* BC, MQ, N′P′ sunt concurente.

Intr'adevăr diviziunile (ABMN′) și (ACQP′) sunt armonice, după cum se poate constata ușor. Având punctul A comun, dreptele BC, NQ, N′P′ care unesc celelalte puncte omoloage sunt concurente într'un punct E.

Dacă A′ este mijlocul segmentului $\overline{BC}$, A″ este la infinit pe BC, iar $NN' \parallel PP' \parallel BC$, adică obținem tocmai problema 4834.

2. Dacă A″M taie pe AC în M′ iar A″Q taie pe AB în Q′, evident dreptele BC, M′Q′, NP sunt concurente într'un punct F.

Să arătăm că punctele E și F sunt conjugate armonic față de segmentul $\overline{A'A''}$.

Intradevăr, notând:

$$G \equiv (AA'', NP) \quad , \quad H \equiv (AA'', N'P') \quad , \quad I \equiv (NP, N'P'),$$

evident că punctul I se află pe AA' polara lui A'' față de unghiul BAC, iar fascicolul (I.AA''HG), conform teoremei lui PAPPUS, este armonic, adică determină pe secanta BC diviziunea armonică (A'A''EF).

In cazul problemei 4834 punctele E și F sunt două puncte izotomice față de segmentul $\overline{BC}$.

P. P. DRĂGHICESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREȘTI

Facultățile: Construcții, Electromecanică, Mine și Metalurgie

Examenul de admitere în anul I. Octombrie 1942

Algebra. Se consideră sistemul format de ecuațiile:

$$(p+1)x + py = A$$

$$(p^2-1)x + p^2y = B$$

în care p, A și B sunt parametri. Se cere:

1°. Să se rezolve sistemul.

2°. Presupunând că A și B nu depind de p, să se elimine p între cele două ecuații.

3°. Să se reprezinte grafic rezultatul eliminării pentru

$$A = 2 \quad , \quad B = -1.$$

4°. Presupunând

$$A = p^2 - 1 \quad \text{și} \quad B = p^3$$

să se determine cu 2 zecimale exacte valoarea pozitivă a lui p, astfel ca rădăcinile sistemului dat să fie egale.

Geometria. Se înscrie într'un cerc (O) un triunghiu ABC.

1°. Să se determine pe arcul BC, care nu conține pe A, un punct A' astfel încât luând intersecțiile A_b, A_c ale tangentei în A' la cercul (O) cu laturile AB și AC, triunghiul $A\,A_b\,A_c$ să fie isoscel cu vârful în A.

2°. Se consideră analog punctele B' și C' și triunghiurile isoscele $B\,B_a\,B_c$, $C\,C_a\,C_b$, obținute prin permutarea circulară a literelor A, B, C. Să se calculeze unghiurile triunghiului A'B'C' în funcție de unghiurile triunghiului ABC.

3°. Să se calculeze unghiurile triunghiului A″B″C″, format de intersecţiile dreptelor $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$.

4°. Punctele B, C fiind fixe, iar A mobil pe cercul (O), să se găsească locul punctului A″.

Trigonometria. Un observator terestru O, urmărind un avion ce zboară constant la o înălţime h, observă că acesta este atins de un proiectil în momentul când se află în A şi AO face unghiul α cu verticala; ulterior, observă că avionul mai străbate o distanţă orizontală AB şi se prăbuşeşte din B, când OB face unghiul β cu verticala.

1°. Să se determine lungimea AB.

2°. Să se facă formula găsită la 1°, calculabilă prin logaritmi.

3°. Să se calculeze numeric lungimea AB pentru:

$$h = 5000\text{ m} \quad ; \quad \alpha = 44°27'30'' \quad ; \quad \beta = 59°14'10''.$$

4°. Să se rezolve problema pentru cazul când avionul după lovire pierde din înălţime, iar dreapta AB este oblică înclinată cu 45° pe orizontală.

Avionul şi observatorul se vor considera puncte geometrice situate în acelaşi plan vertical, iar terenul orizontal.

Geometria descriptivă. Se dau punctele A (în epură distanţa liniei de ordine la marginea din stânga a cadrului = 60, depărtarea = 60, cota = 40) şi B (idem 120, 40, 80) şi se cere:

1°. Să se determine pe linia de pământ un punct C astfel ca triunghiul CAB să fie isoscel (CA = CB).

2°. Să se găsească urmele $P\alpha P'$ ale planului ABC, prin construcţii care nu ies din cadrul epurei.

3°. Să se determine dreapta de intersecţie (δ, δ') a planului $P\alpha P'$ cu planul bisector al unghiului diedru format de planele de proiecţie.

Cadrul 180/240; linia de pământ paralelă cu dimensiunea cea mică împarte cadrul în două părţi egale. Datele în mm. Pe o foaie separată se va da o scurtă explicaţie a construcţiilor şi justificarea lor.

(Durata 2 ore, pentru fiecare materie).

BIBLIOGRAFIE

Mathesis. Tome LIV, Nr. 10, Decembrie 1942. R. GOORMAGHTIGH: Asupra unei învelitori. A. CLAEYS: Asupra câtorva determinanţi trigonometrici. F. BACKES: Asupra dreptei lui SIMSON. R. BALLIEU: Asupra desvoltării iraţionalelor cuadratice în funcţii continui regulate. R. DEAUX: Asupra involuţiilor armonice la o omografie binară.

Revista Matematică din Timişoara. CPT. C. V. COSTĂCHESCU: Câteva contribuţii la problema lansării.

C-DOR I. LINTEŞ: Avionul privit ca armă de război.

Culegere de Probleme de Mecanică întocmită de D-l PROFESOR ING. A. G. IOACHIMESCU, *revăzută şi adăogită de D-ra* GABRIELA ŢIŢEICA, *lucrare editată sub îngrijirea Soc. „Gazeta Matematică".*

Aşteptată de multă vreme, cu mare nerăbdare, atât de noile generaţii de elevi ai liceelor şi ai Şcoalelor Speciale, precum şi de inginerii, foşti elevi ai D-lui PROFESOR A. G. IOACHIMESCU, ediţia II-a a *Culegerii de Probleme de Mecanică* apare astăzi, în momentul în care studiul Mecanicei a ajuns a fi o necesitate de primul ordin, atât pentru desvoltarea tehnică şi industrială a ţării noastre cât şi pentru apărarea noastră naţională.

Culegerea cuprinde următoarele capitole:

Cap. I. Compunerea şi descompunerea forţelor concurente în plan.
Cap. II. Compunerea şi descompunerea forţelor în spaţiu.
Cap. III. Echilibrul unui punct material.
Cap. IV. Momente.
Cap. V. Compunerea şi descompunerea forţelor paralele.
Cap. VI. Cuple.
Cap. VII. Centre de greutate, determinarea lor.
Cap. VIII. Centre de greutate, aplicări şi proprietăţi diverse, teorema lui GULDIN.
Cap. IX. Reducerea forţelor aplicate unui solid indeformabil.
Cap. X. Echilibrul unui solid indeformabil.
Cap. XI. Echlibrul unui sistem de solide indeformabile.
Cap. XII. Grinzi cu zăbrele.
Cap. XIII. Maşini simple.
Cap. XIV. Planul înclinat, echilibrul cu frecare.
Cap. XV. Mişcarea uniformă a unui punct.
Cap. XVI. Mişcarea variată a unui punct.
Cap. XVII. Mişcarea unui corp solid.
Cap. XVIII. Mişcarea relativă, compuneri de mişcări.
Cap. XIX. Mecanisme, transmiteri şi transformări de mişcări.
Cap. XX. Principiile dinamicei: forţă, masă, acceleraţie, unităţi, omogeneitate.
Cap. XXI. Mişcarea de translaţie a unui corp greu.
Cap. XXII. Lucru mecanic.
Cap. XXIII. Energie cinetică.

Menţionăm că faţă de ediţia I-a s'a introdus capitolul corespunzător *Grinzilor cu zăbrele*, capitol de primă importanţă în cunoştinţele tehnice ale unui inginer.

Numărul de probleme s'a mărit dela 499 la 508 iar numărul de figuri dela 14 la 143.

Lucrarea este prin cuprinsul ei destinată atât *elevilor de liceu* cât şi *elevilor Şcoalelor Speciale* în general şi a *Şcoalelor Politechnice* în particular, pentru aceasta din urmă mai ales referitor la chestiunile de *Statică*.

Problemele au fost alese cu grija şi înaltul spirit pedagogic pe care D-l PROFESOR A. G. IOACHIMESCU l-a arătat în formarea a zeci de serii de ingineri, ce au rămas de atunci mândri de a fi fost elevii săi.

Este în rezumat o lucrare ce nu trebuie să lipsească nici din biblioteca profesorilor şi a inginerilor şi nici dintre cărţile de studii ale fiecărui tânăr elev de liceu sau de Şcoală Specială, ce iubeşte tehnica şi minunatele ei realizări actuale.

ALEXANDRU STOENESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică".

FRIEDRICH KRIES. Gründliche Anweisung zur Rechenkunst für Geübtere. Gotha, 1835.

Donată de D-l V. MARIAN.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3041. *Să se arate că expresiunea*

$$[(n+1)^{(n-1)(n+2)} - n(n+1)^{n^2-2} - (n+1)^{n^2-3} - (n+1)^{n-1}+1]\times$$
$$\times (n+1)^{n+3} - n(n^2+n+1)$$

se divide cu n^6, *numărul* n *fiind întreg.*

E. ŞTEFĂNESCU.

Se demonstrează prin problema 474 (G. M. VI, 46), că

$$(a+1)^p - pa - 1 = \text{mult. } a^2,$$

unde dacă facem pe $a = n$ şi $p = n+1$, găsim

$$(n+1)^{n+1} - (n+1)n - 1 = \mathcal{M}n^2$$

sau

$$(n+1)^{n+1} - (n^2+n+1) = \mathcal{M}n^2. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, problema 519, rezolvată în G. M., VI, pag. 138, ne dă expresiunea

$$n^{n(n-1)} - n^n + n - 1 = \mathcal{M}(n-1)^4,$$

unde făcând $n = n+1$, găsim

$$(n+1)^{(n+1)n} - (n+1)^{(n+1)} + (n+1) - 1 = \mathcal{M}n^4$$

sau

$$(n+1)^{n(n+1)} - (n+1)^{n+1} + n = \mathcal{M}n^4. \qquad (2)$$

Inmulţind pe (1) cu (2) găsim

$$[(n+1)^{n+1}-(n^2+n+1)][(n+1)^{n(n+1)}-(n+1)^{n+1}+n]=\mathcal{M}n^6.$$

Partea întâia a acestei ultimi relaţii se mai poate scrie

$$(n+1)^{n^2+2n+1}-(n+1)^{2n+2}+n(n+1)^{n+1}$$
$$-(n^2+n+1)(n+1)^{n(n+1)}+(n^2+n+1)(n+1)^{n+1}$$
$$-n(n^2+n+1)=(n+1)^{n^2+2n+1}-(n+1)^{2n+2}$$
$$+(n+1)^{n+1}(n+n^2+n+1)-(n^2+n)(n+1)^{n^2+n}$$
$$-(n+1)^{n^2+n}-n(n^2+n+1)=(n+1)^{n^2+2n+1}-(n+1)^{2n+2}$$
$$+(n+1)^{n+3}-n(n+1)^{n^2+n+1}-(n+1)^{n^2+n}-n(n^2+n+1),$$

care este tocmai desvoltarea expresiunii din enunţ.

Soluţia aceasta a fost dată de D-l Prof. GH. T. GHEORGHIU, pe când era elev în clasa VII R. a liceului din Galaţi.

G-RAL G. I. LIT.

PROBLEMA 3253. *La o serbare militară, fiecare armă: infanterie, cavalerie, geniu, etc..., trimete ca reprezentanţi un general şi un colonel. In câte moduri ar putea fi aşezaţi aceşti ofiţeri pe o linie, aşa încât niciodată un colonel dintr'o armă să nu se afle la dreapta generalului din aceeaşi armă.*

C. I. CIORĂNESCU.

1°. *Soluţie.* Presupunem că sunt numai $n-1$ arme, care trimit fiecare câte un general şi câte un colonel. Să însemnăm cu Q_{n-1}, numărul aşezărilor ce se pot face cu aceştia în condiţiile cerute. Dacă mai vine încă dintr'o altă armă un colonel şi un general să vedem câte aşezări se mai pot face introducând şi pe aceştia, adică să deducem pe Q_n din Q_{n-1}. Pentru aceasta, să luăm una, din cele Q_{n-1} grupe, formate dintâi.

Fie grupa $G_1 G_2 G_3 \ldots G_{n-1}\ C_1 C_2 C_3 \ldots C_{n-2} C_{n-1}$.

Colonelul C_n, din a n^a armă, poate fi aşezat la urma grupei, între persoane, sau înaintea grupei, deci poate ocupa în total $2n-1$ locuri.

Să vedem la fiecare loc al colonelului C_n, câte poziţii poate ocupa generalul q_n, din a n^a armă.

— Când colonelul C_n e după grupă, generalul poate ocupa... $2n-1$ poziţii;

— Când colonelul C_n e între persoanele C_{n-2} şi C_{n-1}, generalul poate ocupa $2n-2$ poziţii;

— Când col. C_n e între pers. C_{n-3} şi C_{n-2}, g-ralul poate ocupa 2_{n-3} poziţii;

⋮

— Când col. C_n e între pers. G_2 şi G_1, generalul poate ocupa 2 poziţii;

— Când colonelul C_n e înaintea grupei, generalul poate ocupa 1 poziţie.

Deci dintr'o singură grupă putem forma

$$1+2+3+\ldots+2n-1 = n(2n-1) \text{ grupe}$$

atunci din cele Q_{n-1} grupe, vom forma: $Q_{n-1} \cdot n(2n-1)$ grupe, adică

$$Q_n = Q_{n-1} \cdot n \cdot (2n-1).$$

Deci $Q_1 = 1$ (căci $G_1 C_1$ în condiţiile problemei nu pot ocupa decât o poziţie).

$Q_2 = Q_1 \times 2 \times 3 = 2 \times 3$

$Q_3 = Q_2 \times 3 \times 5$

⋮

$$Q_n = 1 \times (1+1)(2+1)(2+1)(4+1)(3+1)(6+1)\ldots \times n(2n-1)$$

sau

$$Q_n = n! \times [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2n-1)] =$$

$$= n! \times \frac{(2n-1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n-2)}$$

sau

$$Q_n = n! \times \frac{(2n-1)!}{2^{n-1} \times (n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} \times n =$$

$$= \frac{(2n-1)! \times 2n}{2^n} = \frac{(2n)!}{2_n}.$$

Această soluţie a fost redijată după soluţiile trimise de Domnii: IOAN M. MIU (când era elev al clasei VI R Liceul din Caracal) şi L. S. (când era elev al clasei VI Liceul din Botoşani).

2°. *Soluţia autorului.* Fie n numărul armelor care-şi trimit reprezentanţii la congres. Numărul ofiţerilor adunaţi va fi $2n$.

Extragem din articolul D-lui PROF. I. IONESCU *„Compararea rădăcinilor mai multor ecuații de gr. II-lea"*, publicat în *G. M.* Vol. IV, pag. 273, următoarele:

Numărul cazurilor generale în care putem aranja rădăcinile a n ecuații de gr. II, este evident numărul permutărilor ce putem face cu $2n$ litere:

$$1.2.3....2n = (2n)!$$

Insă printre inegalitățile obținute sunt unele inadmisibile, pentrucă rădăcina cea mică a unei ecuații se află scrisă la dreapta celei mari (sau pentrucă colonelul e la dreapta generalului). Cum însă unei permutări în care două rădăcini x' și x'' (cei 2 ofițeri) ocupă două locuri anumite, îi corespunde o permutare, în care colonelul ia locul generalului și toți ceilalți își păstrează locurile lor, rezultă că din punctul de vedere al celor doi ofițeri (rădăcini) considerați, numărul aranjamentelor admisibile este egal cu numărul aranjamentelor inadmisibile. Așa dar numărul aranjamentelor admisibile din punct de vedere al lui x' și x'' (colonelul și generalul de infanterie), este jumătate din numărul aranjamentelor totale, adică

$$(2n)!/2.$$

Raționând din punct de vedere al colonelului și generalului de cavalerie, numărul aranjamentelor va fi: $(2n)!/2^2$... ș. a. m. d. până ajungem la colonelul și generalul din a n^a armă, cari reduc numărul aranjamentelor admisibile la $(2n)!/2^n$.

— D-l I. C. VASILIU a trimis o soluție sumară indicând că rezultatul cerut este $(2n)!/2^n$ și este dat în articolul citat al D-lui PROF. I. IONESCU.

G-RAL. G. I. LIT.

PROBLEMA 4516. *Isogonalul simetricului ortocentrului unui triunghiu în raport cu centrul iperbolei* JERABECK *se află pe dreapta lui* EULER *a triunghiului. Proprietate analoagă, când se înlocuește ortocentrul cu punctul lui* LEMOINE.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-l MARIN G. POPESCU (Pitești).

Iperbola JERABECK trece prin ortocentrul H și punctul LEMOINE K, ale triunghiului. Simetricele H', K' ale acestor puncte față de centrul iperbolei sunt deci tot pe iperbolă; dar iperbola JERABECK este inversa dreptei lui EULER; deci isogonalele punctelor H,' K' sunt pe dreapta lui EULER.

PROBLEMA 4633. *Pe o parabolă dată se consideră punctele* B, C, D. *Din* B *și* D *se duc paralele la* CD *și* BC. *Fie* E, A *punctele unde aceste paralele taie din nou parabola, iar* I *intersecția lor. Să se demonstreze că*

$$\overline{IA} \cdot \overline{IE} = 4\overline{IB} \cdot \overline{ID}$$

și să se deducă relația

$$\left(1+\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\right)\left(1-\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}}\right)^{1)} = 4.$$

E. CARAMAN.

Dacă

$$y^2 = 2px$$

este ecuația parabolei, b, c, d ordonatele punctelor B, C, D, atunci avem

$$B\left(\frac{b^2}{2p}, b\right) \; ; \quad C\left(\frac{c^2}{2p}, c\right) \; , \quad D\left(\frac{d^2}{2p}, d\right)$$

(BC) $$y - b = \frac{2p}{b+c}\left(x - \frac{b^2}{2p}\right)$$

(CD) $$y - d = \frac{2p}{c+d}\left(x - \frac{d^2}{2p}\right)$$

(DA) $$y - d = \frac{2p}{b+c}\left(x - \frac{d^2}{2p}\right)$$

(BI) $$y - b = \frac{2p}{c+d}\left(x - \frac{b^2}{2p}\right).$$

---

1) In enunțul dela pag. 359, Vol. XLI relația a doua a fost pusă greșit sub forma

$$\left(\frac{AD}{BC} - 1\right)\left(\frac{BE}{CD} - 1\right) = 4.$$

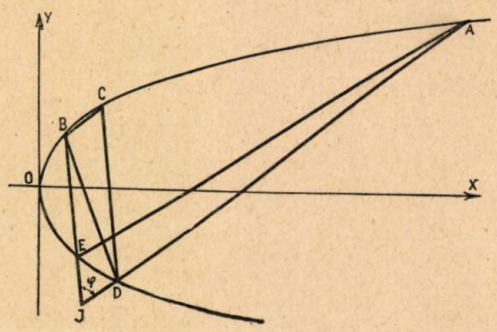
Fie X_A, Y_A coordonatele lui A şi X_D, Y_D acelea ale lui D Intre aceste coordonate avem relaţia:

$$Y_A^2 - Y_D^2 = 2p\,(X_A - X_D)$$

$$\therefore \quad \frac{Y_A - Y_D}{X_A - X_D} = \frac{2p}{Y_A + Y_D} = \frac{2p}{b + c}$$

căci membrul întâi este tocmai coeficientul unghiular al dreptei DA Din ultimele două rapoarte, în care se înlocuieşte Y_D prin d, deducem

$$Y_A = b + c - d \quad \text{şi deci} \quad X_A = \frac{(b + c - d)^2}{2p}.$$



La fel se găseşte

$$Y_E = c + d - b \quad \text{şi deci} \quad X_E = \frac{(c + d - b)^2}{2p}.$$

In fine rezolvând sistemul (DA), (BI) găsim

$$I\left[\frac{b^2 + d^2 - c^2}{2p},\ b + d - c\right].$$

Notăm cu S_1, S_2, φ suprafeţele IAE, IBD şi cu φ unghiul BIA. Avem

$$S_1 = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IE}}{2} \sin\varphi \quad , \quad S_2 = \frac{\overline{IB} \cdot \overline{ID}}{2} \sin\varphi$$

şi deci prima parte a problemei revine la a arăta că

$$S_1 = 4S_2.$$

Scriind valorile acestor suprafeţe sub formă de determinanţi, în funcţie de coordonatele vârfurilor triunghiurilor găsim valorile

$$S_1 = \begin{vmatrix} \frac{b^2+d^2-c^2}{2p} & b+d-c & 1 \\ \frac{(b+c-d)^2}{2p} & b+c-d & 1 \\ \frac{(c+d-b)^2}{2p} & c+d-b & 1 \end{vmatrix} = \frac{2(c-b)(c-d)(d-b)}{p}$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} \frac{b^2+d^2-c^2}{2p} & b+d-c & 1 \\ \frac{d^2}{2p} & d & 1 \\ \frac{b^2}{2p} & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{(c-b)(c-d)(d-b)}{2p}.$$

care verifică relaţia (1) între S_1 şi S_2 şi deci prima relaţie din enunţ.

Pentru relaţia a doua scriem pe prima sub forma

$$\frac{\overline{IA}\cdot\overline{IE}}{\overline{ID}\cdot\overline{IB}} = 4$$

şi observăm că

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{ID}+\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{\overline{BC}} = 1+\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\overline{IE}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IB}-\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}-\overline{BE}}{\overline{CD}} = 1-\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}}$$

$$\therefore \left(1+\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\right)\left(1-\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}}\right) = 4.$$

O soluţie analoagă cu rectificarea exactă a relaţiei a doua s'a primit dela D-l J. S.

PROBLEMA 5047. *Să se găsească patratele de forma* aabaabc, *toate cifrele fiind semnificative.*

AD. POPESCU.

Observăm că

$$aabaabc = a \times 100 \times 11011 + b \times 10 \times 1001 + c = 11m + c.$$

Cifra c fiind semnificativă şi terminaţie de patrat perfect trebuie căutată între cifrele 1, 4, 5, 6, 9. Dar faţă de divizorul 11 un patrat nu este niciodată de forma $11m + 6$. Deci c poate avea numai una din valorile

1, 4, 5 sau 9.

Rezultă că grupul de cifre bc, din acelea cu care se termină un patrat, nu va putea avea decât valori din şirul

21, 24, 25, 29, 41, 44, 49, 61, 64, 69, 81, 84, 89.

Acum dăm pe rând lui a toate valorile dela 1 la 9 şi utilizând terminaţiunile precedente vom forma 117 numere de forma din enunţ, dintre care se vor alege numai acelea care sunt patrate perfecte. Din cele 117 numere se elimină două de forma *aaaaaaa*, căci

$$a \times 1111111 = a \times 239 \times 4649$$

nu este patrat perfect, apoi se elimină 27 care se divid prin 3, fără a se divide prin 9. Din numerele terminate în 5 se elimină 5 care nu au la mii cifra 2. In fine eliminăm 26 numere la care ultimele 3 cifre nu formează terminaţiuni de patrat perfecte, aşa cum se arată în tabloul dela pag. 368, Vol. XXXVII, *Gazeta Matematică*. După aceste eliminări rămân de examinat următoarele 57 numere, scrise în ordinea valorilor cifrei a:

1121121, 1121129, 1141144, 1161161, 1161164, 1161169.
2222224, 2222225, 2242241, 2242244, 2242249, 2262264, 2282281, 2282284.
3323321. 3323324, 3323329, 3363361, 3363364, 3383384.
4444441, 4464464, 4484484, 4484489.
5525521, 5525524, 5545544, 5545549, 5565564, 5565569, 5585584.
6626624, 6646649, 6666664, 6686681, 6686684, 6686689.
7727774, 7727729, 7747744, 7767761, 7767764, 7767769.
8828824, 8848841, 8848844, 8848849, 8868864, 8888881, 8888884.
9429921, 9929924, 9929929, 9969961, 9969964, 9969969, 9989984.

Extrăgând rădăcina patrată din fiecare din aceste numere se găseşte că singura soluţie a problemei este

$$1823^2 = 3323329.$$

1°. S'au primit bune soluţii analoage dela D-nii: V. G. BÂRLEA-SUHĂŢEANU, P. V. CAZANACLI şi CPT. E. ŞT. IACOB.

2°. D-l CPT. E. ŞT. IACOB a dat şi soluţia

$$3148^2 = 9909904$$

pentru cazul când cifrele nu sunt neapărat semnificative.

3°. La fel se poate rezolva şi problema 5105, propusă la pag. 446, Vol. XLIV, şi nerezolvată încă.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5474. *Dacă* l_a, l_b, l_c *şi* α, β, γ, *sunt bisectoarele interioare şi laturile triunghiului antiortic* $I_a I_b I_c$ *faţă de triunghiul de referinţă* ABC *de laturi* a, b, c *avem*

$$\begin{vmatrix} 1 & al_a & \dfrac{\alpha}{b+c} \\ 1 & bl_b & \dfrac{\beta}{c+a} \\ 1 & cl_c & \dfrac{\gamma}{a+b} \end{vmatrix} = 0.$$

EUGEN G. VIJELIE.

Soluţie. Cunoaştem relaţiile [1])

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)}\,\sqrt{bc}\ , \quad \alpha = \frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}, \ldots$$

şi observăm că elementele din coloana a II-a şi a III-a a determinantului sunt proporţionale:

$$\frac{a(b+c)l_a}{\alpha} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2S, \ldots$$

de unde rezultă că acest determinant este nul.

Bune soluţii date de D-nii TILICĂ ŞTEFAN, MIREL D. STOENESCU şi RADU P. VOINEA.

---

1) Culegere de Probleme de Trigonometrie, partea II-a, de V. CRISTESCU şi G. T. GHEORGHIU, pag. 13 ex. 1 şi pag. 15 ex. 10.

PROBLEMA 5537. *Să se demonstreze că ecuația*

$$\sum_{\lambda=0}^{4}(-1)^{\lambda} C_4^{\lambda} x^{4-\lambda} \sin[(4-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha] = 0,$$

admite rădăcinile:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}, \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}, \quad \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)}, \quad \frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

V. ALACI.

Soluție. Dacă însemnăm

$$(1)\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}, \; x_2 = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}, \; x_3 = \dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)}, \\ x_4 = \dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)}, \end{cases}$$

avem succesiv:

$$x_1 + x_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} = \frac{\sin(\alpha_1+\alpha)}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1} = \frac{2\sin(\alpha_1+\alpha)}{\sin 2\alpha_1},$$

$$x_3 + x_4 = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\sin\left(\alpha_1+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\cos(\alpha_1+\alpha)}{\cos 2\alpha_1}$$

$$x_1 x_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha_1},$$

$$x_3 x_4 = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha_1},$$

Folosind aceste relaţii, putem scrie mai departe,

$$(2)\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=\dfrac{2\sin(\alpha_1+\alpha)}{\sin 2\alpha_1}+\dfrac{2\cos(\alpha_1+\alpha)}{\sos 2\alpha_1}= \\ \qquad\qquad \dfrac{4\sin(3\alpha_1+\alpha)}{\sin 4\alpha_1}, \\ x_1x_2+x_3x_4+(x_1+x_2)(x_3+x_4)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha_1}+\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha_1}+ \\ \qquad +\dfrac{2\sin(\alpha_1+\alpha)}{\sin 2\alpha_1}\cdot\dfrac{2\cos(\alpha_1+\alpha)}{\cos 2\alpha_1} \\ \dfrac{2\sin 2(\alpha_1+\alpha)}{\sin 4\alpha_1}+\dfrac{4\sin 2(\alpha_1+\alpha)}{\sin 4\alpha_1}=\dfrac{6\sin 2(\alpha_1+\alpha)}{\sin 4\alpha_1}, \\ x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4\ (x_1+x_2)=\dfrac{4\sin 2\alpha\cos(\alpha_1+\alpha)}{\sin 4\alpha_1}+ \\ \qquad +\dfrac{4\cos 2\alpha\sin(\alpha_1+\alpha)}{\sin 4\alpha_1}=\dfrac{4\sin(\alpha_1+3\alpha)}{\sin 4\alpha_1}, \\ x_1x_2x_3x_4=\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha_1}. \end{cases}$$

Relaţiile (2) ne dau suma, suma produselor câte două, suma produselor câte trei, precum şi produsul $x_1.x_2.x_3.x_4$.

Rezultă atunci, în virtutea relaţiilor cunoscute dintre rădăcinile unei ecuaţii şi coeficienţii săi, că x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x-\frac{4\sin(3\alpha_1+\alpha)}{\sin 4\alpha_1}x^3+\frac{6\sin 2(\alpha_1+\alpha)}{\sin 4\alpha_1}x^2-\frac{4\sin(\alpha_1+3\alpha)}{\sin 4\alpha_1}x+ \\ +\frac{\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha_1}=0,$$

care prescurtat se mai poate scrie

$$\sum_{\lambda=0}^{4}(-1)^\lambda C_4^\lambda x^{-\lambda}\sin[(4-\lambda)\alpha_1+\lambda\alpha]=0.$$

Găsim astfel că ecuaţia din enunţ, admite rădăcinile (1).

Soluţii bune date de D-nii: A. Gh. Andrei (Liceul Militar, Iaşi), M. Beno (Bucureşti), C. D. Cruceru (Politechnica, Bucureşti), P. P. Drăghicescu, A. N. Popa, C. Romanescu (Liceul Militar, Iaşi), Gh. D. Sbârnea (Politechnica, Bucureşti), D-tru Vasiliu (Liceul Militar, Iaşi) şi E. Wegener (Bucureşti).

PROBLEMA 5645. 1°. *Să se arate că în orice poligon regulat avem relaţiile:*

$$\left(\frac{L_n^2}{L_n^1}\right)^2 - \frac{L_n^3}{L_n^1} = 1 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{L_n^3}{L_n^1}\right) - \frac{L_n^4}{L_n^2} = 1. \qquad (2)$$

2°. *Cu ajutorul acestor relaţii să se deducă expresiile laturilor:* L_8^1; L_{12}^1; L_{16}^1; L_{18}^1; *cunoscând raza* R *a cercului circumscris poligonului respectiv.*

3°. *Ştiind*[1]) *că într'un nonecagon regulat avem relaţia:*

$$\left(\frac{L_9^2}{L_9^1}\right)^2 = 2 \cdot \frac{L_9^4}{L_9^2} + 3\left(\frac{L_9^1}{L_9^3}\right)^2; \qquad (3)$$

să se deducă din cele 3 relaţii de mai sus expresia L_9^1 *sub forma ei cea mai simplă.*

C. MIHU.

Soluţie dată de D-l CLAUDIU SENI (Bacalaureat, Bucureşti).

Dacă notăm: $\frac{\pi}{n} = \alpha$; avem: $\boxed{L_n^k = 2R \sin k\alpha}$.

Folosind această egalitate relaţiile (1) şi (2) devin:

$$(1') \qquad \frac{4R^2 \sin^2 2\alpha}{4R^2 \sin^2 2\alpha} - \frac{2R \sin 3\alpha}{2R \sin\alpha} = 4\cos^2\alpha - 3 + 4\sin^2\alpha =$$

$$(2') \qquad \frac{2R \sin 3\alpha}{2R \sin\alpha} - \frac{2R \sin 4\alpha}{2R \sin 2\alpha} = 3 - 4\sin^2\alpha - 2\cos 2\alpha = 1.$$

2°. Din relaţiile (1) şi (2) se obţine prin adunare:

$$L_n^1 = \sqrt{\frac{(L_n^2)^3}{2L_n^2 + L_n^4}}. \qquad (4)$$

Calculul lui L_8^1: Facem în (4), pe $n = 8$; avem:

$$L_8^2 = L_4^1 = R\sqrt{2} \quad ; \quad L_8^4 = L_2^1 = 2R.$$

$$L_8^1 = \sqrt{\frac{2R^3 \cdot \sqrt{2}}{2R\sqrt{2} + 2R}} = R\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}} = \boxed{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

1) G. M., XLVII/238.

Calculul lui L_{12}^1: Din relaţia (2) găsim:

$$L_n^1 = \frac{L_n^3 \cdot L_n^2}{L_n^2 + L_n^4}.$$

Facem $n = 12$; avem:

$$L_{12}^3 = L_4^1 = R\sqrt{2} \quad ; \quad L_{12}^2 = L_6^1 = R \quad ; \quad L_{12}^4 = L_3^1 = R\sqrt{3};$$

$$L_{12}^1 = \frac{R \cdot R\sqrt{2}}{R + R\sqrt{3}} = R\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = \boxed{R\sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

Calculul lui L_{16}^1: Facem în (4) pe $n = 16$; avem:

$$L_{16}^2 = L_8^1 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad ; \quad L_{16}^4 = L_4^1 = R\sqrt{2};$$

$$L_{16}^1 = \sqrt{\frac{R^3(2 - \sqrt{2})\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2R\sqrt{2 - \sqrt{2}} + R\sqrt{2}}} = R\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} =$$

$$= \boxed{R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

Calculul lui L_{24}^1: Tot în (4) facem $n = 24$; avem:

$$L_{24}^2 = L_{12}^1 = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad ; \quad L_{24}^4 = L_6^1 = R.$$

$$L_{24}^1 = R\sqrt{\frac{12\sqrt{6} - 20\sqrt{2}}{8(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 8}} = R\sqrt{\frac{3\sqrt{6} - 5\sqrt{2}}{2(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1)}} =$$

$$= R\sqrt{\frac{4 - \sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}} = \boxed{R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}.$$

3°. Notăm:

$$L_9^1 = x \quad ; \quad L_9^2 = y \quad ; \quad L_9^3 = L_3^1 = R\sqrt{3} \quad ; \quad L_9^4 = z.$$

Relaţiile (1), (2), (3) devin:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{z^2} - \frac{R\sqrt{3}}{x} &= 1 \\ \frac{R\sqrt{3}}{x} - \frac{z}{y} &= 1 \\ \frac{y^2}{z^2} - \frac{x^2}{R^2} &= 2\,\frac{z}{y} \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Elimin pe z şi y din (5) şi găsesc:

$$\boxed{x^3 - 3R^2x + R^3\sqrt{3} = 0}.$$

Folosind formula lui « CARDAN » obţin:

$$x = R\left[\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}\right]. \qquad (6)$$

Pentru a obţine cele trei valori ale lui x scriem pe (6) sub formă trigonometrică:

$$x_k = R\,(\cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\alpha - i\sin\alpha);\ \text{unde}\ \alpha = \frac{150^0 + 2k\pi}{3}$$

$$x_k = 2R\,.\cos\frac{150^0 + 2k\pi}{3};\qquad (k = 0,\ 1,\ 2)$$

$$x_0 = 2R\cos 50^0 = 2R\sin 40^0;\ \ldots\ldots\ k = 0;$$

$$x_1 = 2R\cos 170^0 = -2R\sin 80^0;\ \ldots\ k = 1;$$

$$x_2 = 2R\cos 290^0 = 2R\,.\sin 20^0;\ \ldots\ k = 2.$$

Soluţia admisibilă este: $\boxed{L_9^1 = 2R\sin 20^0}$ sub forma ei cea mai simplă.

C. MIHU.

S'a primit o soluţie bună, diferită de precedenta dela D-l M. V. ALDEA (Buzău).

PROBLEMA 5689. *Un vector* V *este determinat în mărime, direcţiune şi sens prin trei cantităţi scalare* M_a; M_b; M_c *egale cu mărimea momentelor lui* V *în raport cu trei puncte* A, B, C *din planul său, puncte ce formează un triunghiu dat* ABC.

Să se demonstreze că valoarea V *a vectorului este dată de relaţia*

$$V = \frac{K}{2S},$$

în care:

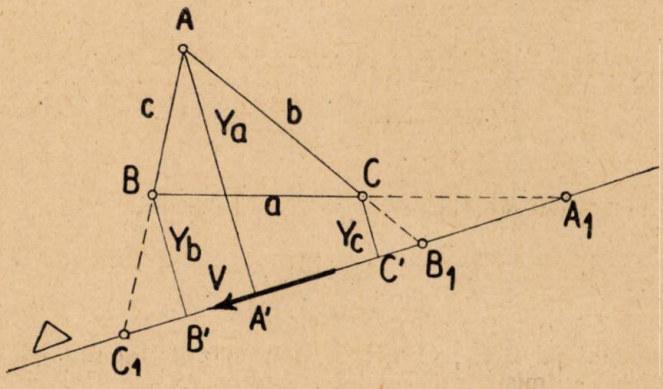
$$K = \sqrt{a^2(M_b - M_a)(M_c - M_a) + b^2(M_a - M_b)(M_c - M_b) + c^2(M_a - M_c)(M_b - M_c)},$$

iar S *este suprafaţa triunghiului* ABC.

Să se studieze reducerea vectorilor situaţi în acelaşi plan întrebuinţând reprezentarea dată mai sus.

ALEXANDRU STOENESCU.

Să notăm cu A_1, B_1, C_1 punctele în care suportul vectorului taie laturile triunghiului, cu A', B', C' picioarele perpendicularelor scoborîte din vârfuri pe suport şi cu y_a, y_b, y_c lungimile respective ale acestor perpendiculare:



Avem:

$$M_a = V_{ya} \quad ; \quad M_b = V_{yb} \quad ; \quad M_c = V_{yc}.$$

Din asemănarea triunghiurilor $AA'C_1$ şi $BB'C_1$:

$$\frac{y_a}{y_b} = \frac{M_a}{M_b} = \frac{C_1A}{C_1B}.$$

Rezultă:

$$\frac{M_a}{M_a - M_b} = \frac{C_1A}{c} \quad ; \quad C_1A = \frac{M_a}{M_a - M_b} \cdot c. \tag{1}$$

In mod analog din asemănarea triunghiurilor $AA'B_1$ şi $CC'B_1$ obţinem:

$$B_1A = \frac{M_a}{M_a - M_c} \cdot b. \tag{2}$$

Din triunghiul AB_1C_1:

$$\overline{B_1C_1^2} = \overline{B_1A}^2 + \overline{C_1A}^2 - 2\overline{B_1A} \cdot \overline{C_1A} \cos A. \tag{3}$$

Ţinând seama de (1) şi (2) precum şi de relaţia:

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

obţinem efectuând calculele în formula (3):

$$\overline{B_1C_1^2} = \frac{M_a^2}{(M_a - M_b)^2 (M_a - M_c)^2} \cdot \Sigma a^2 (M_b - M_a)(M_c - M_a).$$

Notând:

$$k = \sqrt{a^2 (M_b - M_a)(M_c - M_a) + b^2 (M_a - M_b)(M_c - M_b) + c^2 (M_a - M_c)(M_b - M_c)}$$

avem:

$$B_1C_1 = \frac{kM_a}{(M_a - M_b)(M_a - M_c)}.$$

Dar:

$$V = \frac{M_a}{y_a} = \frac{M_a}{\frac{2 \text{ supraf. } AB_1C_1}{B_1C_1}} = \frac{M_a \cdot B_1C_1}{2 \text{ supraf. } AB_1C_1}.$$

Insă:

$$\text{supraf. } AB_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{C_1A} \cdot \overline{B_1A} \sin A.$$

Deci:

$$V = \frac{M_a \cdot \overline{B_1C_1}}{\overline{C_1A} \cdot \overline{B_1A} \cdot \sin A}.$$

Inlocuind pe B_1C_1, C_1A, B_1A prin valorile lor obţinem:

$$V = \frac{kM_a^2}{(M_a - M_b)(M_a - M_c)} \cdot \frac{(M_a - M_b)(M_a - M_c)}{M_a^2 bc \sin A} = \frac{k}{bc \sin A}.$$

Sau:

$$V = \frac{k}{2S}$$

S fiind suprafaţa triunghiului ABC.

Pentru soluționarea părții a doua a problemei să considerăm *n vectori* $V_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ situați în planul triunghiului ABC și reprezentați prin momentele M_{a_i}, M_{b_i}, M_{c_i} și *rezultanta* lor R reprezentată prin momentele M_{a_k}, M_{b_k} și M_{c_k}. Avem:

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \ldots + \vec{V}_n = \Sigma \vec{V}_i$$

și prin aplicarea teoremei lui VARIGNON:

$$M_{a_k} = \Sigma M_{a_i} \; ; \quad M_{b_k} = \Sigma M_{b_i} \; ; \quad M_{c_k} = \Sigma M_{c_i}.$$

Se pot întâmpla următoarele cazuri:

Cazul I. Câtimile M_{a_k}, M_{b_k} și M_{c_k} nu sunt toate egale între ele; în acest caz sistemul se reduce la o *rezultantă*

$$R = \frac{k}{2S}.$$

Cazul II. $M_{a_k} = M_{b_k} = M_{c_k} = C \neq 0.$

Sistemul se reduce la *un cuplu* de vectori de mărime C.

Cazul III. $M_{a_k} = M_{b_k} = M_{c_k} = 0.$

Sistemul de vectori dau o *rezultantă nulă* (când vectorii reprezintă forțe suntem în cazul echilibrului).

Pentru *determinarea geometrică* a suportului vectorului V când se cunosc triunghiul ABC și cantitățile M_a, M_b, M_c, se iau respectiv pe laturile AB, BC, CA punctele C_1, A_1, B_1 astfel încât:

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{M_a}{M_b} \; ; \quad \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{M_b}{M_c} \; ; \quad \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{M_c}{M_a}.$$

Dreapta $A_1B_1C_1$ este suportul căutat.

Punctele C_1, A_1, B_1 sunt *respectiv exterioare sau interioare* laturilor triunghiului ABC după cum rapoartele $\frac{M_a}{M_b}, \frac{M_b}{M_c}, \frac{M_c}{M_a}$ sunt *pozitive sau negative.*

S'a primit o soluție *foarte bună* pentru toate punctele problemei dela D-l MARIN GH. POPESCU (elev clasa VIII-a reală Liceul „I. C. Brătianu", Pitești), prin întrebuințarea *coordonatelor baricentrice.*

D-sa dă și o frumoasă construcție geometrică a suportului vectorului prin determinarea *polului triliniar al acestui suport* și *a polarei triliniare corespunzătoare.*

AL. ST.

PROBLEMA 5706. *Trei lucrători, vor să facă o lucrare. Al doilea lucrător, dacă ar lucra singur, ar termina lucrarea cu 10 zile mai târziu decât primul lucrător lucrând singur, dar cu 15 zile mai curând decât al treilea lucrător lucrând singur. Dacă ar lucra împreună primul cu al doilea, s'ar termina lucrarea cu 6 zile mai curând decât dacă ar lucra împreună al doilea cu al treilea lucrător.*

Să se afle în câte zile ar putea termina lucrarea fiecare lucrător, dacă ar lucra singur.

EMIL MORȚUN.

Fie x numărul zilelor necesare celui de al doilea lucrător pentru a termina singur lucrarea.

Primul lucrător va termina lucrarea singur în $(x-10)$ zile, iar al treilea lucrător în $x+15$ zile.

Fracțiunile din lucrare executate într'o zi de fiecare lucrător sunt respectiv:

$$\frac{1}{x-10}\ ;\ \frac{1}{x}\ ;\ \frac{1}{x+15}.$$

Fracțiunea din lucrarea executată într'o zi de primul și al doilea lucrător, la un loc, este

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-10}=\frac{2x-10}{x(x-10)}.$$

Deci, acești 2 lucrători, lucrând împreună vor termina lucrarea în:

$$1:\frac{2x-10}{x(x-10)}=\frac{x(x-10)}{2x-10}\text{ zile.}$$

Al doilea și al treilea lucrător, lucrând împreună, vor face într'o zi:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}=\frac{2x+15}{x(x+15)}.$$

Deci, acești lucrători vor termina lucrarea în:

$$1:\frac{2x+15}{x(x+15)}=\frac{x(x+15)}{2x+15}\text{ zile.}$$

Ecuația problemei este atunci următoarea:

$$\frac{x(x-10)}{2x-10}+6=\frac{x(x+15)}{2x+15}.$$

Făcând toate calculele avem succesiv:

$$2x^3-20x^2+15x^2-150x+24x^2+60x-900$$
$$=2x^3+30x^2-10x^2-150x$$
$$x^2-60x+900=0\ ,\quad (x-30)^2=0\ ,\quad x=30.$$

Primul lucrător termină în 20 zile, al doilea în 30 zile și al treilea în 45 zile.

Au rezolvat bine problema D-nii: BERNARD BEREANU, NICOLAE COCA (liceul T.-Severin); DAN DUMITRESCU (colegiul Sf. Sava); TRAIAN DUMITRESCU (liceul T.-Severin); RADU VOINEA (Student-Inginer); C. I. STAICU, V. N. ȚAPU (liceul militar, Cernăuți); NIC. PITIȘ (elev particular); OCTAV GHEORGHIU (liceul internat Iași); OCTAVIAN GHEORGHIU (București) și CL. SENI (student, București).

EM. M.

EXERCIȚII

15. Să se găsească numărul de trei cifre abc știind că

$$abc=2^{\alpha}3^{\beta}11 \quad \text{iar} \quad cba=3^{\beta+1}11.$$

C. I. STAICU.

R. Al doilea număr fiind de 3 cifre trebuie ca

$$3\leqslant\beta+1\leqslant 4\ \ \therefore\ \ 2\leqslant\beta\leqslant 3.$$

Dând deci lui β valorile 2 și 3 găsim că cba ar putea fi

$$3^3\times 11=297 \quad \text{sau} \quad 3^4\times 11=891.$$

Din acestea însă suma 792 este de forma $2^{\alpha}3^{\beta}11$ și anume $2^3\times 3^2\times 11$. Soluția căutată este deci

$$792=2^3\times 3^2\times 11\ ,\quad 297=3^3\times 11.$$

PROBLEME PROPUSE

5750. Să se găsească un număr de cinci cifre, produsul unui număr de trei cifre prin numărul obținut suprimând cifra mijlocie a acesteia, știind că numărul format de primele trei cifre ale numărului căutat este un multiplu al celui format de ultimele două (de douăzeci de ori).

M. GHERMĂNESCU.

5751. Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reprezintă numerele prime cu N și inferioare lui, iar x un număr nedivizibil cu N, atunci avem:

$$(x+p_1)(x+p_2)\ldots(x+p_n) \equiv x^n \pm 1 \pmod{N}.$$

COMANDOR I. LINTEȘ.

5752. Să se demonstreze că dacă $(x+y)^{2t+1}$ se împarte exact prin $(x^{2t}+y^{2t})$, atunci și $(x^{2t+1}+y^{2t+1})$ se împarte exact prin $(x^{2t}+y^{2t})$; x și y sunt numere întregi pozitive.

Proprietatea este o extindere a unor observații făcute de D-l Prof. O. ȚINO în articolul *„Asupra problemei 1402"*, publicat în *Gazeta Matematică*, Vol. XLI, pag. 53.

I. B. FLORESCU.

5753. Să se arate că, dacă avem:

$$\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\cdot\frac{1+z}{1-z}$$

avem și:

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{y^2}{(1+y^2)^2}+\frac{z^2}{(1+z^2)^2}+4\cdot\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{y}{1+y^2}\cdot\frac{z}{1+z^2}=\frac{1}{4}.$$

ȘERBAN GHEORGHIU.

5754. Să se discute ecuația:

$$x^5-10x^3+10x^2+\lambda=0$$

și să se rezolve pentru $\lambda=-1$ și $\lambda=-100$.

G-L GH. BUICLIU.

5755. Să se demonstreze că cu distanţele unui punct la muchiile unui punct la muchiile unui tetraedru echilateral se poate construi întotdeauna un tetraedru.

I. C. VASILIU.

5756. Se dau două cercuri tangente interioare. Din punctul situat pe cercul exterior şi diametral opus punctului de tangenţă al celor două cercuri, se duc cele două tangente la cercul interior, care întâlnesc cercul exterior în punctele A şi B.

Se cere: 1°. Să se construiască cercul interior, astfel ca dreapta AB să treacă prin centrul cercului mare.

2°. Punctele de tangenţă pe cercul interior fiind A_1 şi B_1, să se arate că pentru orice raport al razelor celor două cercuri, avem: $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\overline{BB_1}$.

3°. Să se construiască cercul interior, astfel ca dreapta A_1B_1 să treacă prin centrul cercului mare. In această ipoteză, să se arate că segmentul de dreaptă $\overline{A_1B_1}$ este chiar latura triunghiului echilateral înscris în cercul mic şi înălţimea acestui triunghiu echilateral este egală cu raza cercului mare.

ING. MIRCEA RĂDULESCU.

5757. Fie A_1 punctul de tangenţă cu cercul circumscris al unui cerc tangent exterior acestuia şi în acelaşi timp tangent laturilor AB şi AC, ale unui triunghiu oarecare. Se obţin, în mod analog, punctele B_1 şi C_1. Să se demonstreze că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente. Chestiune analoagă pentru cazul când cercurile considerate sunt tangente interior cercului circumscris triunghiului ABC.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

5758. Fie triunghiul ABC şi A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene. Paralelele duse din A_1 la celelalte două ceviene taie pe AB şi AC în C_a şi B_a.

1°. Patrulaterele $A_1B_aB_1C_a$ şi $A_1B_aC_1C_a$ au aceeaşi dreaptă a lui GAUSS.

2°. Cele trei drepte GAUSS, corespunzătoare celor trei ceviene, determină un triunghiu omologic cu triunghiul ABC.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5759. De pe mijloacele laturilor unui patrulater convex de suprafaţă dată (S), se duc drepte ce fac acelaşi unghiu (α) cu latura respectivă. Se obţine astfel un alt patrulater de suprafaţă (s).

a) Să se exprime (s) cu ajutorul lui (S).

b) Pentru ce valoare a lui (α), avem (s) maxim?

c) Generalizare.

C. MIHU.

5760. Să se verifice identitatea:

$$(A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi)(A\sin^2\varphi + C\cos^2\varphi) = AC - B^2\cos^2 2\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}B(A - C)\sin 4\varphi + \left[\frac{1}{2}(A - C)\cos 2\varphi \cdot \left(\frac{2B}{A - C} - \operatorname{tg} 2\varphi\right)\right]^2.$$

N. N. MIHĂILEANU.

5761. Un avion zburând orizontal, pe un timp liniştit, cu iuţeală constantă de 400 km/oră străbate distanţele AB şi AC ($AB \perp AC$) respectiv în 120 min. şi 90 min. Pe un vânt constant, acelaşi avion în aceleaşi condiţii de zbor străbate distanţele AB şi AC în 150 minute şi 80 minute. Să se determine iuţeala şi direcţia vântului.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. 1°. Pag. 151 jos se înlocuieşte α_1, α_2, α_3 şi β_1, β_2, β_3 prin α_1, β_1, γ_1 şi α_2, β_2, γ_2.

2°. Pag. 152 la mijloc în loc de *elementele matricei* se scrie *elementele determinantului.*

3°. Pag. 154. In dreptul expresiunii F_2 se va ceti (Γ_2) în loc de (Γ).

4°. Pag. 156. Rândul 10 sus se ceteşte *propoziţiuni* în loc de *poziţiuni.*

5°. Pag. 192 problema propusă 5737 penultimul rând *„parabolă"* în loc de *paralelă.*

6°. Pag. 220 ultimul cuvânt jos este *centre* nu *cercuri.*

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andrei Gh. A. (5588, 659, 733); *Bârzescu M.* (5559, 692, 94, 705, 18, 22, P); *Ciumaşu Viorel* (5605); *Columbeanu D. P.* (5643, 92, 717); *Cotariu D. M.* (5575, 747); *Diaconescu C. P.* (5694, 703); *Donţu Gh. G.* (5687); *Dumitriu Tigran* (5706, 07); *Gheorghiu C. Oct.* (5674, 722); *Gheorghiu E. Oct.* (3635, 5692); *Iacob Şt. Eug.* Căpit. (5606, E); *Ionescu V. N.* (5747); *Mahrenholz I.* (5711); *Mândreanu M.* (5580); *Manolache C. Mircea* (5694); *Nache D.* (5644, 85, 94); *Pălăceanu D. Vasile* (5606); *Pârvulescu V. C.* (5747); *Pitiş L. N.* (5487, 512, 30, 46); *Popescu I. Gh.* G-l (P); *Popescu Gh. M.* (5290, 381, 84, 611, 84, 92, 95, 706, 07, 18, 25, 33); *Rădulescu V. Const.* (5694, 706); *Ştefănescu D. N.* (5056, 739); *Thébault V.* (P); *Tincu C. Const.* (5694, 703); *Tofan Aurel* (5692); *Vasilescu Ion* (5232, 694, 706, 07, 21); *Vasilescu Pandele* (5703); *Vasiliu Gh. D.* (4360, 991, 5559, 605, 46, 59, 720, 22); *Wegener N. E.* (5176, 77, 611, 24, 45, 46, 98, 747); *Zareli N.* (5703).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de geometrie, a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, V, VI şi VIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică*. Ediţia II-a revăzută şi adăogită de Gabriela Ţiţeica . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică*. Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie*. Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid**. (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid**. (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid**. (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. **Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 15.458

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1943

BIBLIOTECA CENTRALĂ SIBIU

SUMARUL

1. † N. V. Teodorescu . . . . . *G-l Gh. Buiculiu.*
2. Isac Newton . . . . . *Edm. Halley.*
3. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
4. O transformare geometrică . . . . . *A. Myller.*
5. Raportul comisiunii pentru premiul de Aritmetică . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
6. Note matematice: 34 — 38.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3075, 3291, 3635, 3720, 5095, 5291, 5476, 5477, 5488, 5518, 5586, 5594.
11. Exerciţii: 16 — 17.
12. Probleme propuse: 5762 — 5774.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 03, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

† N. V. TEODORESCU

In ziua de 23 Ianuarie, anul acesta a plecat pe drumul veşniciei, Inginerul Inspector General N. TEODORESCU care dela 18 Mai 1911 făcea parte din societatea *Gazeta Matematică*. El nu a scris articole sau note şi nici nu a propus probleme în *Gazeta Matematică* dar a dat acestei reviste şi societăţii cu acelaşi nume un sprijin moral şi material care a făcut cu putinţă să se rezolve una din cele mai grele probleme: construirea casei *Gazeta Matematică*. N. TEODORESCU este acela care, în anul XXXII al existenţei revistei *Gazeta Matematică*, s'a pus în fruntea comitetului pentru construirea localului *Gazeta Matematică*. Prin stăruinţa fără preget, mânată de entusiasmul pe care-l punea totdeauna pentru *Gazeta Matematică*, a reuşit ca, înscriindu-se în fruntea subscriitorilor, să colecteze o sumă cu care se putea începe construcţia localului.

In calitate de director al manufacturii de tutun Belvedere, N. TEODORESCU a organizat, punând la dispoziţie refectorul manufacturii de tutun Belvedere, trei ani dearândul, începând din 1911, mesele comune ce se dau după terminarea concursurilor anuale ale *Gazetei Matematice*, concursuri de care se interesa foarte de aproape.

La una din aceste serbări, anume în seara de 17 Aprilie 1911 a şi fost aclamat ca membru al societăţii *Gazeta Matematică*, în urma propunerii D-lui A. G. IOACHIMESCU, primită cu aplauze şi urale de comeseni.

Dela 1 Sept. 1913 la 1 Sept. 1915 a fost membru în delegaţia societăţii, timp în care calităţile sale de bun administrator au marcat o perioadă de reală prosperitate materială a societăţii.

Născut în Lespezi, judeţul Baia, la 2 Iunie 1874, a urmat cursurile Liceului Internat din Iaşi şi apoi Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele pe care a absolvit-o în 1896. Dela Iulie 1896, imediat după absolvirea şcolii până la 1 Febr. 1900 a lucrat ca inginer asistent la Direcţia Specială a Construcţiilor şi Podurilor, dându-şi astfel şi obolul său tehnic la construcţia podului de la Cerna-Vodă.

După un scurt stagiu la Serviciul de Intreţinere C. F. R. intră în serviciul Regiei Monopolurilor Statului la 1 Noembrie 1901, de unde, graţie călităţilor sale, ajunge la 1 Aprilie 1904 Subdirector la Manufactura de tutun Belvedere, Bucureşti apoi în 1908 Director la Manufactura de tutun din Iaşi pentru a reveni în 1911 Director la Manufactura din Bucureşti, unde a ţinut acest post până la 1919. De aici înainte calităţile sale de bun administrator îl impun în posturi de mare răspundere ca Director General al R. M. S. dela 1 Iunie 1919 la 1 Aprilie 1921 de unde pleacă spre a conduce o mare societate carboniferă pentru a reveni la 17 August 1927 ca Director General la C. F. R. unde a stat până la 1 Aprilie 1929.

Din Februarie şi până în Sept. 1934 a fost Ministru de Industrie şi Comerţ.

In timpul cât nu a ocupat funcţiuni de Stat a condus importante societăţi cu priză în economia şi industria naţională.

In timpul războiului 1916—1918 a făcut parte din comisiunea militară dela Paris de sub preşedinţia D-lui G-L V. RUDEANU, unde a dat tot ce poate da mai bun un inginer pentru a asigura aprovizionarea ţării cu materiale de calitate.

In numeroasele posturi de răspundere, de Stat sau particulare, pe care le-a avut, N. V. TEODORESCU pe lângă calităţile de muncă şi energie, care se cer totdeauna acestor posturi, a pus şi o calitate specifică sufletului lui şi care se întâlneşte ceva mai rar, a pus un entusiasm nelimitat, o superioară căldură sufletească, în adevăratul sens al cuvântului, şi un interes deosebit pentru soarta celor conduşi de el, ceea ce a făcut să se bucure de dragostea frăţească a colaboratorilor lui, mari şi mici.

Noi, dela *Gazeta Matematică* îi reţinem această calitate caracteristică, cu atât mai de valoare cu cât e mai rară şi-i deplângem cu sinceră părere de rău plecarea prea timpurie din mijlocul nostru.

G-L GH. BUICLIU.

ISAC NEWTON

(Cu ocaziunea tricentenarului naşterii lui)

La 25 Decemvrie 1942 s'au împlinit 300 de ani dela naşterea lui ISAC NEWTON, unul din cei mai mari matematiciani, astronomi, fiziciani şi filosofi ai omenirii.

Cu această ocaziune Societatea *Gazeta Matematică*, hotărîse să tipărească pentru prima dată în limba română opera fundamentală a lui NEWTON: *Filosofiae naturalis principia matematica.* Această operă celebră a fost tradusă în limba română de către Domnul VICTOR MARIAN după originalul latin a lui NEWTON, şi revăzută de Domnul Profesor universitar VICTOR VÂLCOVICI. Manuscrisul este gata de mult de tipărire, însă costul exagerat al imprimatului din ziua de azi nu permite Societăţii *Gazeta Matematică*, să înceapă publicarea, care rămâne să fie făcută mai târziu.

Ca omagiu însă, pe care această Societate îl aduce strălucitului geniu al omenirii, ISAC NEWTON, Delegaţia Societăţii publică aci în traducere românească, făcută de către domnul Prof. T. NAUM, dela Facultatea de litere din Sibiu, oda pe care i-a făcut-o EDM. HALLEY, marele astronom englez:

INTRU PREAMĂRIREA ACESTEI OPERE MATEMATICO-FIZICE
— PODOABĂ ALEASĂ A VEACULUI ŞI GINŢII NOASTRE —
A PREASTRĂLUCITULUI DOMN ISAC NEWTON

Iată şi-a cerului lege şi cumpăna lumii divine,
Măsurătoarea lui Jupiter iat-o şi legile care
Nu le-a călcat nici Părintele lumii Atotfăcătorul,
Când i-a urzit începutul şi iat'ale lumii temeiuri
Puse de dânsul! Acum şi-a deschis nepătrunsele-adâncuri
Cerul învins! De acuma vei şti ce putere roteşte
Lumile toate 'mprejur! Din scaunul său porunceşte
Soarele, toate să tindă spre el şi spre el să se 'ncline.
Nu lasă el să se mişte-ale stelelor care prin hăul
Fără de margini pe drumul cel drept, ci pe toate cu sine,
El rămânând la mijloc, mi le duce 'n rotiri hotărîtoare.
Ştim ş'abătuta cărare-a cometelor îngrozitoare,
Nici ne mai prinde mirarea acuma de stele cu coadă.
Ştim în sfârşit din ce pricină lun' argintie nu face
Paşii tot una de mari şi de ce, pân' acum nesupusă,

Frânele ei nu le dă astronomului; știm noi acuma
Nodurile de ce merg înapoi și de ce înainte
Merg afeliile; știm și cu câtă putere pribeaga
Cynthie 'mpinge noianu 'napoi, când truditele valuri
Algele varsă pe mal și când marea 'n adânc desgolește
Praguri temute de corăbieri, bătând în răstimpuri
Până departe la țărm. Tot ce-a chinuit altădată
Mintea 'nțelepților vechi și tot ce frământă zadarnic
Școlile noastre cu lărmuitoare desbateri, în față
Astăzi privim, căci știința lui NEWTON *împrăștie norii!*
Astăzi pe cei îndoiți rătăcirea cu negru 'ntuneric
Nu-i mai apasă, căci lor agerimea sublimului geniu
Chiar în locașele Zeilor datu-le-a voie să intre
Și să se urce 'n văzduh, pe 'nălțimile cerului nostru,
Sus, muritori! Pământeștile griji părăsiți-le-acuma!
Și să cunoașteți de-aice puterile minții divine,
Care-i așa departe de traiul sărmanelor turme!
Cel ce cu table de legi porunci să se 'nfrâne omorul
Și preacurvia și furtul și crima 'nșelării perfide,
Cel care-i puse pe oameni să'ncingă cu ziduri orașe,
Sau ferici mai întâi pe popoare cu-a' Cererei daruri,
Cel ce din struguri a stors alinarea durerilor noastre,
Ori ne-a 'nvățat să 'mbibăm, c'o pană de trestie 'n mână,
Sonuri pictate și vorbele noastre sub ochi să le punem,
Au ridicat mai puțin decât NEWTON *a omului soartă,*
Nenorocitei vieți aducând mângâieri prea puține.
Noi ins'acuma suntem primiți la o masă cu Zeii,
Cerul înalt îl ajungem cu mâna ș'acuma se vede
Tainița oarb'a pamântului, soarta cea nestrămutată,
Secolii lumii trecute ce-au stat pân' acu'n întunerec.
Deci preamăriți-l în versuri, cu mine, pe dascălul lumii,
Voi care-acum, bucuroși, vă hrăniți cu nectarul din ceruri,
Voi preamăriți-l pe NEWTON, *ce scrisul ascunselor taine*
L-a descuiat în sfârșit, pe NEWTON *cel drag și la Muze,*
Căruia-i stă'n ajutor, cu inima lui preacurată,
FEBUS APOLLO *și mintea-i însuflă cu toată puterea.*
Nici ce cuvine pe Zei să-i atingă vr'un om mai deaproape.

EDM. HALLEY

Traducere de TEODOR A. NAUM.

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 202)

§. 6. FUNCȚIUNI VECTORIALE LINEARE DE VECTORI.

In cercetarea fenomenelor se ivesc câteodată anumite funcțiuni vectoriale lineare de vectori, care se exprimă prin anumite simboluri denumiți tensori. In cele ce urmează, vom căuta sub o formă scurtă a reda câteva noțiuni fundamentale în cadrul funcțiunilor de mai sus.

Diada, afinorul și coafinorul.

Condiția necesară și suficientă a unei funcțiuni lineare și omogene se prezintă în forma

$$f(\lambda \bar{n}_1, \lambda \bar{n}_2) = \lambda f(\bar{n}_1, \bar{n}_2).$$

Forma generală a unei funcțiuni vectoriale lineare și omogene de vectorul n ia forma următoare:

$$f(\bar{n}) = \sum_{\lambda=1}^{S} \mathcal{A}_\lambda (\mathcal{B}_\lambda \bar{n}) \qquad (1)$$

deoarece o funcție de forma $A\bar{n}$ sau $[\mathcal{A}\bar{n}]$ se reduce la forma $\mathcal{A}(\mathcal{B}\bar{n})$.

Dacă punem:

$$\bar{n} = (\bar{n}\, i)\, i + (\bar{n}\, j)\, j + (\bar{n}\, k)\, k$$

se obține:

$$A\bar{n} = Ai(\bar{n}\, i) + Aj(\bar{n}\, j) + Ak(\bar{n}\, k)$$

în care apar termeni de forma:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\bar{n}) \text{ sau având } f(\bar{n}) = [\mathcal{A}\bar{n}]$$

vom pune $\mathcal{A} = [\mathcal{B}\mathcal{C}]$ deci

$$f(\bar{n}) = [[\mathcal{B}\mathcal{C}]\bar{n}] = -\mathcal{B}(\mathcal{C}\bar{n}) + \mathcal{C}(\mathcal{B}\bar{n})$$

ceace ne arată că și în cazul acesta $f(\bar{n})$ se exprimă în compoi nente de forma $\mathcal{A}(\mathcal{B}\bar{n})$.

In expresia (1) a funcțiunii vectoriale lineară de $\bar{n}$, se introduce un nou simbol și anume $\mathcal{A}_\lambda . \mathcal{B}_\lambda$ denumit diadă.

Ţinând seamă, că mărimea vectorială $\mathfrak{A}_\lambda (\mathfrak{B}_\lambda \bar{n})$ e cunoscută, când se dau vectorii unitari ai vectorilor $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ apoi produsul valorilor numerice ai acelor vectori precum şi vectorul $\bar{n}$, rezultă că diada $\mathfrak{A}_\lambda . \mathfrak{B}_\lambda$ va fi cunoscută când se vor cunoaşte vectorii unitari ai vectorilor $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ (4 scalare) precum şi produsul valorilor numerice ai lor (1 scalară); aşa dar în total va trebui să se cunoască cinci scalare.

Vectorii $\mathfrak{A}_\lambda$ şi $\mathfrak{B}_\lambda$ din diadă se numesc după MEMKE [1]) factorul de stânga şi de dreapta; iar după GIBBS factorul antecedent şi factorul precedent.

In cele ce urmează vom arăta, că suma de S — diade $\sum_1^S \mathfrak{A}_\lambda . \mathfrak{B}_\lambda$ care exprimă simbolic, caracterul funcţiunii vectoriale lineare, se poate întotdeauna reprezenta printr'o sumă numai de trei diade, după trei vectori necomplanari cari vor apare fie în stânga, fie în dreapta celor trei diade.

Fie $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ cei trei vectori unitari necomplanari.

Avem

$$\mathfrak{A}_\lambda = (\mathfrak{A}_\lambda m') \bar{m} + (\mathfrak{A}_\lambda n') \bar{n} + (\mathfrak{A}_\lambda p') \bar{p}$$

de unde rezultă

$$\sum_1^S \mathfrak{A}_\lambda . \mathfrak{B}_\lambda = \bar{m} . \sum_1^S (\mathfrak{A}_\lambda m') \mathfrak{B}_\lambda + \bar{n} . \sum_1^S (\mathfrak{A}_\lambda n') \mathfrak{B}_\lambda + \bar{p} . \sum_1^S (\mathfrak{A}_\lambda p') \mathfrak{B}_\lambda$$

sau punând

$$\mathfrak{B}_\lambda = (\mathfrak{B}_\lambda m') \bar{m} + (\mathfrak{B}_\lambda n') \bar{n} + (\mathfrak{B}_\lambda p') \bar{p}$$

obţinem

$$\Sigma \mathfrak{A}_\lambda . \mathfrak{B}_\lambda = \Sigma \mathfrak{A}_\lambda (\mathfrak{B}_\lambda m') . \bar{m} + \Sigma \mathfrak{A}_\lambda (\mathfrak{B}_\lambda n') . \bar{n} + \Sigma \mathfrak{A}_\lambda (\mathfrak{B}_\lambda p') . \bar{p}$$

de unde vedem că suma de S — diade se reprezintă printr'o sumă numai de trei diade după vectorii unitari necomplanari $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ în care aceştia apar fie ca factori de stânga fie ca factori de dreapta.

---

1) Vezi J. SPIELREIN, Vektorrechnuug, Zweite Auflage 1926, Verlag Wittwer, Stuttgart.

In general vom exprima suma celor S — diade în forma următoare:

$$\sum_{1}^{S} \mathcal{A}_\lambda . \mathfrak{B}_\lambda = \Phi = \mathcal{A} . a + \mathfrak{B} . b + \mathcal{C} . c \qquad (2)$$

în care simbolul Φ e denumit „Afinor".

Afinorul e complet, adică se exprimă în forma (2) când factorii de stânga cât şi cei din dreapta reprezintă vectori necomplanari.

In cazul când factorii de dreapta, sau cei de stânga sunt complanari sau paraleli, afinorul se reduce la o sumă de două diade sau apare sub o singură diadă.

Spre exemplu, având

$$\alpha\mathcal{A} + \beta\mathfrak{B} - \mathcal{C} = 0$$

obţinem $\Phi = \mathcal{A} . \{ a + \alpha c \} + \mathfrak{B} . \{ b + \beta c \}$

sau punând $\alpha\mathcal{A} = \beta\mathfrak{B} = \mathcal{C}$

vom obţine $\Phi = \mathcal{C} . \left\{ \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + c \right\} .$

O remarcă importantă.

Valorile numerice ale componentelor funcţiunii vectoriale lineare de $\bar{n} : \Phi \bar{n}$ reprezintă funcţiuni scalare lineare şi omogene de valorile numerice ale componentelor lui $\bar{n}$.

Fie

$$\bar{n} = (\bar{n}i)\, i + (\bar{n}j)\, j + (\bar{n}k)\, k$$

astfel că

$$(a\bar{n}) = (\bar{n}i)\,(ai) + (\bar{n}j)\,(aj) + (\bar{n}k)\,(ak)$$
$$(b\bar{n}) = (\bar{n}i)\,(bi) + (\bar{n}j)\,(bj) + (\bar{n}k)\,(bk)$$
$$(c\bar{n}) = (\bar{n}i)\,(ci) + (\bar{n}j)\,(cj) + (\bar{n}k)\,(ck)$$

ceea ce ne arată că valorile numerice ale componentelor vectorului

$$\Phi \bar{n} \{ A(a\bar{n}),\ B(b\bar{n}),\ C(c\bar{n}) \}$$

sunt funcţiuni scalare, lineare şi omogene de valorile numerice $(\bar{n}i)$, $(\bar{n}j)$ şi $(\bar{n}k)$ ale vectorului $\bar{n}$.

Dându-se afinorul în forma $\Phi = \mathcal{A} . a + \mathfrak{B} . b + \mathcal{C} . c$.

Simbolul $\Phi_c = a . \mathcal{A} + b . \mathfrak{B} + c . \mathcal{C}$ e denumit după HAMILTON afinorul conjugat al lui Φ.

Se obține $\Phi n = \bar{n}\Phi_c$.

Să considerăm următorul caz:

Vârful vectorului de rază r, se mișcă fie numai pe drepte paralele, sau numai pe planuri paralele.

In cazul aceasta avem $r = \lambda_1 \mathcal{A} + \mathcal{B}$, $r = \lambda_1 \mathcal{A} + \lambda_2 \mathcal{B} + \mathcal{C}$ în care scalarele $\lambda_1 \lambda_2$ reprezintă variabilele.

Se poate ușor constata că vârful vectorului Φr se va mișca pe drepte paralele cu vectorul $\Phi\mathcal{A}$ sau pe planuri paralele cu planul format de vectorii $\Phi\mathcal{A}$, $\Phi\mathcal{B}$.

De aici deducem că drepte și planuri paralele reprezentate prin vectorul de rază r se transformă cu ajutorul afinorului Φ, în alte drepte și planuri paralele, reprezentate prin vectorul Φr. Se obține ceeace se numește transformare afină a spațiului.

Ținând seamă de acest fapt F. JUNG a denumit simbolul Φ „Afinor".

Să trecem la definiția coafinorului.

Formând produsul vectorial al vectorilor Φm, Φn se constată că el reprezintă o funcție vectorială lineară de vectorul $[m\ n]$.

Adică $[\Phi m\ \Phi n] = c_0 \Phi\,[mn]$, în care simbolul $c_0 \Phi$ îl denumim coafinorul Φ.

Demonstrația e următoarea:

Fie $\Phi = \mathcal{A}.\mathfrak{a} + \mathcal{B}.\mathfrak{b} + \mathcal{C}.\mathfrak{c}$ și formând $[\Phi m\ \Phi n]$ obținem

$$[\Phi m\ \Phi n] = [\mathcal{A}\,\mathcal{B}]\ (\mathfrak{a}m)(\mathfrak{b}n) - (\mathfrak{a}n)(\mathfrak{b}m)\} +$$
$$+ [\mathcal{B}\,\mathcal{C}]\,\{(\mathfrak{b}m)\ (\mathfrak{c}n) - (\mathfrak{b}n)(\mathfrak{c}m)\} +$$
$$+ [\mathcal{C}\,\mathcal{A}]\,\{(\mathfrak{c}m)(\mathfrak{a}n) - (\mathfrak{c}n)(\mathfrak{a}m)\}.$$

Ținând seamă că

$$(\mathfrak{a}m)(\mathfrak{b}n) - (\mathfrak{a}n)\,\mathfrak{b}m) = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\,[mn] \text{ ș. a. m. d.}$$

rezultă

$$[\Phi m\ \Phi n] = (\{[\mathcal{A}\,\mathcal{B}].[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + [\mathcal{B}\,\mathcal{C}].[\mathfrak{b}\mathfrak{c}] + [\mathcal{C}\,\mathcal{A}].[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]\}\,[mn])$$

de unde deducem:

$$c_0 \Phi = [\mathcal{A}\,\mathcal{B}].[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + [\mathcal{B}\,\mathcal{C}].[\mathfrak{b}\mathfrak{c}] + [\mathcal{C}\,\mathcal{A}].[\mathfrak{c}\mathfrak{a}].$$

Din expresia de mai sus a coafinorului rezultă că coafinorul unei diade e nul.

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Școala Politechnică din Timișoara.

O TRANSFORMARE GEOMETRICĂ

Fiind dată în plan o curbă C şi un punct fix O, ne propunem să găsim o altă curbă Γ, conjugată celei dintâi, astfel că, într'un punct oarecare m pe C şi în corespondentul lui μ pe Γ, tangenta în m să fie paralelă razei vectoare Oμ iar tangenta în μ să fie paralelă razei vectoare Om.

Dacă însemnăm cu x, y coordonatele lui m, cu ξ, η acele ale lui μ şi cu y', η' derivatele lui y şi η în raport cu x respectiv ξ, formulele transformării sunt:

$$(1) \qquad \frac{\eta}{\xi} = y' \quad , \quad \eta' = \frac{y}{x} .$$

Punând ecuaţiile sub forma

$$\eta dx - \xi dy = 0 \quad , \quad x d\eta - y d\xi = 0,$$

adunându-le şi integrând obţinem succesiv

$$(2) \qquad d(x\eta - y\xi) = 0 \quad , \quad x\eta - y\xi = 2c.$$

Această ecuaţie (2) împreună cu prima ecuaţie (1) dau

$$(3) \qquad \xi = 2c \frac{1}{xy' - y} \quad , \quad \eta = 2c \frac{y'}{xy' - y} .$$

Unei curbe C îi corespunde deci, variind pe c, o infinitate de curbe conjugate Γ omotetice între ele, centrul de omotetie fiind 0.

Observând că $x dy - y dx$ e dublul ariei $d\sigma$ a triunghiului format de O, de m şi de punctul de pe C infinit vecin lui m, formulele (1) ale transformării se pot scrie

$$(4) \qquad \xi = c \frac{dx}{d\sigma} \quad , \quad \eta = c \frac{dy}{d\sigma} .$$

E evident că, dacă în locul curbei C punem o alta omotetică ei cu centrul de omotetie în O, obţinem aceleaşi curbe conjugate. O familie de curbe omotetice poate fi definită printr'o ecuaţie diferenţială omogenă de primul ordin

$$F\left(\frac{y}{x} , \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Familia conjugată e atunci dată de ecuaţia diferenţială

$$F\left(\frac{dy}{dx}, \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Dacă ne închipuim că un mobil descrie curba C după legea ariilor relativă la O, atunci, cum e evident, Γ e odograful curbei C. Rezultă că în mişcarea după legea ariilor, odograful odografului reproduce curba.

Mai observăm că formula (2) ne arată proprietatea că aria triunghiului $Om\mu$ rămâne necontenit constantă.

Ca aplicaţie să considerăm cazul când curba C este o conică; o reprezentăm prin ecuaţia

$$(5)\quad f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

unde z este considerat ca o constantă. Când z variază obţinem întreaga familie de conice omotetice, z reprezentând raportul de omotetie. Formulele (3) dau

$$\xi = \frac{2c}{xy' - y} = \frac{2c}{-x\frac{f'_x}{f'_y} - y} = -\frac{2cf'_y}{xf'_x + yf'_y} = \frac{2c}{z}\frac{f'_y}{f'_z}$$

$$\eta = \frac{2cy'}{xy' - y} = \frac{-2c\frac{f'_x}{f'_y}}{-x\frac{f'_x}{f'_y} - y} = \frac{2cf'_x}{xf'_x + yf'_y} = -\frac{2c}{z}\frac{f'_x}{f'_z}$$

sau punând $\frac{2c}{z} = \zeta$,

$$\xi = \zeta\frac{f'_y}{f'_z} = \frac{Bx + Cy + Ez}{Dx + Ey + Fz}\zeta$$

$$\eta = -\zeta\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{Ax + By + Dz}{Dx + Ey + Fz}\zeta.$$

Scriind aceste egalităţi sub forma

$$\frac{f_x}{-\eta} = \frac{f'_y}{\xi} = \frac{f'_z}{\zeta} = -2\lambda,$$

adăogând la acestea pe (2) scris astfel

$$-\eta x + \xi\eta + \zeta z = 0$$

şi eliminând dintre ele pe x, y, z şi λ avem

$$\begin{vmatrix} A & B & D & -\eta \\ B & C & E & \xi \\ D & E & F & \zeta \\ -\eta & \xi & \zeta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Notând cu a, b, c,... complimentele algebrice ale elementelor A, B, C,... din discriminantul formei (5), această ecuaţie a curbelor Γ se scrie

$$(6) \qquad c\xi^2 - 2b\xi\eta + a\eta^2 + 2e\xi\zeta - 2d\eta\zeta + f\zeta^2 = 0.$$

Curba are asimptotele şi tangentele prin O paralele respectiv tangentelor prin O şi asimptotelor curbei (5). Polarele originei în raport cu conicele (5), (6) sunt paralele dreptelor ce unesc originea cu centrele conicelor (6), (5).

Cazul particular când punctul O e centrul conicei (5) duce la proprietăţi cunoscute ale diametrilor conjugaţi. De asemenea e simplu cazul când conica (5) e o parabolă ce trece prin O.

A. MYLLER.

RAPORTUL COMISIUNII PENTRU PREMIUL DE ARITMETICĂ

Suntem în al cincilea an dela înfiinţarea acestui premiu.

De data aceasta, avem motive să fim mai mulţumiţi de activitatea în domeniul aritmeticei şi aceasta nu graţie vreunei îmbunătăţiri a programelor analitice de aritmetică din învăţământul secundar, ci faptului că între corespondenţii noştri liceani s'a găsit un mănunchiu a cărui activitate la aritmetică în volumul XLVII s'a dovedit mai rodnică. Din acest mănunchiu desprindem în linia întâi două nume, care în ordinea alfabetică sunt D-l P. P. DRĂGHICESCU (elev Liceul Militar, Iaşi) şi D-ra LYDIA M. TUDORAN (Şcoala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu“, Bucureşti). Dintre aceste nume vom propune în concluzie premiantul pentru volumul XLVII, în care s'au publicat 26 probleme rezolvate de matematică.

Printre rezolvitorii celor 26 probleme, facem următoarea clasificaţie:

D-ra LYDIA M. TUDORAN, singură rezolvitoare la problema 5350 a cărei soluţie a fost clasificată *impecabilă* în nota dela pag. 46. Problema 5604 este redijată în întregime după soluţia D-sale. Trebuie adăogat că această problemă, care nu a mai avut decât un singur rezolvitor, citat în nota dela fine, este una din acele probleme subtile care cer în mod egal, pătrundere, raţionament şi răbdare în examinarea diferitelor cazuri de analizat. De asemeni problema 5364 a fost în întregime redijată după soluţia D-rei LYDIA TUDORAN. Soluţiile D-sale, pe lângă fondul incontestabil, au fost prezentate şi sub o formă extrem de îngrijită, ceea ce a făcut ca redacţia să-i reproducă prin fotografiere în întregime soluţia pe care D-sa a trimis-o la problema 5569.

In fine, D-ra LYDIA TUDORAN a fost citată ca rezolvitoare la problema 5348 şi la problema 5544, la aceasta din urmă reuşind a da cel mai mare număr de soluţii.

In rândul al doilea, situăm pe D-l P. P. DRĂGHICESCU pentru soluţiile foarte bune la problemele 5452, 5134, 5557, 5409 şi soluţiile bune la problemele 5393 şi 5569.

In concluzie, propunem a se acorda premiul de aritmetică în valoare de 5.000 lei D-rei LYDIA TUDORAN.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE ARITMETICĂ

G-L GH. BUICLIU, I. IONESCU,
C-DOR I. LINTEŞ.

Acest raport a fost citit şi aprobat în Adunarea generală din 18 Februarie 1943.

NOTE MATEMATICE

34. *O soluţie a problemei 3041.* Enunţul cere să se arate că

$$[(n+1)^{(n-1)(n+2)} - n(n+1)^{n^2-2} - (n+1)^{n^2-3} - (n+1)^{n-1} + 1]$$
$$(n+1)^{n+1} - n(n^2+n+1)$$

este divizibilă prin n^6. In soluţia dată la pag. 267 din numărul

precedent s'au folosit rezultatele găsite în rezolvarea problemelor 474 şi 519 din Vol. VI al G. M. Pentru cine nu are la îndemână volumul citat, apărut acum 36 de ani, dau în cele ce urmează o soluţie directă şi independentă de soluţia vechilor probleme citate. Metoda pe care o dau se aplică de altfel atât acelor probleme cât şi altor probleme analoage.

Efectuând înmulţirile, expresia dată devine:

$$E = (n+1)^{n^2+2n+1} - n(n+1)^{n^2+n+1} - (n+1)^{n^2+n} - (n+1)^{2n+2} + (n+1)^{n+3} - n^3 - n^2 - n.$$

In efectuarea calculelor în E se observă că toţi termenii care conţin pe n la puterea a 6-a şi mai mare, sunt divizibili prin n^6. Apoi, termenii care conţin pe n^5 în factor au ca coeficienţi respectiv pe

$$C_{n^2+2n-1}^{n^2+2n-4} \; ; \; -C_{n^2+n+1}^{n^2+n-3} \; ; \; -C_{n^2+n}^{n^2+n-5} \; ; \; -C_{2n+2}^{2n-3} \; ; \; C_{n+3}^{n-2}$$

şi desvoltând aceşti simboli, se găseşte că fiecare conţine pe n în factor aşa că şi suma termenilor care conţin pe n^5 în factor se divide prin n^6. Rămâne de examinat suma restului termenilor E şi anume

$$(1) \quad R = S_4 n^4 + S_3 n^3 + S_2 n^2 + S_1 n + S_0 - n^3 - n^2 - n$$

unde

$$S_i = C_{n^2+2n+1}^{n^2+2n-(i-1)} - C_{n^2+n+1}^{n^2+n-(i-2)} - C_{n^2+n}^{n^2+n-i} - C_{2n+2}^{2n-(i-2)} + C_{n+3}^{n-(i-3)}.$$

Desvoltând simbolii combinărilor, făcând toate reducerile şi ordonând după puterile descrescătoare ale lui n găsim

$$n^4 S_4 = M_4 n^6 + n^5$$
$$n^3 S_3 = M_3 n^6 - 2n^5 + n^3$$
$$n^2 S_2 = M_2 n^6 + n^5 + n^2$$
$$n\, S_1 = n$$
$$S_0 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

unde M_i sunt coeficienţi întregi.

Adunăm aceste sume şi găsim

$$R = Mn^6 + n^3 + n^2 + n - n^3 - n^2 - n = \text{Mult. } n^6.$$

G-L GH. BUICLIU.

35. *Asupra unei neegalităţi de teoria numerelor.* Imi propun să caut în ce caz avem

$$\varphi[S(2^\alpha)] > S[\varphi(2^\alpha)]$$

unde $\varphi(I)$ înseamnă indicatorul lui I, iar S (I) suma divizorilor lui I. Dar observăm că:

$$S(2^\alpha) = \frac{2^{\alpha+1}-1}{2-1} \quad ; \quad S(2^{\alpha-1}) = \frac{2^\alpha - 1}{2-1}$$

$$\varphi(2^\alpha) = 2^{\alpha-1} \quad ; \quad \varphi(2^{\alpha+1}-1) \equiv \varphi(2^{\alpha+1}-1).$$

Neegalitatea devine:

$$\varphi(2^{\alpha+1}-1) > 2^\alpha - 1.$$

Sau

$$\varphi[2(2^\alpha - 1) + 1] > 2^\alpha - 1.$$

Vom examina însă cazul când avem:

$$\varphi(2N+1) > N.$$

Fie $a, b, c \ldots k, l$ factori primi ai numărului $(2N+1)$, atunci avem:

$$\varphi(2N+1) = (2N+1) \cdot \frac{(a-1)(b-1)\ldots(l-1)}{a \cdot b \ldots l} = (2N+1) \cdot P.$$

Prin urmare, neegalitatea devine:

$$(2P-1) \cdot N + P > 0.$$

Ceea ce se reduce în a cerceta când putem avea:

$$2P - 1 > 0$$

adică:

$$2(a-1)(b-1)\ldots(l-1) > a \cdot b \ldots l$$

Folosind relaţia:

$$\frac{a \cdot b \ldots k \cdot l}{(a-1)(b-1)\ldots(k-1)(l-1)} = 1 + \frac{1}{a-1} +$$

$$+ \frac{a}{(a-1)(b-1)} + \ldots + \frac{a \cdot b \ldots k}{(a-1)(b-1)\ldots(k-1)(l-1)}$$

din „*Théorie de Nombres*“ par E. LUCAS (pag. 156), avem:

$$a > 2 + \frac{a}{b-1} + \frac{ab}{(b-1)(c-1)} + \ldots + \frac{a \cdot b \ldots k}{(b-1)(c-1)\ldots(k-1)(l-1)}.$$

Ţinând apoi seamă că:

$$a < b < \ldots < k < l$$

urmează că va trebui să avem $a > 2$.

Dacă înlocuim $a = 3$ atunci constatăm lesne că trebuie să avem:

$$b > 4 + 3b\left[\frac{1}{c-1} + \ldots + \frac{c.d\ldots k}{(c-1)(d-1)\ldots(k-1)(l-1)}\right]$$

ceea ce înseamnă că $b > 4$.

In felul acesta se găsesc condiţiunile satisfacerii neegalităţii.

Revenind la cazul particular al problemei, vom spune că neegalitatea este satisfăcută dacă factorii primi ai lui $(2^{\alpha+1} - 1)$ satisfac condiţiunile de mai sus. Cercetând o serie de cazuri particulare, pentru $\alpha = 2, 3, \ldots 10$, constatăm că neegalitatea este satisfăcută.

COMANDOR I. LINTEŞ.

36. *Soluţia tehnică a cuadraturii cercului.* Pentru a transforma într'un patrat de aceeaşi arie cu el, un cerc de rază R, ne folosim de un cilindru circular drept material (d. ex. de lemn), a cărui rază să fie R, iar generatoarea, tot R (un asemenea obiect este, din punct de vedere tehnic, perfect realizabil). Pe unul din cercurile de bază ale acestui cilindru însemnăm un punct. Pe o hârtie, lipită pe o planşetă, tragem o dreaptă indefinită *xy*, pe care luăm un punct A. Culcăm cilindrul pe planşetă după o generatoare, astfel încât punctul însemnat să fie în A, iar *xy* să fie tangentă cercului. Dăm cilindrului o mişcare de rostogolire (mişcare admisă în cinematică), până când punctul însemnat cade în A', pe *xy*. Ridicăm pe *xy* perpendicularele $\overline{AB} = \overline{A'B'} = R$. Ducem una din axele de simetrie ale dreptunghiului AA'B'B şi în fine, transformând într'un patrat de aceeaşi arie, unul din cele două dreptunghiuri egale rezultate, realizăm astfel tehniceşte cuadratura cercului.

VIRGIL GHIŢESCU.

37. A*supra problemei 2394*[1]). O soluție care necesită mai puține încercări decât aceea din G. M. — XLVII — 417, se obține făcând diferența ecuațiilor problemei

$$(1) \qquad \overline{\alpha\beta\gamma}^2 = \overline{abcde} \qquad (2) \qquad \overline{\gamma\beta\alpha}^2 = \overline{edcba}$$

ceea ce ne conduce la ecuația

$$101\,[\alpha^2 - \gamma^2 - (a - e)] = 10\,[b - d - 2\beta\,(\alpha - \gamma)]$$

a cărei existență necesită evident să avem simultan

$$(3) \qquad \alpha^2 - \gamma^2 = a - e$$

$$(4) \qquad b - d = 2\beta\,(\alpha - \gamma).$$

Observând că existența relației (1) necesită ca cifra α să fie egală cu 1, 2 sau 3 și că același lucru se întâmplă cu cifra γ din (2); precum și că cifrele α și γ sunt diferite, deoarece dacă $\alpha = \gamma$, relațiile (1) și (2) se confundă, având 22 soluții banale de forma

$$\overline{mnm}^2 = \overline{pqrqp}$$

cu

$$m = 1,\ 2 \quad ; \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots 9$$

$$m = 3 \quad ; \quad n = 0,\ 1$$

conchidem că soluțiile problemei se găsesc printre numerele de forma

$$\overline{1\beta2} \quad ; \quad \overline{1\beta3} \quad ; \quad \overline{2\beta3}$$

împreună cu răsturnatele lor.

Acestea fiind, ecuațiile (1), (3) și (4) ne dau respectiv sistemele de ecuații

$$b + 2\beta = d \quad ; \quad b + 4\beta = d$$

$$40 + 202\beta + 10\beta^2 = 101b + 10c \quad ; \quad 60 + 202\beta + 10\beta^2 = 101b + 10c$$

$$b + 2\beta = d \quad ; \quad 120 + 404\beta + 10\beta^2 = 101b + 10c$$

---

1) A se vedea și nota D-lui M. GHERMĂNESCU, dela pag. 65 Vol. XLVIII

dintre care, este uşor de văzut, că numai primele două admit soluţii — în cadrul problemei — şi anume

$$\beta = 0 \ , \ 1, 2 \ ; \ 0, 1$$

$$c = 4 \ , \ 5, 8 \ ; \ 6, 7$$

$$d = 0 \ , \ 4, 8 \ ; \ 6, 0$$

astfel că avem numerele

$102^2 = 10404, 112^2 = 12544, 112^2 = 14884, 103^2 = 10609, 113^2 = 12769$

care împreună cu răsturnatele lor

$201^2 = 40401, 211^2 = 44521, 221^2 = 48841, 301^2 = 90601, 311^2 = 96721$

răspund cerinţelor problemei.

Exceptând cele 22 soluţii banale formate de numerele simetrice $\overline{mnm}$, problema admite şi soluţii formale, când α sau γ sunt egale cu zero. Obţinerea lor este imediată, căci dacă $\gamma = 0$, avem $d = e = 0$, iar relaţiile (3) şi (4) se scriu

$$\alpha^2 = a \ , \ b = 2\beta\alpha$$

rezultând imediat

$$\alpha = 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3$$

$$a = 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 9, 9$$

$$\beta = 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 0, 1$$

$$b = 0, 2, 4, 6, 8, 0, 4, 8, 0, 6$$

astfel că avem numerele

100, 110, 120, 130, 140, 200, 210, 220, 300, 310

care împreună cu răsturnatele lor

001, 011, 021, 031, 041, 002, 012, 022, 004, 013

constituiesc soluţiile formale.

G. G. CONSTANTINESCU.

38. *Asupra problemei 2246.* In această problemă se cere minimul represiei

$$E = \sin A + \sin B + \sin C$$

când

$$\sin A \sin B \sin C = k,$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu.

D-l Prof. T. POPOVICIU observând în Nota dela pag. 109, că soluţia dată acestei probleme, în volumul XXI, pag. 262, este greşită, recomandă reluarea ei.

Deoarece artificiul întrebuinţat de D-sa în rezolvarea problemei 2469 este specific acesteia, şi deci nu poate fi aplicat altora, voi întrebuinţa următoarea metodă, legată de teoria generală, sugerată de D-l Prof. M. GHERMĂNESCU.

Inainte de a trece la rezolvarea problemei 2246, observ că sinA, sinB, sinC, fiind toate pozitive, iar produsul lor constant, ar fi cazul să se aplice cunoscuta teoremă a minimului unei sume.

Prin urmare, nu aceasta este una din cauzele care au dus la soluţia greşită, dela locul amintit. Adevărata cauză, este aceea că, pe lângă produsul constant, cele trei variabile, mai sunt legate şi prin relaţia $A + B + C = \pi$, de care nu s'a ţinut seamă în rezolvarea incriminată.

Deoarece $A + B + C = \pi$, putem scrie

$$(1) \qquad F = \sin A + \sin B + \sin (A + B),$$

$$(2) \qquad \sin A \sin B \sin (A + B) = k.$$

Conform unei teoreme generale, funcţia E este minimă, odată cu

$$F = \sin A + \sin B + \sin (A + B) + \lambda [\sin A \sin B \sin (A + B) - k],$$

unde λ este un parametru ce urmează a fi determinat.

Anulând derivatele parţiale în raport cu A şi B, avem

$$F'_A = \cos A + \cos (A + B) + \\ + \lambda [\cos A \sin B \sin (A + B) + \sin A \sin B \cos (A + B)] = 0$$

$$F'_B = \cos B + \cos (A + B) + \\ + \lambda [\cos B \sin A \sin (A + B) + \sin A \sin B \cos (A + B)] = 0.$$

Efectuând oarecare transformări evidente, relațiile precedente devin

$$(3)\quad \cos\frac{B}{2}\cos\frac{2A+B}{2}\left[1+2\lambda\sin\frac{B}{2}\sin\frac{2A+B}{2}\right]=0,$$

$$(4)\quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{A+2B}{2}\left[1+2\lambda\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A+2B}{2}\right]=0.$$

Nu putem avea $\cos\frac{A}{2}=0$ sau $\cos\frac{B}{2}=0$, care duc la $A=\pi$ sau $B=\pi$, inadmisibil într'un triunghiu.

Dacă $\cos\frac{2A+B}{2}=0$, rezultă $2A+B=\pi$, adică $B=\pi-2A$, $A=C$.

Dacă avem și $\cos\frac{A+2B}{2}=0$, rezultă $B=C$, deci triunghiul ABC este echilateral. Cum $\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, relația (2) cere

$$k=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

și cum k are o valoare dată, în general diferită de precedenta, rezultă că E poate fi minimă pentru un triunghiu isoscel, pentru care (2) devine

$$\sin^2 A\sin 2A=k,$$

din care deducem unghiul A. Se vede că trebuie să avem $k<1$. Relația (4) se reduce la

$$1+2\lambda\sin\frac{A}{2}\sin\frac{3A}{2}=0,$$

din care deducem pe λ.

Dacă $\cos\frac{2A+B}{2}\neq 0$ şi $\cos\frac{2B+A}{2}\neq 0$, relaţiile (3) şi (4) se reduc la

$$1+2\lambda\sin\frac{B}{2}\sin\frac{2A+B}{2}=0,$$

$$1+2\lambda\sin\frac{A}{2}\sin\frac{2B+A}{2}=0.$$

Eliminarea lui λ între aceste relaţii conduce la

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{2A+B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{2B+A}{2}.$$

Transformând produsul de sinusuri în diferenţa de cosinusuri, această relaţie se reduce la

$$\cos A=\cos B,$$

deci $A=B$, fiind vorba de un triunghiu.

Triunghiul isoscel este deci acela care face minimă expresia E, cu excepţia cazului $k=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ când triunghiul este echilateral.

OTTO HOFER
Timişoara.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREŞTI

Facultatea de: Construcţii, Mecanică şi Electricitate, Mine şi Metalurgie

Examenul de admitere în anul I. Octomvrie 1942

Geometria analitică. In sistemul de axe dreptunghiulare Oxy, se dau punctele fixe $A(a, 0)$, $B(0, b)$ şi punctul mobil $M(0, \lambda)$. Fie P mijlocul segmentului AM. Dreapta BP taie axa Ox în punctul N. Se cere:

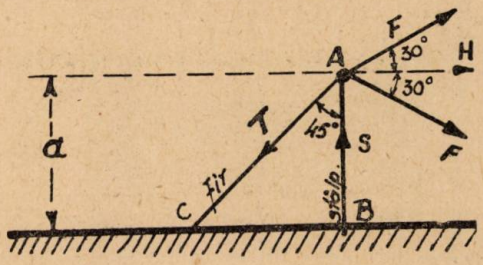
1. Locul geometric al punctului de intersecţie al dreptei OP cu paralela dusă din N la axa Oy.

2. Locul geometric al punctului de intersecţie dintre dreapta MN şi dreapta OP.

3. Ecuaţia cercului ce trece prin origină şi este tangent în punctul A la dreapta AM.

4. Fie C al doilea punct unde acest cerc taie axa Oy. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecţie al tangentei în origină la cercul precedent, cu paralela dusă din C la axa Ox.

Mecanica. I. De capătul A al unui stâlp vertical $\overline{AB}$ se trage cu două forţe egale F şi, pentru ca stâlpul să nu se îndoaie, se ancorează stâlpul cu firul (cablul) $\overline{AC}$. Stâlpul, firul şi forţele se găsesc intr'un acelaşi plan verti-



cal; forţele egale F fac cu orizontala un unghiu de 30°, iar firul face cu stâlpul un unghiu de 45°. Să se determine:

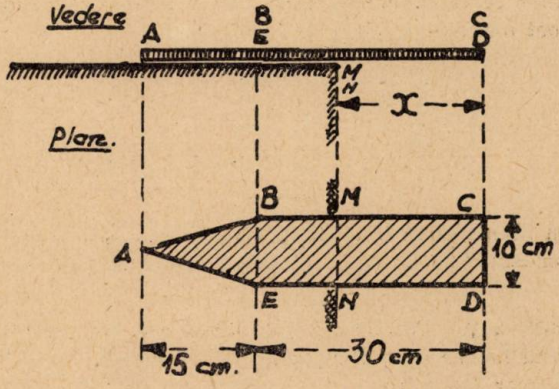
1. Rezultanta H a celor două forţe F în mărime şi direcţie.

2. Care sunt componentele lui H după direcţia stâlpului (S) şi după direcţia firului (T), în funcţie de F.

3. Care sunt momentele forţelor H şi T în raport cu punctul B, ştiind că $\overline{AB} = a$. Să se compare cele două momente (M_H şi M_T) şi să se explice rezultatele.

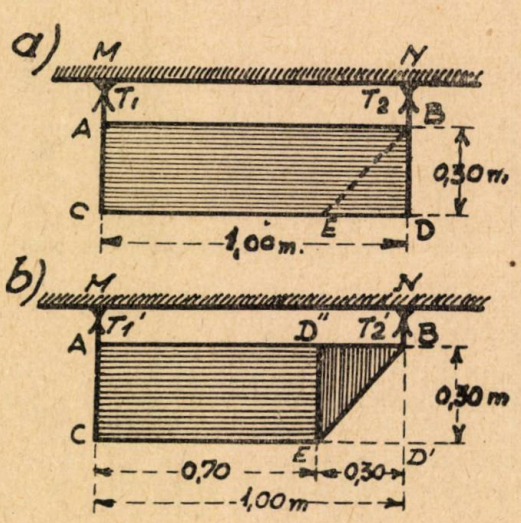
4. Dându-se F = 100 kg şi $a = 5$ m să se exprime şi numeric valorile pentru H, S, T, M_H şi M_T.

II. O placă metalică de forma ABCDEA este aşezată pe o masă orizontală, astfel că porţiunea ABMNEA reazimă pe masă, iar restul plăcii MNDCM stă liber, în consolă.



Să se determine lungimea maximă x cu care poate fi trasă placa de pe masă fără ca să se răstoarne în jurul muchiei $\overline{MN}$ a mesei. Grosimea plăcii se ia 1 cm, iar greutatea specifică p kg/metru patrat de placă.

III. Se dă o placă metalică ABCD, având dimensiunile $\overline{AB} = \overline{CD} = 1$ m şi $\overline{AC} = \overline{BD} = 0{,}30$ m. Placa are greutatea de 100 kg pe metrul patrat şi este suspendată într'un plan vertical cu firele $\overline{AM}$ şi $\overline{BN}$.



Să se determine:

1. In cazul primei figuri care sunt forţele T_1 şi T_2 ce se transmit din greutatea plăcii prin firele $\overline{AM}$ şi $\overline{BN}$.

2. Să se determine forţele T_1' şi T_2' ce iau naştere în aceleaşi fire, dacă se îndoaie colţul BDE al plăcii sub forma BD″E din figura ultimă.

Notă. 1. Toate trei problemele sunt obligatorii.

2. Calculul se va expune pe scurt, clar şi în ordinea cerută în enunţuri.

3. Se pot întrebuinţa tabele de logaritmi.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Vol. XXII, Nr. 12. D. POMPEIU: Despre determinanţi. CPT. C. V. COSTĂCHESCU: Câteva contribuţii la problema lansării.

TH. ANGHELUŢĂ. *Curs de Algebră Superioară.* Vol. I. Edit. Universităţii Cluj. (Tipografia Românească, Timişoara), 1943. 320 pag.

D-l Profesor TH. ANGHELUŢĂ dăruieşte Şcoalei Româneşti o carte de preţ, care va însemna o etapă în desvoltarea matematicei în România. D-sa publică *primul* Curs de Algebră Superioară, în româneşte, aşa că de acum înainte studenţii Universităţilor şi Politehnicelor noastre, elevii mai buni din

ultimele clase de liceu, precum şi orice cercetător întru ale Algebrei, vor putea culege în româneşte documentarea fundamentală a acestei discipline, fără să mai fie tributari exclusiv literaturii matematice străine.

De altfel D-l ANGHELUŢĂ urmăreşte de zeci de ani crearea unei literaturi matematice româneşti de Cursuri de Matematici Superioare. In 1937 a publicat, la Cluj, acea excelentă *Culegere de Probleme şi Exerciţii de Analiză Matematică, Mecanică şi Teoria Funcţiunilor.* Aceasta e *unica* culegere de probleme de matematici superioare pe care o avem în româneşte până azi. In 1940, în ajunul evacuării Clujului nostru scump, a publicat o *Teorie a Funcţiunilor Analitice*, a doua în româneşte după aceea a Profesorului D. EMMANUEL. Iar acum, în 1943, în refugiu în Timişoara, ne dă primul volum din *Cursul de Algebră Superioară*, pe care urmează să-l completeze cu un al doilea volum consacrat mai ales teoriei Ecuaţiilor Algebrice.

Este demn de însemnat că, cu toate timpurile extrem de grele pe care le trăim de trei ani, autorul şi-a închinat toată viaţa realizării proiectului de a ne da un curs bun, izvor de studiu şi meditaţii pentru multe generaţii de viitori matematicieni, dar şi pildă de dragoste de ţară şi de muncă neobosită pentru ridicarea ei prin cultură. Fiecare pagină e scrisă cu sentimente împărţite de iubire pentru Ţară şi Neam, de devotament pentru Ştiinţă, de speranţă într'un viitor bun şi durabil a României Mari, de amărăciune pentru loviturile soartei. Chiar în prefaţa cărţii se oglindesc aceste simţiminte:

„Imi amintesc, cu sentimente împărţite între amară mâhnire şi puternică speranţă, anii când, la Cluj, dam forma definitivă a cursului de Algebră Superioară. Acolo, asistentul meu D-l N. GHIRCOIAŞIU, licenţiat în matematici şi fost elev al meu, mi-a uşurat de multe ori sarcina. Acum, de aproape doi ani, el se află pe frontul dela răsărit. Gândul meu îl întovărăşeşte cu nemărginită simpatie..." „...am renunţat la orice drept de autor, pentru ca preţul unui exemplar să fie cât mai redus pentru studenţi".

Şi din acest punct de vedere cartea D-lui ANGHELUŢĂ va fi un document, mângâietor, al zilelor de azi.

Volumul I tipărit acum conţine 11 capitole aşezate într'o ordine nouă de autor, mai potrivită învăţământului, aşa cum i-a dovedit-o un sfert de veac de experienţă profesorală universitară. Pe lângă materialul clasic, se găsesc numeroase indicaţii asupra problemelor la ordinea zilei acum şi asupra căilor în care se pot desvolta cercetări noi.

După un capitol asupra Polinoamelor şi Fracţiilor Raţionale (cu descompunerea în fracţii simple) urmează Teoria Combinărilor (şi cu combinările cu repetiţie), polinoamele de mai multe variabile şi noţiuni asupra teoriei diferenţelor. Capitolul III expune Teoria Determinanţilor, urmat (Cap. IV, V şi VI) de Teoria Sistemelor de ecuaţii lineare, a Formelor Lineare şi a Formelor Patratice. Numai după aceasta vine (Cap. VII) expunerea pe larg a Teoriei Numerelor Iraţionale, folosind noţiunea de tăietură şi dând pe larg definiţiile şi metodele de operaţii cu numerele iraţionale. In general, acest capitol e greu de expus în orice curs de Algebră, şi autorul a izbutit să-l facă uşor de înţeles. Capitolul VIII cuprinde Teoria Numerelor Complexe, cu reprezentarea

grafică şi cu aplicaţii la rezolvarea ecuaţiilor binome. In Cap. IX se rezolvă ecuaţiile de gradul III şi IV.

Ultimele două capitole sunt închinate studiului limitelor, seriilor şi fracţiilor continue, care lipsesc în foarte multe cursuri similare. După câteva noţiuni elementare de Teoria Mulţimilor, urmează studiul şirurilor, al convergenţei lor şi a Limitelor. Apoi Seriile cu termenî reali şi complecşi, Seriile întregi, Seriile duble şi Produsele infinite. In capitolul despre Fracţii continue se dau definiţiile fundamentale, proprietăţile reduselor, reprezentarea numerelor iraţionale prin fracţii continue şi fracţiile continue periodice.

Peste 350 de exerciţii (cu soluţiile lor) completează expunerile teoretice şi dau aspecte ale preocupărilor matematice în acest domeniu din ultimii ani. Culegerea, expunerea şi redactarea acestor exerciţii reprezintă o muncă foarte mare. Ele sunt însă de un folos imens celui ce vrea să se iniţieze în metodele algebrice. De asemeni, cartea conţine numeroase indicaţii cu caracter istoric.

Volumul se încheie cu o bibliografie de peste o sută cincizeci de titluri de lucrări relative la materia din volum. D-l TH. ANGHELUŢĂ a dat o specială atenţie autorilor *români*, spre a provoca şi alte lucrări româneşti şi spre a promova astfel Şcoala Matematică Românească. Sunt citaţi 23 de autori români, în această bibliografie.

Cartea este excelent prezentată ca tipar de către Tipografia Românească din Timişoara. Singurul păcat e că lipsa de hârtie din zilele de azi a făcut ca volumul să apară pe o hârtie mai puţin bună decât tipăriturile anterioare ale Universităţii Clujene. Tot lipsa de hârtie face ca tirajul volumului să fie redus la 500 de exemplare, ceeace e un păcat, căci ediţia se va epuiza repede, după cum *Culegerea de Probleme* a D-lui ANGHELUŢĂ, tipărite în 1000 de exemplare, s'a epuizat în şase ani.

Recomandăm călduros cetirea şi studierea *Cursului de Algebră Superioară* a D-lui TH. ANGHELUŢĂ acelor care vor să facă cercetări temeinice de algebră, iar autorului îi dorim să publice cât mai repede, în ciuda tuturor greutăţilor, Volumul al doilea şi ultimul din acest excelent curs.

PETRE SERGESCU.

V. CRISTESCU. *Culegere de probleme de Trigonometrie.* Partea III. *Trigonometrie sferică*, revăzută şi adăogită de Generalul GH. I. LITEANU, cu o prefaţă de ION IONESCU, Bucureşti 1943.

DIVERSE

a) Şedinţe

Adunarea generală din ziua de 18 Februarie 1943, a ales ca membri ai societăţii „*Gazeta Matematică*" pe D-şoara GEORGETA G. ROMAŞCAN, Ing. constructor, licenţiată în matematici şi pe D-nii MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU, Ing. constructor, diplomat al Politechnicei din Bucureşti; VASILE MEHEDINCU, licenţiat în matematici, profesor; IONEL STAMATE, licenţiat în matematici, profesor; ALEXANDRU D. STOICA, Ing. diplomat al Politechnicei din Bucureşti.

b) **Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"**

BOGDAN IONESCU. Geometrie elementară pentru clasa III secundară. Bucureşti 1901.

C. ALASIA. Manual pentru întrebuinţarea şcolarilor. Bucureşti 1843.

C. ALASIA. Svoluppo in serie d'un numero intero. Anno XI. Decemvrie 1910. No. 132. Pavia.

C. ALASIA. Rassegna matematica. Anul VIII. Nr. 88. Pavia.

DANIEL AUGUSTO DA SILVA. La Teoria delle Congruence binome. Coimbra 1909.

Idem. Espositione de una Teoria dei radicali modulari. Coimbra 1914. Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

Comemorarea lui NEWTON. Cu ocaziunea împlinirei a 300 ani dela naşterea lui NEWTON toţi profesorii de matematici şi de fizică dela Facultatea de Ştiinţe din Timişoara au hotărît să facă memoriei lui NEWTON o comemorare, în cadru societăţi matematice române din Cluj, demnă de marele geniu al acestui matematician.

V. MARIAN.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3075. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0.$$

M. SARIAN.

Desvoltăm:

$$\begin{aligned}(u+v)^5 &\equiv u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5 \\ &\equiv u^5 + v^5 + 5uv(u^3 + v^3) + 10u^2v^2(u+v) \\ &\equiv u^5 + v^5 + 5uv[(u+v)^3 - 3uv(u+v)] + 10u^2v^2(u+v) \\ &\equiv u^5 + v^5 + 5uv(u+v)^3 - 5u^2v^2(u+v).\end{aligned}$$

Notăm:

(1) $$u + v = x$$

şi

(2) $$u^5 + v^5 = -q \quad ; \quad uv = -p$$

şi obţinem:

(3) $$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0$$

ecuaţia din enunţul problemei.

Observăm că u^5 şi v^5 se pot determina uşor din sistemul (2) şi sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$z^2 + qz - p^5 = 0$$

adică:

$$u^5 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^5}}{2} \quad \text{şi} \quad v^5 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^5}}{2}$$

şi găsim câte 5 următoarele rădăcini pentru u şi v:

$$u_1 = \sqrt[5]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^5}}{2}}; \quad u_2 = u_1\alpha \; ; \quad u_3 = u_1\alpha^2;$$

$$u_4 = u_1\alpha^3 \; ; \quad u_5 = u_1\alpha^4$$

$$v_1 = \sqrt[5]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^5}}{2}}; \quad v_2 = v_1\alpha \; ; \quad v_3 = v_1\alpha^2;$$

$$v_4 = v_1\alpha^3 \; ; \quad v_5 = v_1\alpha^4$$

unde α, α^2, α^3, α^4 sunt rădăcini complexe ale ecuaţiei binome:

$$\alpha^5 - 1 = 0.$$

Rădăcinile ecuaţiei (3) sunt deci:

$$x_1 = \sqrt[5]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^5}}{2}} + \sqrt[5]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^5}}{2}}$$

$$x_2 = u_1\alpha + v_1\alpha^4 \; ; \quad x_3 = u_1\alpha^2 + v_1\alpha^3 \; ; \quad x_4 = u_1\alpha^3 + v_1\alpha^2;$$

$$x_5 = u_1\alpha^4 + v_1\alpha.$$

S'au ales valorile u şi v astfel ca produsul uv să fie, în concordanţă cu sistemul (2), real, presupunând că ecuaţia dată are coeficienţi reali.

Observaţii. 1°. Pentru discuţia asupra naturii rădăcinilor vom folosi concluziile problemei Nr. 24 dela cap. XXV din *Culegerea de probleme de Algebră*, partea II (A. G. IOACHIMESCU):

$p = 0$, o singură rădăcină reală

$p > 0$, o singură rădăcină reală

$p > 0$ şi $q^2 + 4p^5 > 0$, o singură rădăcină reală

$p > 0$ şi $q^2 + 4p^5 < 0$, 5 rădăcini reale

$p < 0$ şi $q^2 + 4p^5 = 0$, 5 rădăcini reale (doua fiind duble).

2°. In acelaşi fel se pot rezolva ecuaţiile:

$$x^3 + px + q = 0 \quad , \quad x^7 + 7px^5 + 14p^2x^3 + 7p^3x + q = 0, \text{ etc.}$$

S'au primit soluţii bune dela D-nii: C. BERDAN (XL), C. C. POPESCU (XXXI) şi N. POPESCU (XXX). Parantezele indică volumul G. M. în timpul cărora s'au primit soluţiile.

PROBLEMA 3291. *In ce caz numerele* abc, bca, cab *pot forma o progresie aritmetică? Problemă analoagă, pentru progresii geometrice şi armonice.*

E. ŞTEFĂNESCU.

I. *Progresii aritmetice.* Cazul acesta formează obiectul problemei 814, rezolvată la pag. 69, Vol. IX, *Gazeta Matematică*, unde s'au găsit următoarele 6 progresii, dintre care 3 crescătoare şi 3 descrescătoare:

$$\div 037.370.703 \; ; \quad \div 148.481.841 \; ; \quad \div 259.592.925$$

$$\div 740.407.074 \; ; \quad 851.518.185 \; ; \quad \div 952.529.296$$

plus cele 9 progresii cu raţia 1 în care toţi termenii sunt de forma *aaa*.

II. *Progresii geometrice.* Fie

$$\div\div abc : bca : cab$$

progresia căutată. Trebuie să avem

$$(1) \qquad abc \times cab = bca^2.$$

Celelalte 2 egalităţi care se obţin prin permutarea numerelor conducând la acelaşi rezultat din cauza simetrii literelor, vom examina numai cazul (1) dând pe rând lui a valorile $0, 1, 2, \ldots 8, 9$.

Pentru $a = 0$, (1) devine

$$(2) \qquad 0bc \times c0b = bc0^2$$

deci produsul $b \times c$ trebuie să se termine cu 0. Pentru aceasta

b	0	5	0, 2, 4, 8	b
c	c	0, 2, 4, 8	5	0

.

Inlocuind pe rând aceste grupe de valori în (2) găsim soluţiile cu raţia 10:

$$\div\, 00c : 0c0 : c00,$$

c fiind o cifră oarecare.

Procedăm la fel pentru celelalte valori ale lui a, din care considerăm aici pe $a = 4$; care dă

$$(3) \qquad 4bc \times c4b = bc4^2.$$

Se vede că produsul $b \times c$ trebuie să se termine cu 6, deci

b	1	2	2	3	4	4	6	6	7	8	8	9
c	6	3	8	2	4	9	1	6	8	2	7	4

Se introduc pe rând aceste grupe de valori în (3) şi se fac calculele. Dacă rezultă egalitate avem soluţii, în caz contrar nu. Este de observat că nu e nevoie să se facă toate verificările. De exemplu pentru cazuri ca

$$(4) \qquad 428 \times 842 = 284^2 \quad , \quad \text{sau} \quad 487 \times 748 = 874^2$$

nu se mai face nicio verificare, căci cei doi factori din membrul I sunt sau ambii mai mari sau ambii mai mici decât cei doi factori din membrul II, deci egalităţile (4) nu sunt adevărate.

Procedând astfel pentru toate valorile lui a se găseşte că problema are următoarele 2 soluţii

$$\div\, 243 : 324 : 432 \quad \text{cu raţia } \frac{3}{4}$$

$$\div\, 864 : 648 : 486 \quad \text{cu raţia } \frac{4}{3}$$

precum şi 9 progresii de forma

$$\div\, 00a : 0a0 : a00 \quad \text{cu raţia } 10$$

unde a ia valorile 1, 2,... 8, 9.

III. *Progresii armonice.* Trebuie să avem relaţia.

$$(1) \qquad \frac{2}{abc} = \frac{1}{bca} + \frac{1}{cab}$$

care, după efectuarea calculelor şi scrierea desvoltată a numerelor de 3 cifre devine:

$$(2) \qquad 697bc + 70c^2 = 40a^2 + 30b^2 + 304ab + 393ac$$

şi problema revine la a rezolva în numere întregi pozitive ecuaţia (2) atunci când a, b, c sunt cifre.

Pentru aceasta observăm din (2) că

$$E = 697 \times b \times c - 304 \times a \times b - 393 \times a \times c$$

sau ceea ce este tot una:

$$F = 7 \times b \times c - 4 \times a \times b - 3 \times a \times c$$

trebuie să se termine cu zero.

Vom da pe rând lui a valorile $0, 1, \ldots, 9$ şi vom căuta valorile lui b şi c, din condiţia impusă lui F.

Ne limităm la câteva exemple, pentru a arăta unele simplificări care se ivesc în cursul acestor încercări.

Mai întâi dacă $a = 0$ atunci b sau c este zero, fie $b = 0$.

Relaţia (1) devine

$$\frac{2}{00c} = \frac{1}{0c0} + \frac{1}{c00} = \frac{cc0}{c0 \times c00} = \frac{11}{10 \times 10}$$

$$\therefore \quad 200 = cc$$

care este imposibilă căci membrul II este maximum 99.

La fel, dacă $c = 0$ se ajunge la

$$\frac{2}{0b0} = \frac{1}{b00} + \frac{1}{00b}$$

$$\therefore \quad 20 = 101 \times b$$

care este o imposibilitate în numere întregi.

Fie $a = 5$; F devine

$$F = 7 \times b \times c - 20 \times b - 15 \times c$$

deci trebuie ca

$$F_1 = 7 \times b \times c - 5 \times c$$

să se termine cu 5. Se vede că dacă c este pereche F_1 se termină cu zero când $b = 5$. Dacă c este nepereche F_1 se termină cu zero tot când $b = 5$. Făcând în (2) pe a şi b egali cu 5 se ajunge la

$$152 \times c + 7 \times c^2 = 935 \quad \therefore \quad c = 5 \quad \text{sau} \quad 9.$$

Inlocuind în (1) avem succesiv

$$\frac{2}{559} = \frac{1}{595} + \frac{1}{955} = \frac{1550}{595 \times 955}$$

care nu este posibilă.

Rămâne numai $a = b = c = 5$ care este o soluţie evidentă.

Luăm $a = 9$. Trebuie ca

$$F_2 = 7 \times b \times c - 6 \times b - 7 \times c$$

să se termine cu zero. Dăm lui b în F_2 pe rând toate valorile 0, 1,..., 8, 9.

Fie de exemplu $b = 3$, de unde

$$F_2 = 21 \times c - 18 - 7 \times c = 14 \times c - 18.$$

De unde se deduce

$$c = 2 \quad \text{sau} \quad c = 7.$$

Cu aceste valori (1) devine

$$\frac{2}{932} = \frac{1}{329} + \frac{1}{293} \quad \text{şi} \quad \frac{2}{937} = \frac{1}{379} + \frac{1}{793}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{466} = \frac{622}{329 \times 293} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{937} = \frac{586}{379 \times 793}$$

ambele egalităţi imposibile căci produsul mezilor este pereche iar acel al extremilor este nepereche.

Examinând pe căi analoage toate valorile lui a şi valorile corespunzătoare ale lui b şi c se găseşte că în cazul progresiilor armonice nu avem nicio soluţie înafară de cazul banal

$$a = b = c \neq 0.$$

Notă. 1°. Au dat soluţii parţiale pentru cazurile I şi II, fără a arăta riguros că problema nu are soluţii în cazul III, D-nii: C. St. Felix, E. Massler, C. C. Popovici şi I. Th. Popovici.

2°. D-l H. P. Ionescu a dat numai soluţii parţiale la cazul I.

3°. Pentru cazul III am dat soluţia obişnuită a încercărilor succesive. Problema se poate însă rezolva şi pe o cale generală, după cum arăt în cele ce urmează.

Relaţia (1) de la III este un caz particular al rezolvării în numere întregi a ecuaţiei generale

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Am arătat în *Gazeta Matematică*, Vol. XXIX, pag. 427, că soluţiile întregi ale acestei ecuaţii sunt

$$z = 2\rho m\alpha\beta \quad , \quad x = \rho m\alpha(\alpha+\beta) \quad , \quad y = \rho m\beta(\alpha+\beta)$$

unde α şi β sunt numere întregi *prime între ele*, m este un întreg oarecare iar ρ un modul egal cu 1 sau $\frac{1}{2}$, după cum α şi β sunt de paritate diferită sau de aceeaşi paritate.

Ţinând seamă de aceste rezultate, soluţiile întregi ale ecuaţiei (1) de la cazul III vor fi date de sistemul

$$abc = 100a + 10b + c = 2\rho m\alpha\beta$$
$$bca = a + 100b + 10c = \rho m\alpha(\alpha+\beta)$$
$$cab = 10a + b + 100c = \rho m\beta(\alpha+\beta)$$

Rezolvind acest sistem în a, b, c prin metodele algebrice găsim

$$a = \rho\frac{m\alpha(19\beta-\alpha)}{999} \quad ; \quad b = \rho\frac{m(\alpha+\beta)(10\alpha-\beta)}{999} \quad ; \quad c = \rho\frac{2m\beta(5\beta+4\alpha)}{999}.$$

Acum problema revine la a determina pe m, α, β aşa încât a, b, c să fie numere pozitive mai mici ca 10.

Fie $\rho = 1$ şi $m = dp$, d fiind unul din divizorii lui

$$999 = 3^3 \times 37 = d \,.\, \mathrm{D}.$$

Ducând aceste valori în a se vede că D trebuie să devină produsul $\alpha(19\beta-\alpha)$. Dar D este prim cu α, căci dacă ar avea un divizor comun α', acesta ar trebui să dividă şi unul din factorii $(\alpha+\beta)\,(10\alpha-\beta)$ dela numărătorul lui b sau $\beta(5\beta+4\alpha)$ dela numărătorul lui c şi în acest caz ar trebui să dividă pe β ceea ce nu se poate căci α şi β sunt primi între ei. La fel se arată că D este prim cu β. Deci trebuie să avem

$$19\beta - \alpha = q\mathrm{D} \quad \therefore \quad \alpha = 19\beta - q\mathrm{D}.$$

Ducând valorile lui m şi α în c găsim

$$c = \frac{2pd\beta(81\beta-4q\mathrm{D})}{d\mathrm{D}} = \frac{2p\beta(81\beta-4q\mathrm{D})}{\mathrm{D}}.$$

D fiind prim cu p, q şi β divide neapărat pe 81, deci, faţă de divizorii lui 999, nu putem avea decât

$$\mathrm{D} = 1, 3, 9 \quad \text{sau} \quad 27.$$

Pentru D = 1 găsim

$$m = 999 \times p \quad , \quad \alpha = 19\beta - q \quad \text{şi} \quad a = pq(19\beta - q).$$

Cum $a \leqslant 9$ trebuie ca

$$19\beta - q \leqslant 9 \quad \therefore \quad 19\beta - 9 \leqslant q.$$

Cea mai mică valoare a lui β este 1, căci pentru $\beta = 0$ am avea $abc = 0$ şi problema nu are sens. Dar dacă $\beta = 1$, atunci $q \geqslant 10$ şi cum q intră ca factor în valoarea lui a, ar însemna că $a \geqslant 10$, ceea ce nu se poate. Deci pentru D = 1 nu avem soluţii.

Se examinează la fel celelalte valori ale lui D şi apoi analog cazul $p = \frac{1}{2}$ şi se găseşte că problema nu are soluţie decât atunci când

$$a = b = c \neq 0.$$

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 3635. *Se dă triunghiul* ABC *dreptunghic în* A. *Fie* AH *înălţimea dusă din* A *pe* BC. *Prin* A *se duce paralela* AE *la* BC. *Isogonala dreptei* AE *faţă de unghiul* BAC, *taie paralela dusă prin* C *la* AH *în* D. *Dreapta* BD *taie pe* AH *în* I. *In* I *se ridică o perpendiculară pe* BD, *care taie pe* AE *în* F *iar pe* BC *în* G. *Să se arate că*

$$\overline{IF} = \overline{IG} \quad \text{şi} \quad \overline{AF} = \overline{GH} = \frac{\overline{CH}}{4}.$$

Presupunând că triunghiul dreptunghic ABC *are vârful* A *fix, ipotenuza* BC *deplasându-se paralel cu ea însăşi iar punctul* C *menţinându-se pe dreapta* BC, *să se găsească locul geometric al punctului* B.

M. NICOLAU.

Soluţie, dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU (Şc. ofiţeri de geniu) şi OCT. E. GHEORGHIU (Bucureşti).

Luăm sistemul de axe cu origina în A şi cu dreapta AH ca axă de x. Fie C (λ, a) şi deci

(CD) $y - a = 0$; (AC) $ax - \lambda y = 0$; (BC) $x - \lambda = 0$; (AB) $\lambda x + ay = 0$.

Din aceste ecuaţii şi din condiţiile enunţului se scoate uşor

$$B\left(\lambda, -\frac{\lambda^2}{a}\right); \text{ (AD) } y(a^2 - \lambda^2) + 2a\lambda x = 0; D\left(\frac{\lambda^2 - a^2}{2\lambda}, a\right)$$

de unde se deduce

$$\text{(BD) } ay + 2\lambda x - \lambda^2 = 0; I\left(\frac{\lambda}{2}, 0\right); F\left(0, -\frac{a}{4}\right); G\left(\lambda, \frac{a}{4}\right).$$

Comparând coordonatele punctelor F, I, G şi C rezultă

$$\overline{IF} = \overline{IG} \quad \text{şi} \quad \overline{AF} = \overline{GH} = \frac{\overline{CH}}{4}$$

ceea ce demonstrează prima parte a problemei.

Pentru aflarea locului lui B eliminăm pe λ între ecuaţiile

$$x = \lambda \quad , \quad y = -\frac{\lambda^2}{a}$$

care dau coordonatele lui B şi găsim parabola

$$x^2 + ay = 0$$

cu focarul $F\left(0, -\frac{a}{4}\right)$ şi directoarea

$$4y + a = 0$$

care trece prin G.

Acest loc rezultă imediat şi din consideraţii geometrice observând că BD fiind mediatoarea segmentului GF, avem

$$\overline{BF} = \overline{BG}$$

şi cum F este fix, GH constant iar G mobil pe o dreaptă paralelă la AH, locul lui B este parabola cu focarul F şi cu directoarea, paralela din G la AH.

Notă. 1°. Problema se poate demonstra elementar pe cale geometrică. Fie C' intersecţia lui CD cu AB. Avem pe figură

$$\sphericalangle DAC' = \sphericalangle EAC = \sphericalangle ACB$$

primele două ca unghiuri de izogonale iar ultimele două ca alterne interne. Rezultă

$$(1) \qquad \sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$$

ca suplimente de unghiuri egale şi

$$(2) \qquad \sphericalangle AC'C = \sphericalangle ACB = \sphericalangle C'AD$$

primele două fiind egale din proprietăţile triunghiului dreptunghic C'CB, de înălţime CA.

Egalitatea (1) arată că DA este tangentă cercului O, circumscris triunghiului ABC, iar (2) arată că D este mijlocul lui CC'. Deoarece AH || CC' prin construcţie, urmează că I este mijlocul lui AH şi cum AE şi BC sunt paralele:

$$(3) \qquad \overline{IA} = \overline{IH} \quad ; \quad \overline{IF} = \overline{IG} \quad ; \quad \overline{AF} = \overline{GH}.$$

Din triunghiurile dreptunghice BIG şi BAC, ale căror înălţimi sunt

$$\overline{IH} = \frac{AH}{2} \quad \text{şi} \quad AH$$

se scoate

$$\overline{IH}^2 = \frac{\overline{AH}^2}{4} = \overline{GH} \times \overline{HB} \quad \text{şi} \quad \overline{AH}^2 = \overline{CH} \times \overline{HB}.$$

Din aceste egalităţi şi (3) se deduce

$$\overline{AF} = \overline{GH} = \frac{\overline{CH}}{4}$$

care sunt relaţiile de demonstrat în prima parte a problemei. Partea a doua ca în partea finală a soluţiei analitice.

2°. Am arătat la 1° că D este intersecţia tangentelor în C şi A la cercul ABC. Deci BD este o simediană a triunghiului ABC; dar şi AH este simediană a aceluiaşi triunghiu căci trece prin intersecţia dela infinit a tangentelor în B şi C la cercul O. Urmează că I este centrul simedian sau punctul lui LEMOINE al triunghiului ABC şi se ştie că *într'un triunghiu dreptunghic în* A *punctul lui* LEMOINE *este la mijlocul înălţimii* AH. Restul urmează ca la 1°.

3°. D-l O. E. GHEORGHIU, pe lângă soluţia analitică publicată în numărul de faţă, ne-a trimis şi o soluţie geometrică bazată pe alte consideraţii decât cele de la 1° şi 2° precedent. Soluţia d-sale are însă unele lipsuri de rigoare şi se sprijină pe unele proprietăţi nedovedite. De aceea o menţionăm fără a o publica.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 3720. *Se cere locul geometric al centrului de greutate al unui sector circular* AOB, *de rază constantă* R, *când raza* OA *este fixă iar unghiul* AOB *variază dela* O *la* 360°.

E. A.

Notând cu 2θ unghiul variabil AOB, centrul de greutate G al sectorului circular AOB se găseşte pe bisectoarea unghiului AOB la distanţa:

$$OG = \rho = \frac{2}{3} R \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Această relaţie reprezintă în coordonate polare *ecuaţia locului geometric al centrului de greutate* G.

Când unghiul la centru variază între O şi 2π, θ variază între O şi π.

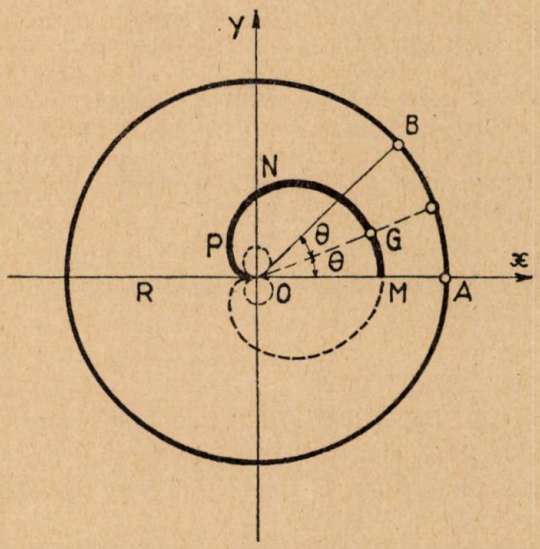
Intre aceste limite:

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{2}{3} R \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\theta^2} < 0$$

deci ρ descreşte continuu dela valoarea maximă $\rho_1 = \frac{2}{3} R$ pentru $\theta_1 = 0$ la $\rho_2 = 0$ pentru $\theta_2 = \pi$, ceea ce era evident din punct de vedere mecanic.

In figura şi în tabloul ce urmează am dat reprezentarea grafică şi studiul variaţiei funcţiei:

$$\rho = \frac{2}{3} R \frac{\sin\theta}{\theta}$$



θ	-2π	$-\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-4{,}4932$ $-257^{\circ}27'$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0
ρ	0	$-\frac{4\sqrt{2}R}{21\pi}$	$-\frac{4R}{9\pi}$	$-1{,}44R$ min.	$-\frac{4\sqrt{2}R}{15\pi}$	0	$\frac{4\sqrt{2}R}{9\pi}$	$\frac{4R}{3\pi}$	$\frac{4\sqrt{2}R}{3\pi}$	$\frac{2}{3}a$ max.
ρ'	—	—	—	0	+	+	+	+	+	0

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$4{,}4932$ $257^{\circ}27'$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	$\frac{4\sqrt{2}R}{3\pi}$	$\frac{4R}{3\pi}$	$\frac{4\sqrt{2}R}{9\pi}$	0	$-\frac{4\sqrt{2}R}{15\pi}$	$-1{,}44R$ min.	$-\frac{4R}{9\pi}$	$-\frac{4\sqrt{2}R}{21\pi}$	0
ρ'	—	—	—	—	—	0	+	+	+

Pentru datele problemei nu corespunde decât ramura MNPO a curbei.

Studiul acestei curbe se poate face şi în coordonate carteziene prin ecuaţiile parametrice:

$$x = \frac{2}{3}\, a\, \frac{\sin\theta\cos\theta}{\theta} = \frac{a\sin 2\theta}{3\theta}$$

$$y = \frac{2}{3}\, a\, \frac{\sin^2\theta}{\theta} = \frac{a(1-\cos 2\theta)}{3\theta}.$$

ALEXANDRU STOENESCU.

PROBLEMA 5095. *Paralelele duse prin vârfurile* A, B, C *ale unui triunghiu la laturile opuse, taie cercul circumscris în în punctele* A', B', C'. *Fie* A_1, B_1, C_1 *intersecţiile* (BC, B'C'); (CA, C'A'); (AB, A'B'). *Să se demonstreze:*

1°. *Că dreptele* AA_1, BB_1, CC_1 *concură în punctul lui* STEINER *al triunghiului* ABC.

2°. *Că dreptele* $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ *concură în inversul reciprocului punctului lui* STEINER.

3°. *Că triunghiul* $A_1B_1C_1$ *şi triunghlul autocomplementar al lui* ABC *sunt omologice, axa de omologie fiind polara trilineară a reciprocului centrului iperbolei lui* KIEPERT.

4°. *Că această dreaptă trece prin cele două puncte precedente.*

5°. *Că inversul reciprocului punctului lui* STEINER *e situat pe cercul* ABC.

CONST. C. POPOVICI.

Soluţie, dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iaşi).

Folosim *coordonatele baricentrice*, triunghiul de referinţă fiind ABC.

Ecuaţia paralelei din A la BC este:

$$\beta + \gamma = 0,$$

iar a cercului circumscris:

$$(1) \qquad a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta = 0$$

Dreapta de mai sus taie cercul în punctele

$$A\,(1, 0, 0) \quad \text{şi} \quad A'\,(a^2,\ c^2 - b^2,\ b^2 - c^2).$$

Analog se obţin punctele

$$B'(c^2 - a^2 \ , \ b^2, \ a^2 - c^2) \ , \ C'(b^2 - a^2 \ , \ a^2 - b^2, \ c^2).$$

1°. Ecuaţia dreptei $B'C'$ este:

$$a^2\alpha + (a^2 - c^2)\beta + (a^2 - b^2)\gamma = 0,$$

iar intersecţia ei cu BC $(\alpha = 0)$ ne dă punctul

$$A_1[0, -(b^2 - a^2), c^2 - a^2].$$

Rezultă că ecuaţia dreptei AA_1 este:

$$(c^2 - a^2)\beta + (b^2 - a^2)\gamma = 0.$$

Prin permutări circulare se deduc ecuaţiile dreptelor BB_1, CC_1 şi se vede că aceste trei drepte concură în punctul lui STEINER:

$$S\left(\frac{1}{b^2 - c^2}, \frac{1}{c^2 - a^2}, \frac{1}{a^2 - b^2}\right).$$

2°. Ecuaţia dreptei $A'A_1$ este:

$$(b^2 - c^2)^2\alpha + a^2(a^2 - c^2)\beta + a^2(a^2 - b^2)\gamma = 0$$

şi prin permutări circulare se deduc ecuaţiile dreptelor $B'B_1$, $C'C_1$.

Pentru ca aceste trei drepte să fie concurente trebuie să avem:

$$\begin{vmatrix} (b^2 - c^2)^2 & -a^2(c^2 - a^2) & a^2(a^2 - b^2) \\ b^2(b^2 - c^2) & (c^2 - a^2)^2 & -b^2(b^2 - c^2) \\ -c^2(b^2 - c^2) & c^2(c^2 - a^2) & (a^2 - b^2)^2 \end{vmatrix} = 0$$

condiţie care se verifică printr'un calcul uşor.

Două oarecare din ecuaţii ne dau punctul de intersecţie:

$$S'\left(\frac{a^2}{b^2 - c^2}, \frac{b^2}{c^2 - a^2}, \frac{c^2}{a^2 - b^2}\right),$$

care este inversul reciprocului punctului lui STEINER.

3°. Ecuaţia dreptei B_1C_1 este:

$$-(b^2 - c^2)\alpha + (c^2 - a^2)\beta + (a^2 - b^2)\gamma = 0,$$

iar intersecţia ei cu

$$\beta + \gamma = 0$$

ne dă punctul

$$A''(b^2 + c^2 - 2a^2, \ b^2 - c^2, \ c^2 - b^2)$$

care verifică ecuaţia

$$(2) \quad (b^2 - c^2)^2\alpha + (c^2 - a^2)^2\beta + (a^2 - b^2)^2\gamma = 0$$

a polarei trilineare a reciprocului centrului iperbolei lui KIEPERT de coordonate

$$[(b^2 - c^2)^2,\ (c^2 - a^2)^2,\ (a^2 - b^2)^2].$$

Analog se arată că celelalte puncte B″, C″ se găsesc pe această polară.

4⁰. Un calcul simplu arată că dreapta (2) e verificată de coordonatele punctelor S şi S′.

5⁰. Inversul reciprocului punctului lui STEINER este

$$S'\left[\frac{a^2}{b^2 - c^2},\ \frac{b^2}{c^2 - a^2},\ \frac{c^2}{a^2 - b^2}\right].$$

El verifică ecuaţia (1) a cercului circumscris, deoarece:

$$\Sigma \frac{a^2 b^2 c^2}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \equiv \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)} \Sigma (b^2 - c^2) \equiv 0.$$

G. D. S.

PROBLEMA 5291. *Să se găsească un patrat de patru cifre abcd, multiplu de 9, a cărui rădăcină este inversatul sumei* $ab + cd$.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie, dată de D-nii: C. C. BAKONYI (Timişoara); V. BÂRLEA-SUHĂŢEANU (Târgovişte); D. D. BOIANGIU (T.-Severin), I. ŞT. ANDONIE (Bucureşti).

Numărul *abcd* fiind multiplu de 9, suma $a + b + c + d$ şi deci $ab + cd$ se divide prin 9. Rezultă că rădăcina patrată a numărului căutat se divide prin 9. Cum pe de altă parte rădăcina patratelor de 4 cifre este cuprinsă între 31 şi 99, vom căuta această rădăcină între numerele

36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 şi 99.

Ridicând la patrat aceste numere şi examinând suma $ab + cd$, se găsesc următoarele două soluţii

$$54^2 = 2916 \quad \text{cu} \quad 29 + 16 = 45$$

$$99^2 = 9801 \quad \text{cu} \quad 98 + 01 = 99.$$

Au găsit soluţiile exacte pe căi ceva mai lungi D-nii: ST. CETĂŢEANU (Elev-inginer, Bucureşti); C. GH. CRUCERU (Lic. „Traian", T.-Severin); C. V. DIACONESCU (Lic. militar, Cernăuţi); C. D. EFTIMIE (Elev-inginer, Bucureşti); P. F. IONESCU (Lic. part. Craiova); DORU MUSCELEANU, I. S. MUSCELEANU (Lic. „Asan", Caracal); V. C. ROLLEA, C. STAICU (Lic. militar, Cernăuţi); M. F. VĂDUVA (Bacalaureat, Giurgiu).

D-l P. P. DRĂGHICESCU cercetând pentru $ab + cd$ toţi multiplii de două cifre a lui 3 a găsit numai soluţia 54^2.

PROBLEMA 5476. *Ştiind că a, b, c, S sunt laturile şi suprafaţa unui triunghiu, să se demonstreze neegalitatea*

$$S \leqslant \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2).$$

D. V. IONESCU.

Se ştie că

$$(1) \qquad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leqslant a^4 + b^4 + c^4,$$

egalitatea având loc pentru $a = b = c$.

Se mai ştie că

$$(2) \qquad 16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Inmulţind neegalitatea (1) cu 4 şi egalitatea (2) cu 3 şi adunând membru cu membru se obţine:

$$48S^2 \leqslant a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$$

sau

$$48S^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

adică

$$S \leqslant \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Au rezolvat problema D-nii: FLORIN POPESCU (Lic. Marele Voevod Mihai, Bucureşti); GH. BOGDAN (Lic. Militar, Iaşi); S-BLT. ŞTEFAN TILICĂ, A. ANDREI, P. P. DRĂGHICESCU (Lic. Militar, Iaşi); OCT. E. GHEORGHIU (student); IOAN C. NEGRESCU (Lic. Spiru Haret, Bucureşti).

PROBLEMA 5477. *O dreaptă* D *variabilă, dusă prin punctul fix* $P(p, q)$ *taie axa* Ox *în* M; *locul geometric al centrului cercului trecând prin origine şi tangent în* M *la* D *este o parabolă ce trece prin origine, cu axa paralelă cu* Oy, *cu parametrul* $-\frac{q}{4}$.

Când P *variază paralel cu* Ox, *vârfurile parabolelor precedente descriu o altă parabolă cu vârful în origine, cu axa* Oy *şi cu parametrul* $\frac{q}{4}$.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie analitică. Ecuaţia dreptei D este

$$y - q = \lambda(x - p)$$

şi coordonatele lui M sunt $p - \frac{q}{\lambda}$, 0.

Centrul cercului este dat de dreptele

$$x = \frac{1}{2}\left(p - \frac{q}{\lambda}\right) \quad , \quad y = -\frac{1}{\lambda}\left(x - p + \frac{p}{\lambda}\right)$$

dintre care prima este mediatoarea segmentului $\overline{OM}$ şi a doua este perpendiculara în M pe dreapta D.

Eliminarea parametrului λ între ecuaţiile precedente, ne dă ecuaţia locului geometric

$$2x^2 - px + qy = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{p}{4}\right)^2 = -\frac{q}{2}\left(y - \frac{p^2}{8q}\right)$$

formă pe care recunoaştem proprietăţile din enunţ.

Vârful parabolei are coordonatele

$$x = \frac{p}{4} \quad , \quad y = \frac{p^2}{8q}$$

şi prin eliminarea lui p,

$$x^2 = \frac{q}{2}\, y.$$

Notă. 1. Bune soluţii date de D-nii: GH. GH. BROŞTEANU (laşi), P. P. DRĂGHICESCU (laşi), C. D. EFTIMIE, OCTAV C. GHEORGHIU (laşi), OCTAVIAN E. GHEORGHIU (student, Bucureşti), IOAN N. GLIGOR, (Ş. O. R. A., Craiova), MIRCEA C. NICULESCU (Bucureşti), FLORIN POPESCU (Bucureşti), MARIN GH. POPESCU (lic. Piteşti), ŞTEFAN G. RĂDULESCU (Bucureşti), GH. D. SBÂRNEA (Tecuci), NICOLAE SOTIRESCU (Timişoara), ŞTEFAN TILICĂ (sublocotenent),

MIREL D. STOENESCU (Ş. O. A., Bucureşti), EUGEN G. VIJELIE (Predeal), GH. D. VOICU (Ş. O. A., Bucureşti), RADU P. VOINEA (Craiova), EUGEN WEGENER (Bucureşti).

2. Fie încă I, mijlocul segmentului OM; C, centrul cercului; Q, proiecţia lui P pe Ox. Triunghiurile CIM şi PMQ sunt asemenea, deci

$$(1) \qquad \frac{\overline{CI}}{\overline{IM}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}$$

dar $\overline{CI} = y, \overline{IM} = \overline{OI} = x, \overline{PQ} = q, \overline{MQ} = p - 2x$ deci;

$$(2) \qquad \frac{y}{x} = \frac{p - 2x}{q}$$

ecuaţia locului căutat.

C devine un vârf pe curba loc geometric când

$$y = \frac{2x(p - 2x)}{2q}$$

este un extremum, adică

$$2x = p - 2x \quad \therefore \quad x = \frac{p}{4}.$$

In acest caz $\overline{MQ} = 2\,\overline{IM} = 2x$ şi (1) devine

$$(3) \qquad y = \frac{2x^2}{q},$$

ecuaţia celeilalte parabole.

PROBLEMA 5488. *Se dă un triunghiu dreptunghiu* ABC. *Pe cateta* AB *se ia un punct* M *astfel ca*

$$(1) \qquad \overline{AC}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AB},$$

şi fie P *proiecţia lui* M *pe* BC.

1°. *Să se găsească locul punctului* P *când* B *variază pe dreapta* AB.

2°. *Să se arate că dreapta* MP *trece printr'un punct fix.*

BAL LASCU.

Relaţia (1) arată că triunghiurile AMC, ABC sunt asemenea. Rezultă că unghiurile ACB, AMC sunt egale şi că prin urmare dreapta MA este bisectoarea exterioară a unghiului CMP.

Se deduce că dreapta MP trece prin punctul C' simetricul lui C în raport cu A şi că locul geometric al punctului P este cercul descris pe CC' ca diametru.

Notă. Au rezolvat analiticeşte problema D-nii: C. GH. CRUCERU, (Politehnica Bucureşti); I. N. GLIGOR, (Şcoala Ofiţeri de rezervă Artilerie, Craiova); GH. D. VOICU, (Şcoala de Ofiţeri de Aviaţie).

PROBLEMA 5518. *Să se demonstreze că*

$$\lim_{x=0}\left\{-\frac{p}{x}+\frac{2}{3R^2x^2}\left[(p^2-qx+R^2x)^{\frac{3}{2}}-(p^2-qx)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}=\frac{R^2-2q}{4p}.$$

D. V. IONESCU.

Notând cu E expresia din paranteza mare, putem scrie

$$E=\frac{-pR^2x+\frac{2}{3}\left[(p^2-qx+R^2x)^{\frac{3}{2}}-(p^2-qx)^{\frac{3}{2}}\right]}{R^2x^2}.$$

Dacă se face $x=0$, în această expresie se obţine nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Aplicându-se regula lui HOSPITAL, se obţine

$$\lim_{x=0}E=\lim_{x=0}\frac{-pR^2+(R^2-q)(p^2-qx+R^2x)^{\frac{1}{2}}+q(p^2-qx)^{\frac{1}{2}}}{2R^2x}.$$

Fracţia din membrul al doilea este tot de forma $\frac{0}{0}$ pentru $x=0$; se aplică din nou regula lui HOSPITAL şi se obţine

$$\lim_{x=0}E=\lim_{x=0}\frac{\frac{1}{2}(R^2-q)^2(p^2-qx+R^2x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}q^2(p^2-qx)^{-\frac{1}{2}}}{2R^2}$$

$$=\frac{(R^2-q)^2-q^2}{4R^2p}$$

sau

$$\lim_{x=0}E=\frac{R^2-2q}{4R^2p}.$$

Problema a fost rezolvată de D-nii: GEORGE GH. DONŢU (elev clasa VIII-a Liceul de aplicaţie, Iaşi); GH. BOGDAN, T. TURCULEŢ (liceul militar, Iaşi); MIRCEA A. NEGREA (Brăila); C. BAKONYI (Liceul Loga, Timişoara); IOAN A. BADEA (bacalaureat, Braşov); P. P. DRĂGHICESCU, (Liceul militar, Iaşi); OCT. E. GHEORGHIU (student, Bucureşti).

PROBLEMA 5586. *Un segment de lungime constantă se sprijină cu capetele lui pe două drepte perpendiculare neconcurente. Se cere locul unui punct determinat de pe acest segment.*

AD. GHEORGHIU.

Soluția. Fie (α), (β) cele două drepte perpendiculare în spațiu și A_0B_0 perpendiculara lor comună. Fie AB segmentul de lungime constantă astfel că punctul A glisează pe dreapta (α) și B pe (β), fie M în punct fix al segmentului AB astfel că:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k.$$

Pe planul determinat de dreapta (α) și punctul B_0, segmentul AB se proiectează după dreapta AB_0, iar punctul M, în m astfel că:

$$\frac{\overline{mA}}{\overline{mB_0}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k.$$

Locul geometric al punctului m pe planul $[B_0, (\alpha)]$ este o dreaptă (α') ce taie pe A_0B_0 în punctul O astfel că:

$$\frac{\overline{OA_0}}{\overline{OB_0}} = k.$$

Rezultă că locul geometric al punctului M este situat în planul paralel la dreptele (α), (β) dus prin O. Fie (β') paralela prin O la dreapta (β) și fie a, b proiecțiile punctelor A, B respectiv pe dreptele (α'), (β'). Evident că:

$$\overline{Oa} = \overline{A_0A} \text{ și } \overline{Ob} = \overline{B_0B}.$$

Pe de altă parte din:

$$\overline{AA_0^2} + \overline{A_0B_0^2} + \overline{B_0B^2} = \overline{AB^2}$$

rezultă: $$\overline{AA_0^2} + \overline{B_0B^2} = \overline{AB^2} - \overline{A_0B_0^2} = \text{const.}$$

adică: $$\overline{Oa^2} + \overline{Ob^2} = \overline{AB^2} - \overline{A_0B_0^2} = \text{const.}$$

deci $$\overline{ab} = \text{const.}$$

Iar punctul M care se găsește evident pe ab este fix pe acest segment căci:

$$\frac{\overline{Ma}}{\overline{Mb}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k.$$

Și problema a revenit la o problemă cunoscută de geometrie plană:

Locul geometric al punctului M de pe segmentul de lungime constantă ab ale cărui capete glisează pe dreptele perpendiculare (α'), (β') în planul $\alpha'O\beta'$.

Acest loc este o elipsă cu centrul în O şi de axe:

$$\frac{1}{1+k}\ \overline{AB} \text{ pe dreapta } (\alpha')$$

$$\frac{k}{1+k}\ \overline{AB} \text{ pe dreapta } (\beta')$$

Se observă că suma celor două axe ale elipsei egalează segmentul AB din spaţiu.

Au dat soluţiuni analitice următorii corespondenţi: RADU P. VOINEA (elev-inginer), OCT. E. GHEORGHIU, CL. SENI, T. TURCULEŢ (lic. militar, Iaşi), EUGEN WEGENER (Bucureşti) şi C. D. EFTIMIE (elev-inginer).

PROBLEMA 5594. *Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:*

$$\varphi_4(7^x \cdot 11^y) = 2^z$$

unde $\varphi_i(I)$ *înseamnă indicatorul de ordinul* i *a lui* I.

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-l MARIN GH. POPESCU (clasa VIII reală, Lic. „I. C. Brătianu", Piteşti).

Observăm că:

$$\varphi_1(7^x \cdot 11^y) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^{x-1} \cdot 11^{y-1}$$

$$\varphi_2(7^x \cdot 11^y) = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^{x-2} \cdot 11^{y-2}$$

$$\varphi_3(7^x \cdot 11^y) = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^{x-3} \cdot 11^{y-3}$$

$$\varphi_4(7^x \cdot 11^y) = 2^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^{x-4} \cdot 11^{y-4}.$$

Cum membrul al doilea al ecuaţiei este o putere a lui 2, înseamnă că va trebui să avem: $x \leqslant 3$ şi $y \leqslant 3$.

Dând pe rând lui x şi y valorile: 0, 1, 2, 3 obţinem următorul tablou de soluţiuni:

x	0				1				2				3			
y	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
z	—	0	3	6	—	2	5	8	1	4	7	10	3	6	9	12

Observaţii: 1. Au dat numai soluţiile $x = y = 3$ şi $z = 12$ D-nii: D. D. BOIANGIU şi C. GH. CRUCERU.

2. Toate celelalte soluţiuni au fost greşite şi fapt curios (!), la acelaşi liceu aceeaşi greşală.

I. L.

EXERCIŢII

16. Să se găsească un patrat perfect de patru cifre de forma *abbb* astfel încât suprimând ultima cifră să rămână un patrat de trei cifre.

D. GH. VASILIU.

R. Trebuie să avem

$$x^2 = abbb \quad \text{şi} \quad y^2 = abb.$$

Când ultimele două cifre ale patratului sunt identice ele sunt 0 sau 4. Prima e neadmisibilă căci $a000$ nu este patrat perfect. Inlocuind pe b prin 4 găsim relaţia

$$10y^2 + 4 = x^2 \quad \therefore \quad (x-2)(x+2) = 10y^2.$$

Primul membru se divide prin 10 dacă unul din factori se termină prin 5 şi celălalt este pereche, sau dacă un factor se termină cu zero. Prima ipoteză este imposibilă căci dacă un factor se termină cu 5, celălalt sporit sau micşorat cu 2 nu este pereche. Rămâne că unul din factori se termină cu zero. Dacă $x-2$ se termină cu zero, x se termină cu 8 şi cum $32 < x < 90$ urmează că x este unul din numerele 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98.

Dintre acestea numai 38 dă soluţie. Avem

$$38^2 = 1444 \quad \text{şi} \quad 12^2 = 144.$$

Dacă $x+2$ se termină cu zero nu avem soluţie.

In general patratele care rămân tot patrate când li se suprimă ultima cifră dela dreapta au fost numite *patrate berce* şi au fost studiate de D-l G-L GH. BUICLIU în articolul cu acest titlu dela pag. 104, Vol. XL, *Gazeta Matematică.*

Patratele se găsesc rezolvând în numere întregi ecuaţia

$$x^2 = 10y^2 + a$$

unde a este dat.

17. Intre elementele unui triunghiu avem relaţia:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{h_a}{b} & a & 1 \\ \frac{h_b}{a} & c & 1 \\ \frac{h_c}{b} & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2 - 3r(r+4R)}{2R}.$$

CPT. E. ST. IACOB.

R. Desvoltând determinantul găsim

$$\Delta = \Sigma \frac{bh_c}{a} - \Sigma \frac{ch_c}{a}.$$

Dar ţinând seamă de

$$2S = ah_c = bh_a = ch_b$$

Δ devine

$$\Delta = 2S\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{abc} - \frac{ab+bc+ac}{abc}\right] = \frac{p^2-3r(r+4R)}{2R}$$

căci

$$a^2+b^2+c^2 = 2p^2-2r^2-8Rr \quad \text{şi} \quad ab+bc+ca = p^2+r^2+4Rr.$$

PROBLEME PROPUSE

5762. Se cere un patrat scris cu trei sau cinci cifre de aceeaşi paritate.

I. IONESCU.

5763. Printre numerele prime cu un număr dat şi inferioare lui găsim pe 8, 10, 14, 22 şi 34. Admiţând că 34 este al patrulea număr înainte de ultimul, care este acel număr dat ?

COMANDOR I. LINTEŞ.

5764. Să se demonstreze, că sunt numere k astfel încât, dacă un număr de trei cifre abc se bucură de proprietatea $ab = Mk$ şi $bc = Mk$ atunci el se bucură şi de proprietatea $ca = Mk$. Să se determine aceste numere k.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5765. Pe marginea foilor unor calendare, se obişnuieşte să se scrie numărul zilelor care au trecut dela începutul anului şi al acelora care au mai rămas până la finele anului. La ce date aceste numere vor fi respectiv de formele *amm*, *bnn* şi la ce date de formele *amm*, *bmm*?

G-L GH. BUICLIU.

5766. Fie p perimetrul şi s suma diagonalelor unui poligon oarecare cu n laturi. Să se demonstreze relaţiile:

$$s \geqq \begin{cases} \dfrac{n-3}{4}\, p & n \text{ impar} \\ \dfrac{n-4}{4}\, p & n \text{ par.} \end{cases}$$

Să se determine, în particular, poligoanele corespunzătoare egalităţilor.

(Problema analoagă, relativ la limitele superioare ale lui s în funcţie de p, a fost propusă de D-l TIBERIU POPOVICIU în G. M., Vol. XXXIX, pag. 288 cu Nr. 4357 şi este încă nerezolvată).

IOAN B. FLORESCU.

5767. Se dau punctele L, M, N pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC şi se cere să se găsească un punct P din planul acestui triunghiu aşa încât vârfurile triunghiului său podar X, Y, Z să fie egal depărtate de punctele L, M, N şi în acelaşi sens.

G-L GH. I. POPESCU.

5768. Să se demonstreze că patrulaterul cu vârfurile în punctele lui FEUERBACH ale unui triunghiu nu este niciodată patrat.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

5769. Isogonalul simetricului ortocentrului unui triunghiu în raport cu punctul lui FEUERBACH, relativ la cercul înscris, se află pe dreapta care uneşte centrele cercurilor înscris şi circumscris triunghiului.

N. N. MIHĂILEANU.

5770. Fie φ, φ_a, φ_b, φ_c punctele lui FEUERBACH ale triunghiului ABC în care unghiul A este de 120°. Dacă triunghiul variază aşa încât φ_b şi φ_c să rămâie fixe, atunci dreapta $\varphi\varphi_a$ înfăşoară o elipsă, a cărei axă mare este diametrul cercului celor *nouă* puncte paralel cu bisectoarea interioară a unghiului A şi a cărei axă mică este cât jumătatea axei mari.

V. THÉBAULT.

5771. Se consideră un triunghiu ABC şi fie M_1 şi M_2 două puncte inverse în raport cu cercul (O), circumscris acestui triunghiu. Să se demonstreze, că: 1°. Triunghiurile podare ale punctelor M_1 şi M_2 în raport cu triunghiul ABC determină două figuri invers asemenea având ca axe duble dreptele lui SIMSON ale extremităţilor diametrului M_1M_2 al cercului (O).

2°. Inversele isogonale ale punctelor M_1 şi M_2 sunt simetrice în raport cu ortopolul diametrului M_1M_2.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5772. Pe laturile unghiului drept AOB se iau lungimile $\overline{OA} = \overline{OB} = 2a$. Se cere, să se găsească: 1°. Ecuaţia conicelor (C) circumscrise triunghiului AOB, având un vârf în O; 2°. Centrul, ecuaţia redusă, coordonatele focarelor, directoarelor corespunzătoare; 3°. Locul centrelor; 4°. Locul vârfurilor situate pe axa ce trece prin O; 5°. Locul intersecţiei directoarei cu axa ce trece prin O; 6°. Locul focarelor; 7°. Infăşurătoarea axei perpendiculară pe cea ce trece prin O.

N. ABRAMESCU.

5773. Intr'un triunghiu ABC condiţia:

$$(c^2-a^2)\,[2c^2a^2-(c^2+a^2-b^2)^2]=(a^2-b^2)\,[2a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2] \quad (1)$$

este echivalentă cu:

$$\sin B \sin(A-B)\cos 2C = \sin C \sin(C-A)\cos 2B; \quad (2)$$

iar condiţia:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 4\sin^2 B \sin^2 C, \quad (3)$$

este echivalentă cu:

$$\cos(B-C) = \frac{a^2}{bc}. \quad (4)$$

Să se demonstreze, că, dacă într'un triunghiu ABC există relaţiile (1), (2), triunghiul este sau dreptunghic în A, sau între elementele lui există relaţiile (3), (4).

P. P. DRĂGHICESCU.

5774. Să se determine legea forţelor care fac ca un mobil să descrie traiectoriile

$$f(x, y) = C,$$

ştiind că proiecţiile forţei pe axe sunt într'un raport constant k, dat.

M. GHERMĂNESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (E, N, P); *Andrei Gh. Val.* (E); *Bakonyi C.* (5674, 98, 725); *Bereanu B.* (5722, 50, 53, 60); *Caramalău V. E.* (5698); *Chiriac C.* (5704, 11, 17, 30, 39, 50, 60); *Columbeanu D. P.* (5677); *Cubat H. A.* (5599, 609, 67, 69, 87, 721, 22); *Donţu Gh. G.* (5677, 747, 54); *Drăghicescu P. P.* (P); *Enăchescu Gr. I.* (4478, 520, 5567, 89, 610, 31, 49, 56, 60); *Gheorghiu C. Octav* (5464, 575, 695, 732); *Iacob St. E.* (3802, 4548, 5545, 48, E); *Mahrenholz J.* (5575, 718, 19, 30, 32); *Pălăceanu D. V.* (5705, 06); *Pătrăscioiu S. M.* (5692, 705, 17, 22); *Păunescu C. Victor* (5760, 61); *Pavica A. V.* (5760); *Pitiş L. N.* (5727, 56); *Popescu I. Gh.* G-l (A); *Staicu I. C.* (5575, 606, 717, 18, E); *Ştefănescu N.* S-Lt. (1412, 5747); *Teodorescu St. I.* (4596, 710, 5646); *Thébault V.* (A, N); *Vasiliu Gh. D.* (5720); *Wegener N. E.* (5689).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată,* ***nu vor fi luate în consideraţiune.***

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea «*Gazetei Matematice*» se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 16.198

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1943

SUMARUL

1. † Profesorul Andrei Gh. Ioachimescu. *Alexandru Stoenescu.*
2. Note despre trecutul Matematicii în Craiova . . . . . *P. Sergescu.*
3. Asupra unei probleme de Geometrie . *C. Borş.*
4. Premiul „Inginer Alexandru Roşu" . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note matematice: 39 — 43.
6. Bibliografie.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 914, 1679, 5176, 5179, 5381, 5559, 5686, 5694, 5725.
9. Exerciţii: 18 — 20.
10. Probleme propuse: 5775 — 5787.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

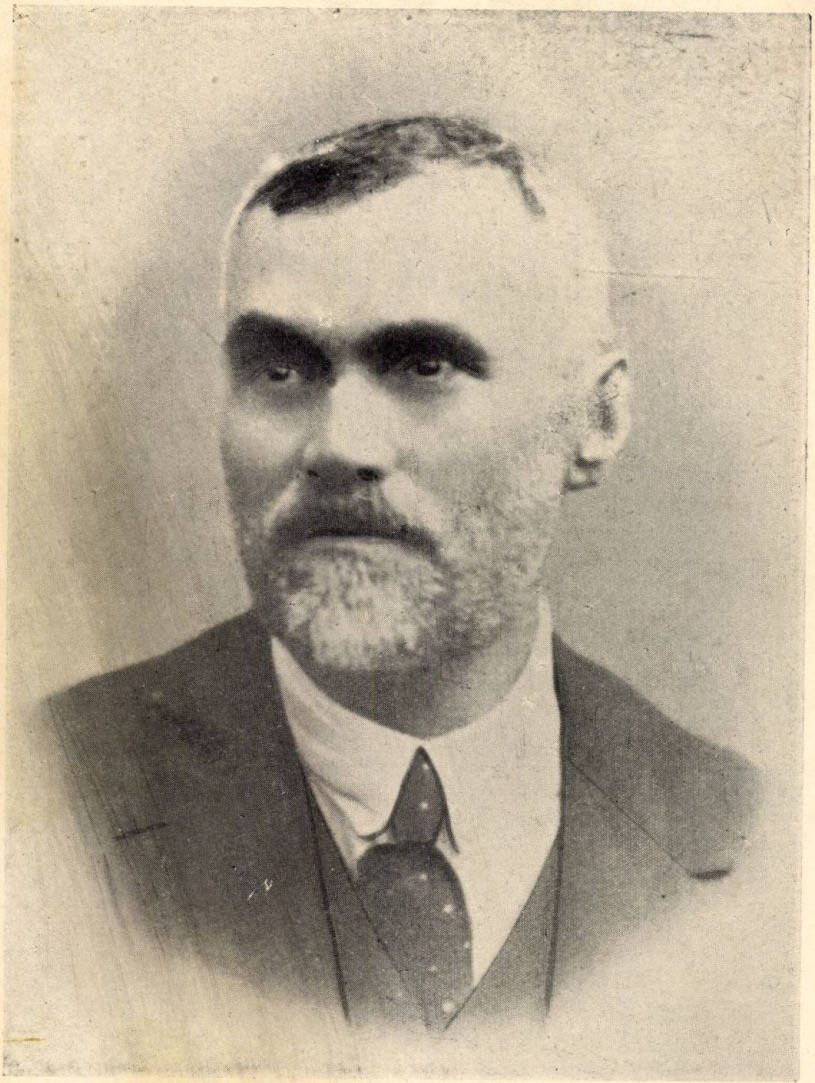
Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 03, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80



† PROFESOR ANDREI GH. IOACHIMESCU

† PROFESORUL ANDREI GH. IOACHIMESCU
(1868—1943)

In ziua de *13 Martie 1943*, la orele 3,23 în zorii zilei, s'a stins din viaţă în vârstă de 75 ani după o lungă şi grea suferinţă Profesorul ANDREI GH. IOACHIMESCU.

Ultima fotografie a PROF. ANDREI GH. IOACHIMESCU
la masa sa de lucru.

Privirea sa blândă s'a închis, zâmbetul său a împietrit în nepătrunsa taină a morţii. Pe chipul său de ceară se citeşte: *seninătate şi pace.*

In pâlpâiala lumânărilor albe, în miresme de flori, sub privirea sfintelor icoane se slujește slujba creștină și se șoptește ultima rugăciune.

De acum nu vom mai putea întâlni privirea sa, nu vom mai auzi glasul său.

Dar, în sufletul nostru, al tuturor celor ce l-am cunoscut, vom simți întotdeauna *prezența sufletului său mare,* iar în gândul nostru *amintirea chipului său* nu se va șterge niciodată.

* * *

L-am cunoscut pe Profesorul ANDREI GH. IOACHIMESCU în 1923.

Eram în clasa VII-a de liceu și dădeam examenul oral de Algebră la *Concursul Gazetei Matematice.* Mi-aduc și acum aminte de ziua frumoasă de Aprilie când emoționat și cuprins de grije mă îndreptam către Facultatea de Științe unde se țineau examenele.

La sosirea lui ANDREI GH. IOACHIMESCU însă toate aceste griji și emoții se topiră.

Figura sa răspândea o atmosferă de bunătate, de calm, iar căldura sufletului său se transmitea fiecăruia dintre concurenți.

Ca un șirag de pietre scumpe, șlefuite de o mână de artist, problemele și întrebările puse se înșirau clare, limpezi într'o perfecțiune absolută de exprimare și logică.

In toamna aceluiași an, ANDREI GH. IOACHIMESCU mi-a devenit profesor la cursul de *Mecanică* al *Școalei Politechnice.*

Imi reamintesc amfiteatrul vechiu al Școalei, plin până la ultimul loc și mă revăd ascultând cu religiozitate împreună cu camarazii mei lecțiile lui A. GH. IOACHIMESCU.

Comparabile numai cu prelegerile regretatului Profesor GH. ȚIȚEICA, cursul predat de A. GH. IOACHIMESCU a reprezentat pentru cele treizeci de serii de viitori ingineri un model de precizie și claritate.

Elementele cele mai delicate, problemele cele mai grele ale Mecanicei, prin expunerea lui A. GH. IOACHIMESCU ajungeau simple, concrete, apropiate de intuiție.

Lecțiile începeau cu un scurt rezumat al ședinței precedente. Urma apoi expunerea teoretică a subiectului lecției noui, rezumată

la sfârşit în câteva cuvinte şi exemplificată ulterior prin probleme elementare, admirabil alese, probleme ce se rezolvau împreună cu elevii.

La sfârşitul şedinţei, A. GH. IOACHIMESCU obişnuia să predea unui elev manuscrisul lecţiei respective, manuscris alcătuit şi scris din nou aproape în fiecare an.

In acest mod înţelegerea lecţiilor sale era atât de completă, încât prezentarea la examen nu cerea nicio pregătire specială.

Fiecare elev al său îi era cunoscut şi trecut în carnetele sale, cu localitatea în care a făcut liceul, notele obţinute în cursul anului la cele patru lucrări considerate, ca examene parţiale, precum şi notele obţinute în şedinţele de seminar şi la examenele generale.

Aceste carnete erau atât de perfect ţinute încât întrebat după ani de zile, A. GH. IOACHIMESCU găsea imediat situaţia oricărui elev al său.

Dragostea sa pentru elevi, interesul pentru gândurile, viaţa şi activitatea lor era puternică şi vie.

In aceste condiţii, sub directa sa conducere, am redijat ca elev al său împreună cu colegul meu de clasă EMIL AL. ANASTASIU, soluţiile problemelor propuse de A. GH. IOACHIMESCU la diferite lucrări scrise între anii 1920—1926. Lucrarea a apărut în 1926 în două volume litografiate.

Peste circa zece ani mai târziu, anume în 1934, Profesorul A. GH. IOACHIMESCU m'a adus la Şcoala Politechnică ca asistent al său la cursul de *Mecanică*.

De atunci şi până aproape de ultimele sale zile am fost în apropierea sa.

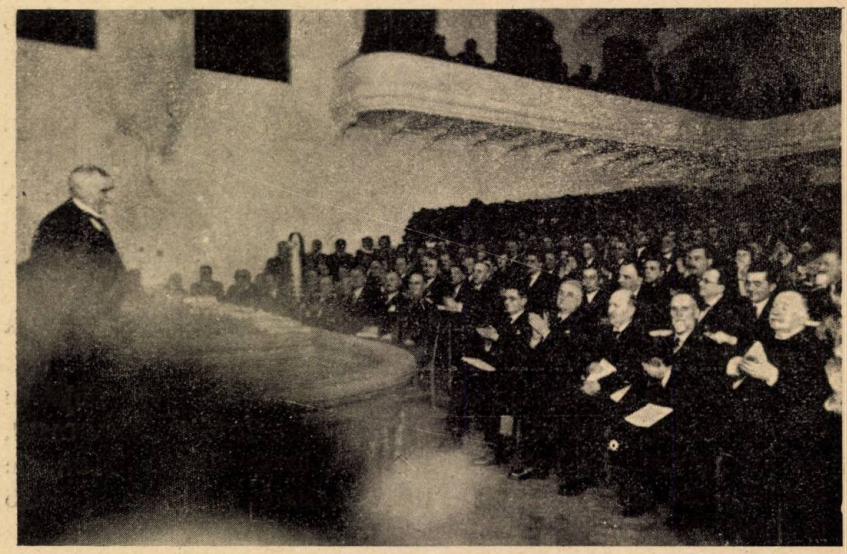
Imi aduc aminte acum de discuţiile avute pentru găsirea unei metode cât mai perfecte pentru învăţarea Mecanicei şi grijei ce o avea în sistematizarea cunoştinţelor şi mai ales în determinarea orânduirii celei mai pedagogice a materiei pe capitole astfel încât să nu se introducă noţiuni, principii şi teoreme noi decât atunci când pregătirea anterioară necesară era complet făcută.

Utima oară l-am revăzut la biroul său în camera sa de lucru, din modesta sa locuinţă din Str. Buzeşti 74.

Era mai palid ca de obicei, figura sa exprima o suferinţă profundă, iar degetele sale tremurau pe filele cărţilor ce i le adusesem spre cercetare.

Cu bunăvoinţa şi claritatea sa de întotdeauna, Profesorul A. GH. IOACHIMESCU mi-a dat sfaturi asupra editării definitive a Cursului de Mecanică şi mi-a remis manuscrisul unui Capitol de Cinematică scris în ultimul timp.

La plecare când am strâns mâna sa slabă şi nesigură n'am simţit că aceasta era clipa despărţirii noastre.



Profesorul A. GH. IOACHIMESCU rostindu-şi cuvântarea cu ocazia sărbătoririi a 40 ani de existenţă a *Gazetei Matematice*. Se văd în primul rând dela dreapta spre stâng D-nii: ION IONESCU, GR. STRATILESCU, GH. ŢIŢEICA, N. VASILESCU-KARPEN, V. VÂLCOVICI, G-RAL BUICLIU, C. C. TEODORESCU.

Şi când peste câteva zile l-am revăzut cu chipul de ceară şi am retrăit lângă trupul său fără viaţă toate amintirile de altădată, atunci am simţit, cum au simţit toţi cei ce l-au cunoscut, că sufletul Profesorului A. GH. IOACHIMESCU va rămâne prezent în sufletul nostru al tuturora până în ultima clipă a vieţii noastre.

Inchei acest capitol al amintirilor cu cuvintele rostite de A. GH. IOACHIMESCU în cuvântarea sa din 17 Decemvrie 1935 la Şedinţa festivă dela Şcoala Politehnică cu ocazia sărbătoririi a 40 ani de existenţă a *Gazetei Matemetice*, cuvinte ce vor reprezenta pentru noi un îndemn la muncă stăruitoare şi desinteresată:

„Noi, din generaţia mea, am făcut ce am putut: unii mai mult ca colegii IONESCU, ŢIŢEICA *şi regretatul* CRISTESCU, *alţii*

mai puțin. Suntem cu toții mulțumiți în sufletele noastre când vedem în jurul nostru, urmându-se aproape cu continuitate, o pleiadă de oameni cu dor de muncă cinstită și desinteresată, spre a contribui mai departe la formarea tinerelor generații, îndrumându-i pe calea dreaptă. Cu asemenea urmași, noi cei care ne găsim la sfârșitul carierei și al popasului în această lume, putem să plecăm liniștiți, fiind convinși că sămânța aruncată nu a căzut pe pământ sterp, ci a încolțit bine și va produce roade abundente".

* * *

Profesorul A. GH. IOACHIMESCU este coborîtor dintr'o familie de preoți transilvăneni.

Străbunicul său a fost preotul IOACHIM care fuge din Transilvania în anul 1784, *fiind condamnat la moarte prin spânzurătoare în timpul revoluției lui* HORIA și se stabilește întâi la *Câmpul-Lung, Muscel,* păstorind la Biserica *Sf. Ilie,* iar apoi în satul *Nedelea,* unde slujește până la moartea sa în 1830.

Bunicul Profesorului A. GH. IOACHIMESCU a fost tot preot și s'a numit de asemenea IOACHIM și a păstorit la *Ploești* la Biserica *Maica Precista* și apoi la Biserica *Sf. Vasile* pe care a zidit-o din temelie în anul 1834.

Fiind distrusă de un incendiu, preotul IOACHIM a rezidit Biserica *Sf. Vasile* în 1857.

Tatăl Profesorului A. GH. IOACHIMESCU, GHEORGHE POPESCU-IOACHIMESCU a fost agricultor și podgorean precum și efor al Bisericii *Sf. Vasile,* la reconstrucția căreia a luat o parte activă.

Profesorul A. GH. IOACHIMESCU s'a născut la Ploești la 31 Octomvrie stil vechiu. Școala primară a făcut-o la Ploești și anume primul an la Școala particulară a unchiului său preotul NICOLAE IOACHIMESCU și anii următori la școala primară Nr, 2 a Municipiului Ploești.

Menționăm faptul interesant că în primul an de școală primară a avut ca învățător pe diaconul GEORGESCU ce ajunge mai târziu *Mitropolitul Primat al Moldovei.*

După absolvirea cursului primar, A. GH. IOACHIMESCU urmează cursurile școalei comerciale din *Ploești* între anii 1880—1886 și apoi pe cele ale școalei comerciale din *București* în 1886—1887.

In anul 1887, A. GH. IOACHIMESCU intră în anul preparator al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele, iar în 1887 este primit în anul I al aceleiaşi Şcoale fiind clasificat I-iul la examenul de intrare.

Menţionăm că printre cei 18 colegi ai săi de clasă se afla şi regretatul stâlp al *Gazetei Matematice*, VASILE CRISTESCU.

In 1892, A. GH. IOACHIMESCU obţine după studii stălucite diploma de inginer Nr. 36 din 10/23 Iulie.

Pe aceeaşi dată, a fost numit inginer la Serviciul Studiilor şi Construcţiilor din Ministerul Lucrărilor Publice, fiind repartizat la construcţia liniei Tg.-Ocna-Moineşti, dar după puţin timp A. GH. IOACHIMESCU trece în serviciul Regiei Monopolurilor Statului.

In toamna anului 1892, A. GH. IOACHIMESCU este trimis de Regia Monopolurilor la Paris spre a urma cursurile Şcoalei Centrale de Arte şi Manufactură a Statului francez, pentru a se specializa în fabricarea tutunului şi chibriturilor.

Fiind la Paris, se înscrie în Octomvrie 1892 la Facultatea de Ştiinţe din Paris, iar la 9 Aprilie 1894 A. GH. IOACHIMESCU îşi ia icenţa în Matematici.

Menţionăm cu titlu de curiozitate că Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti a refuzat înscrierea lui A. GH. IOACHIMESCU pe motiv că nu are bacalaureatul.

In 1894, după terminarea Şcoalei de Arte şi Manufactură din Paris A. GH. IOACHIMESCU se reîntoarce în ţară şi îşi continuă activitatea la Regia Monopolurilor Statului.

(Va urma) ALEXANDRU STOENESCU.

NOTE DESPRE TRECUTUL MATEMATICII IN CRAIOVA

In *Arhivele Olteniei*, Anul XXI, 1942, pp. 20—32, D-l Prof. C. D. FORTUNESCU dă o descriere amănunţită a unei vechi publicaţii din Craiova: *Mercantilulŭ* (Foaie commerciale), care a apărut săptămânal timp de trei ani, dela 18 Februar 1868 până la finele anului 1870, editat de vechea tipografie *Macinca şi Samitca*, azi centenară şi transformată în *Scrisul Românesc*. In anul I,

adică în 1868, se anunţă în această foaie apariţia unei *Aritmetici raţionate*, de Prof. I. GRECESCU. Cartea se tipărea în *ediţia a doua*. De sigur că autorul e acelaşi cu directorul *Institutului I. Grecescu*, pe care-l anunţă aceeaşi foaie şi care funcţiona în casele DUMITRU MILEA, din Str. Municipalităţii din Craiova.

Găsim, tot în acelaşi volum din *Arhivele Olteniei*, XXI, pp. 372—373 câteva informaţii suplimentare despre I. GRECESCU (într'un articol al D-lui M. THEODORIAN CARADA). I. GRECESCU era profesor de matematici la liceul din Craiova între 1860 şi 1873. A murit de sigur tânăr, căci la moartea sa lasă moştenire fostului său profesor L. C. RAYMOND, casele sale din Craiova, moşia sa Predeşti şi toată averea sa. Casele erau pe locul expropriat pentru clădirea actualului monumental Palat al Justiţiei din Craiova, iar stradela care le mărginea s'a chemat *„strada Raymond"*. Acest RAYMOND, fost profesor într'un colegiu din sudul Franţei, a fost adus în ţară în 1847 de către VODĂ BIBESCU şi numit profesor la liceu, unde a funcţionat până la moartea sa subită din 1886. In acelaşi timp i se încredinţase direcţia pensionatului francez, primul internat al Statului pe lângă liceu, închis în 1848 odată cu toate şcoalele din ţară.

In casele moştenite dela I. GRECESCU, RAYMOND a ţinut un pensionat — probabil continuând pe acel al lui GRECESCU anunţat în 1868 — până la 1882. Impreună cu G. M. FONTANIN, L. C. RAYMOND au fost iniţiatorii celei mai vechi reviste oltene *Vocea Română*.

Urmaşul la catedra de matematici dela liceu al lui ION GRECESCU a fost SCARLAT MATEESCU. El trebuie să fi fost profesor la liceu şi pe vremea când acolo era ca elev G. ŢIŢEICA. Dar dintre profesorii săi de matematici din Craiova, G. ŢIŢEICA amintea cu recunoştinţă mai ales pe CONSTANTINESCU (tatăl inginerului GOGU CONSTANTINESCU, inventatorul atât de cunoscut în legătură cu sonicitatea).

Comparând datele, cred că primele elemente de limba franceză i-au fost date lui G. ŢIŢEICA de către L. C. RAYMOND.

Tot în foaia *Mercantilul*, anul III, 1870, se dau informaţii cu privire la felul cum se făceau călătoriile pe atunci. De pildă, se dă indicatorul curselor de pasageri cu diligenţa între Bucureşti şi Orşova. Se pleca zilnic la 10 seara din Bucureşti şi se ajungea în ziua a cincea la orele 10 la Orşova.

La 18 Ianuarie 1870 deputatul GH. CHIŢU anunţă că Domnitorul CAROL a dispus să se înceapă lucrările drumului de fier Bucureşti-Severin. Acest GH. CHIŢU a fost mai târziu ministru al şcoalelor şi a avut o activitate însemnată culturală. In timpul războiului pentru independenţă el era ministru al Şcoalelor. SPIRU HARET era bursier al Ministerului pentru a-şi face doctoratul în matematici la Paris. De fapt, teza lui HARET era aproape terminată şi a fost şi susţinută la 30 Ianuarie 1878, prima teză de doctorat în matematici susţinută de un Român în Paris. La izbucnirea războiului, SPIRU HARET şi ceilalţi bursieri români au voit să se întoarcă în ţară ca să-şi facă datoria militară. Ministrul GH. CHIŢU i-a oprit telegrafic de-a se înapoia în ţară, cerându-le să-şi termine mai întâi studiile. Poate că fără această intervenţie a craioveanului CHIŢU, SPIRU HARET nu ar fi avut putinţa de a reveni la Paris ca să-şi încoroneze prin teză studiile sale strălucite de matematici. HARET el însuşi declară că era cât p'aci „ca acest din urmă pas să nu-l poată face" fără telegrama ministrului. (Faptul e relatat de G. ADAMESCU în *Viaţa şi activitatea lui* SPIRU HARET, 1936, p. 23).

P. SERGESCU.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE GEOMETRIE

Problema Nr. 5116 [1]) a D-lui C. COŞNIŢĂ poate fi considerată ca aplicaţie euclidiană a unei probleme de geometrie proiectivă.

Fie pentapunctul plan *(abcde)* şi un punct variabil α pe latura *bc*. Se consideră conicele $\varphi = (abde\alpha)$, $\psi = (acde\alpha)$ şi se cere:

1. Infăşurătoarea dreptei ce uneşte polii unei drepte D faţă de conicele φ şi ψ.

2. Locul punctului de intersecţie al tangentelor în *b* şi *c* respectiv φ si ψ.

3. Infăşurătoarea tangentelor în α la φ şi ψ.

Făcând dreapta D să coincidă cu dreapta *de*, iar punctele *d* şi *e* să devie punctele ciclice ale planului, capăt problema amintită.

1) Acest articol a fost primit la redacţie la 1 Sept. 1939. Il publicăm acum, după ce s'a publicat soluţia problemei 5116, care l-a provocat. Soluţia problemei 5116 s'a publicat la pag. 174 din acest an.

Când punctul α descrie dreapta bc între conicele fascicolelor $\varphi = (abde)$ şi $\psi = (acde)$ există o corespondenţă omografică ω.

1. Polii x şi x' ai unei drepte D în raport cu conicele fascicolelor punctuale φ şi ψ, descriu conicele polare Γ_1 şi Γ_2 ale dreptei D faţă de φ şi ψ [1]).

Omografia ω dintre conicele celor 2 fascicole induce o omografie punctuală (xx') între conicele polare Γ_1 şi Γ_2.

Înfăşurătoarea dreptei xx' este o cuartică. Demonstrez pentru aceasta proprietatea:

Înfăşurătoarea dreptelor ce unesc puncte omoloage într'o omografie generală între 2 conice este de clasa IV.

Caut numărul tangentelor înfăşurătoarei care trec printr'un punct oarecare P. In punctul P între dreptele ce proiectează cele două conice polare, omografia ω induce o corespondenţă (2,2). In adevăr fie x şi x' o pereche de puncte corespunzătoare. Dreptei Px îi corespunde dreapta Px', dar îi mai corespunde şi dreapta Px_1 unde x_1 este corespunzătorul în omografia ω al punctului x_1 în care dreapta Px taie a doua oară conica.

Numărul tangentelor înfăşurătoarei loc ce trec prin P, este egal cu numărul dreptelor duble ale corespondenţei (2,2) [2]). Deci prin fiecare punct trec patru tangente ale înfăşurătoarei loc, adică acesta este de clasa IV.

Făcând ca punctele d şi e să devie puncte ciclice ale planului şi dreapta D improprie, x şi x' devin centrele cercurilor $(ab\alpha)$ şi $(ac\alpha)$, iar conicele polare degenerează în două drepte B şi C, dreapta D fiind acum coardă comună [3]).

Înfăşurătoarea dreptei xx', unind puncte corespunzătoare într'o omografie între două drepte, va fi de clasa II-a, nedegenerată dacă omografia este neomologică, adică punctul $s = B.C$ să nu fie unit. In cazul de faţă, punctului s îi corespund pe dreptele B şi C punctele de intersecţie b' şi c', ale perpendicularelor în b şi c pe bc. Deci înfăşurătoarea este nedegenerată. Ea va fi tangentă la B în b' şi la C în c'.

---

1) Conica polară a unei drepte faţă de conicele unui fascicol punctual este locul punctelor dublu conjugate cu punctele dreptei şi coincide cu locul polilor dreptei în raport cu conicele fascicolului.

2) O. CHISINI şi ENRIQUES. Geometrie algebrică. Vol. II.

3) CH. MICHEL. Complémentes de Géom. moderne.

Caut genul afin al înfăşurătoarei. In omografia (xx') se corespund şi $x\infty$ $x'\infty$ punctele improprii ale dreptelor B şi C, ca fiind centrele cercurilor degenerate (ab) şi (ac) corespunzătoare în omografia dintre fascicole. Deci conica este o parabolă. Cum $b'c'$ este polara punctului s, axa parabolei va fi dreapta ss', s fiind mijlocul lui $b'c'$. Tangenta la vârf este b_1c_1, care uneşte mijloacele c_1 şi b_1 ale laturilor ab şi ac. In adevăr b_1c_1 este tangentă la parabolă căci c_1 şi b_1 se corespund în omografia (xx') — sunt centrele cercurilor corespunzătoare în ω, când α este piciorul înălţimii lui a — şi anume este tangentă la vârful parabolei, căci este perpendiculară pe axa ss'. In adevăr, perpendiculara din s pe mijlocul lui bc, deci şi pe b_4c_1 va trece prin s' (se vede din trapezul $bcbc'$).

2. Tangentele în b şi c respectiv la φ şi ψ formează două fascicole omografice de centre b şi c şi punctul de intersecţie a două tangente omoloage va descrie o conică, care trece prin b şi c şi are în aceste puncte ca tangente dreptele corespunzătoare dreptei bc considerată în fiecare din cele două fascicole şi care sunt tangente şi conicei $(abcde)$. Cum acestea sunt diferite, conica este nedegenerată. Această conică trece şi prin punctul a. In adevăr, conicei degenerate (ab, de) din φ îi corespunde în ψ conica degenerată (ac, de). Tangentele în b şi c la aceste conice sunt laturile ab şi ac.

Deci conica loc coincide cu conica $(abcde)$, având trei puncte comune şi aceleaşi tangente în două din ele.

Făcând particularizarea euclidiană, conica loc devine cercul circumscris triunghiului abc.

Observaţie. Că locul geometric este un cerc se poate arăta observând că omografia între cele două fascicole de tangente este o congruenţă directă [1]). In adevăr, unghiul format de două tangente omoloage este constant fiind suplimentul unghiului bac. ($ba\alpha = yb\alpha$ şi $ca\alpha = yc\alpha$, y fiind punctul de intersecţie a 2 tangente omoloage).

3. Fie un punct r oarecare în plan. Să văd câte tangente în α la conicele $(abde\alpha)$ trec prin acest punct.

---

1) L. GODEAUX. Leçons de géom. projective.

Pentru aceasta folosesc o proprietate cunoscută [1]):

Locul punctelor de contact al tangentelor duse dintr'un punct la conicele unui fascicol punctual, este o cubică nedegenerată atâta timp cât punctul nu se află pe nicio conică degenerată a fascicolului.

Această cubică trece prin punctele bază ale fascicolului şi punctele principale (vârfurile triunghiului diagonal al patrupunctului bază).

Cubica taie dreapta *bc* în două puncte afară de *b*, deci prin punctul *r* trec două tangente a înfăşurătoarei căutate care va fi de clasa II-a.

Caut genul afin al acestei înfăşurătoare. Cubica relativ la un punct impropriu $g\infty$, este degenerată în dreapta improprie care este coardă comună a fascicolelor, şi o conică ce trece prin *b*. Deci înfăşurătoarea conţine şi dreapta improprie, va fi o parabolă (se poate vedea făcând pe $\alpha = g\infty$ şi cercul respectiv degenerează în *ab* şi dreapta împroprie pe care se află α şi deci aceasta este tangentă la cerc). Parabola e tangentă la *bc*.

La fel pentru înfăşurătoarea tangentelor în α la conicele (*abde*α), este o înfăşurătoare de clasa II-a şi anume o parabolă tangentă la *bc*.

C. BORŞ.

PREMIUL „INGINER ALEXANDRU ROŞU"

Subsemnaţii, membri în Comisiunea pentru decernarea premiului « ING. ALEXANDRU ROŞU », cercetând volumul XLVII al *Gazetei Matematice* pentru alegerea celui mai harnic corespondent al Gazetei, elev de liceu, am constatat următoarele:

Şi în cursul volumului XLVII cât şi în volumul XLVI D-l PAUL P. DRĂGHICESCU, atunci elev în clasa VIII-a, la Liceul Militar din Iaşi, apare în fruntea tuturor corespondenţilor, cu o bogată activitate, de astă dată nu numai ca rezolvitor de probleme, ci şi ca autor.

Astfel D-sa a publicat:

Un articol intitulat: *„Despre poziţia relativă a două puncte din planul unui triunghiu"*.

1) CH. MICHEL. Complément de Géométrie moderne.

Două note matematice (17 şi 32), două exerciţii (6 şi 8), şi o problemă propusă (5633), şi a rezolvat un număr de 58 probleme.

Dintre problemele rezolvate de D-l PAUL DRĂGHICESCU, trebuie să menţionăm problemele 5308, 5428, 5444, 5457 şi 5654 unde D-sa figurează ca singur rezolvitor; precum şi problemele 4396, 5125, 5134, 5233, 5386, 5452, 5557 şi 5590, unde soluţiile date de D-l DRĂGHICESCU sunt deosebit de bune.

Adăogând la cele de mai sus faptul că D-l DRĂGHICESCU figurează pe copertele volumului XLVII cu un număr de 118 probleme trimise ca rezolvate, ajungem la concluzia că activitatea D-lui DRĂGHICESCU a întrecut nu numai pe aceea a corespondenţilor elevi de liceu din volumul XLVII, ci şi din volumele precedente.

De altfel activitatea D-lui P. P. DRĂGHICESCU la *Gazeta Matematică*, a fost încununată:

Cu premiul I la concursul din anul 1942,

Cu premiul V la concursul din anul 1941,

Cu premiul VI la concursul din anul 1939, precum şi cu următoarele premii:

1. Premiul de aritmetică.
2. Premiul de geometrie elementară « G. ŢIŢEICA ».
3. Premiul « LT.-COL. GH. A. TĂNĂSESCU ».
4. Premiul de geometria triunghiului şi tetraedrului « N. BOTEA ».
5. Premiul de hărnicie « ING. AL. ROŞU », pentru anul XLVI.

Faţă de cele de mai sus, propunem ca premiul de hărnicie « ING. ALEXANDRU ROŞU » să se acorde pentru anul XLVII tot D-lui PAUL DRĂGHICESCU, azi elev la şcoala pregătitoare de ofiţeri de geniu.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI
« ING. ALEXANDRU ROŞU »
GABRIELA ŢIŢEICA, INN. D. STOICA,
AL. AL. ROŞU

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea generală din 18 Februarie 1943.

NOTE MATEMATICE

39. *Numeraţiunea la popoarele orientale.* Printre cărţile donate de D-l S. MARCOVICI *Gazetei Matematice* este şi una intitulată: *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux, anciens et modernes*, tipărită la Paris în 1860 de A. P. PIHAN.

In această carte se arată cum se numără şi cum se însemnează numerele la 45 de popoare precum şi la unele dialecte sau limbi înrudite ale lor. Cartea are 271 pagini de 160 × 95 mm şi se ocupă de următoarele limbi:

Afganistană, albaneză, annamită, arabă, armeană, abisiniană, barmană, bengală, caşimiră, chineză, coptă, coreană, egipţiană, etiopiană, georgiană, greacă, guzaratie, hebraică, indiană, industană, japoneză, javaneză, carnată, lu-shu, madecasă, mahrată, malabară, malaeză, mongolă, uriă, palmireniană, pandjabie, persană, persă, pheniciană, sanscrită, siameză, sindie, singaleză, siriacă, tamilă, telingă, tibetană şi turcă.

In expunere nu se urmează ordinea alfabetică dată aci; limbile sunt descrise în ordinea vechimii şi importanţei lor. La început este o introducere în care se găsesc date interesante. Astfel se arată că primul popor care a trecut dela scrierea numerelor cu litere la întrebuinţarea de cifre au fost Fenicienii. Metoda lor de a nota cu bare verticale grupate s'a mai găsit prin Egipt şi China. Aceştia utilizau şi bare orizontale. Falsificarea uşoară a unor numere astfel scrise i-au dus pe Chinezi la semne mai complicate, la cifre. Numerele se scriau pe coloane verticale şi apoi pe linii orizontale. Metodele chineze s'au răspândit în Japonia şi în Asia orientală.

Egipţienii au introdus scrierea *hieroglifică* a numerelor iar Asirienii scrierea *cuneiformă*. Numeraţiunea sanscrită care s'a răspândit în India a introdus notarea prin literile alfabetului şi prin unele semne pentru numere. De acolo s'a luat metoda de musulmani iar în Evul Mediu metodele lor de scrierea numerelor au trecut în Europa. Tot metodele indiene au trecut spre nord în Tibet şi Mongolia şi spre est în Siam. Autorul dă apoi modificările ce au suferit cifrele în decursul timpului.

Nu e locul aci de a intra în o expunere amănunţită a cuprinsului acestei interesante cărţi, care dă numele numerelor şi semnele cifrelor la cele 45 popoare şi la altele înrudite cu ele. Vom spicui numai unele chestiuni mai interesante şi mai curioase.

Afganii au nume special pentru suta de mii, pentru zece milioane, pentru bilion şi trilion. Albanezii au alfabetul grec ca numere. Anamiţii au luat numerele dela Chinezi cu unele modificări. Ei scriu numere pe coloane verticale dela dreapta la stânga.

I. I.

40. *Asupra problemei 5628.* 1. Reiau mai întâi problema 5628 în forma sub care a fost rezolvată de D-l GENERAL GH. BUICLIU [1]) şi anume:

Se consideră cercul:

$$x^2 + y^2 + 2Ry = 0. \qquad (c)$$

Să se determine parabola:

$$y = -ax^2 + bx. \qquad (\sigma)$$

care trece prin punctul O, *cel mai de sus al cercului* (C), *are axa paralelă cu verticala acestui punct, este tangentă cercului* (C) *şi astfel ca punând:*

$$a = \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi} \quad \text{şi} \quad b = tg\varphi$$

v *să aibă cea mai mică valoare.*

Presupun problema rezolvată. Fie A punctul de tangenţă şi B cel de al patrulea punct comun parabolei (σ) şi cercului (C). Tangenta comună în A şi coarda OB sunt evident egal înclinate pe direcţiunile Ox şi Oy, astfel că:

$$y = xtg\theta$$

fiind ecuaţiunea dreptei OB, ecuaţiunea tangentei în A este:

$$x\sin\theta + y\cos\theta - 2R\sin^2\frac{\theta}{2} = 0.$$

---

1) G. M., XLVIII, Februarie 1943, pag. 255.

(A este situat pe semicercul superior). Ecuaţiunea conicelor fascicolului linear definit de aceste drepte şi de cercul (C) este:

$$(x\sin\theta - y\cos\theta)\left(x\sin\theta + y\cos\theta - 2R\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \lambda(x^2 + y^2 + 2Ry) = 0.$$

Determinând pe λ astfel ca această ecuaţiune să reprezinte o parabolă cu axa paralelă lui Oy, se obţine:

$$\lambda = \cos^2\theta$$

$$\therefore\ y = -\frac{x^2}{2R\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2}} + x\,\mathrm{tg}\theta\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}.$$

Determinarea parabolei (σ) revine deci la aceea a unghiului θ, astfel ca:

$$v^2 = gR\left(1 + \mathrm{tg}^2\theta\,\mathrm{tg}^4\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta\,\cos^2\frac{\theta}{2}$$

să fie minimum. Punem pentru aceasta:

$$\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2} = u$$

$$\therefore\ v^2 = gR\,\frac{4u^2 - 3u + 1}{1 - u^2}.$$

Calculând derivata, se obţine:

$$(v^2)' = gR\,\frac{-3u^2 + 10u - 3}{(1-u^2)^2} = gR\,\frac{-3\left(u - \frac{1}{3}\right)(u-3)}{(1-u^2)^2}.$$

Minimul lui v^2 corespunde deci lui $u = \frac{1}{3}$ sau $\theta = 60^0$ şi avem:

$$v^2_{\min.} = \frac{1}{2}gR.$$

Unghiul φ, pe care îl face tangenta în O la parabola (σ) cu axa Ox, este determinat prin relaţiunea:

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\theta\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}.$$

Pentru parabola ce face minim pe ν^2, această relaţiune se reduce la: $\text{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $\varphi = 30^0$. —

2. D-l GENERAL GH. BUICLIU mi-a propus problema inversă următoare:

Se consideră parabola (σ) *şi două puncte* O *şi* O′ *dintre care primul este situat pe parabolă. Să se ducă prin punctele* O *şi* O′ *un cerc tangent parabolei* (σ).

Cercurile (c) care trec prin punctele O şi O′, trecând şi prin punctele ciclice I şi J ale planului, rezultă dintr'o propoziţiune demonstrată anterior [1]), că triunghiurile (T) ce au ca vârfuri punctele comune — diferite de O — acestor cercuri cu parabola (σ) sunt circumscrise unei conice fixe (π). Conica (π) este înscrisă în triunghiul O′IJ, este deci o parabolă cu focarul în O′.

In asemenea condiţiuni, cercurile căutate sunt cercurile care trec înafară de punctele O şi O′ şi prin câte unul din punctele de contact cu parabola (σ) ale tangentelor comune parabolei (σ) şi (π). Problema admite deci una sau trei soluţiuni reale.

Pentru cazul particular al problemei 5628, punctele O şi O′ sunt confundate, dreapta Δ definită de aceste puncte fiind însă diferită de tangenta în O la parabola (σ).

Parabola (π) are, în acest caz, focarul în O. Pentru a o defini complet este suficient a-i determina două tangente — ceea ce vom obţine particularizând cercul (c). Astfel, când cercul (c) se reduce la dreapta Δ şi dreapta dela infinit, triunghiul (T) corespunzător are ca latură dublă paralela la axa parabolei (σ) dusă din cel de al doilea punct comun acestei parabole cu Δ. Această paralelă este deci tangentă parabolei (π). De asemeni, polara în raport cu (σ) a punctului lui FRÉGIER relativ la punctul O este tangentă lui (π) după cum se deduce considerând cercul (c) format din isotropele OI şi OJ.

3. Teorema lui JOACHIMSTAL poate fi demonstrată cu ajutorul propoziţiunii utilizate la punctul precedent.

Fie (Σ) o conică cu centru şi P un punct pe această conică. Fie de asemeni, M un punct mobil pe normala în P la (Σ)

---

1) ŞERBAN GHEORGHIU. Câteva aplicaţiuni ale coordonatelor isotrope G. M., XLVIII, Ianuarie 1943, pag. 205.

şi A, B, C picioarele celorlalte trei normale duse din M la conica (Σ).

Se ştie că punctele P, A, B, C se găsesc pe o hiperbolă echilaterală (H), care trece prin M, prin centrul O al conicei (Σ) şi are ca direcţiuni asimptotice, direcţiunile axelor lui (Σ). Când M variază pe normala PM, hiperbolele (H) trec prin patru puncte fixe: P, O şi punctele de la infinit ale axelor. Rezultă din propoziţiunea amintită mai sus, că triunghiurile ABC rămân circumscrise unei parabole fixe (π). Pe de altă parte, rezultă dintr'o altă propoziţie demonstrată în acelaşi articol [1]), că cercurile circumscrise triunghiului ABC trec înafară de focarul parabolei (π) prin încă un punct fix P' situat pe conica (Σ). Particularizând ca mai sus, hiperbola (H) se găseşte că punctul P' este diametral opus lui P, ceea ce constituie teorema lui IOACHIMSTAL şi că focarul parabolei (π) este proiecţia ortogonală a centrului O pe tangentă în P' la (Σ).

ŞERBAN GHEORGHIU.

41. *Asupra notei No. 35* din G. M. XLVI—362, D-l M. F. VĂDUVA calculează produsele:

1. $$\sigma(p) \cdot \sigma(p^2) \cdot \sigma(p^3) \ldots \sigma(p^n),$$

2. $$\pi(p) \cdot \pi(p^2) \cdot \pi(p^3) \ldots \pi(p^n),$$

unde $\sigma(p)$ este suma numerelor prime cu p şi mai mici ca p, iar $\pi(p)$ produsul numerelor prime cu p şi mai mici ca p, p fiind un număr prim.

Imi propun să calculez produsele de mai sus, pentru p un număr oarecare.

1. Fie, spre exemplu,

$$p = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}.$$

Notez cu r produsul

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{l}\right).$$

1) ŞERBAN GHEORGHIU loc, cit. pag. 205.

Fiindcă

$$\sigma(N) = \frac{\varphi(N)}{2},$$

avem: $\sigma(p) = p\,\frac{pr}{2}$, $\sigma(p^2) = p^2\,\frac{p^2 r}{2}$,

$$\sigma(p^3) = p^3\,\frac{p^3 r}{2}, \ldots, \sigma(p^n) = p^n\,\frac{p^n r}{2}.$$

Deci:

$$\sigma(p).\sigma(p^2).\sigma(p^3)\ldots\sigma(p^n) = p\frac{pr}{2}.p^2\frac{pr}{2}.p^3\frac{p^3 r}{2}\ldots p^n\frac{p^n r}{2} =$$

$$= p^{2(1+2+3+\ldots+n)}\left(\frac{r}{2}\right)^n = p^{n(n+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^n = \left[\sigma\left(p^{\frac{n+1}{2}}\right)\right]^n$$

şi fiindcă rezultatul găsit în nota amintită pentru p număr prim se poate pune sub aceeaşi formă:

$$p^{n^2}\left(\frac{p-1}{2}\right)^n = \left[\sigma\left(p^{\frac{n+1}{2}}\right)\right]^n$$

rezultă că oricare ar fi numărul întreg p, avem egalitatea

$$\sigma(p).\sigma(p^2).\sigma(p^3)\ldots\sigma(p^n) = \left[\sigma\left(p^{\frac{n+1}{2}}\right)\right]^n.$$

2. Pentru uşurinţa calculului să presupun numărul p având numai trei factori primi:

$$p = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma.$$

In acest caz:

$$\pi(p) = p!\,\frac{ab^{\frac{p}{ab}}.bc^{\frac{p}{bc}}.ca^{\frac{p}{ca}}.\frac{p}{ab}!\frac{p}{bc}!\frac{p}{ca}!}{a^{\frac{p}{a}}.b^{\frac{p}{b}}.c^{\frac{p}{c}}.abc^{\frac{p}{abc}}.\frac{p}{a}!\frac{p}{b}!\frac{p}{c}!\frac{p}{abc}!}$$

$$\pi(p^2) = p^2!\,\frac{ab^{\frac{p^2}{ab}}.bc^{\frac{p^2}{bc}}.ca^{\frac{p^2}{ca}}.\frac{p^2}{ab}!\frac{p^2}{bc}!\frac{p^2}{ca}!}{a^{\frac{p^2}{a}}.b^{\frac{p^2}{b}}.c^{\frac{p^2}{c}}.abc^{\frac{p^2}{abc}}.\frac{p^2}{a}!\frac{p^2}{b}!\frac{p^2}{c}!\frac{p^2}{abc}!}$$

. . . . . .

$$\pi(p^n) = p^n!\,\frac{ab^{\frac{p^n}{ab}}.bc^{\frac{p^n}{bc}}.ca^{\frac{p^n}{ca}}.\frac{p^n}{ab}!\frac{p^n}{bc}!\frac{p^n}{ca}!}{a^{\frac{p^n}{a}}.b^{\frac{p^n}{b}}.c^{\frac{p^n}{c}}.abc^{\frac{p^n}{abc}}.\frac{p^n}{a}!\frac{p^n}{b}!\frac{p^n}{c}!\frac{p^n}{abc}!}.$$

Deci:

$$\pi(p).\pi(p^2)...\pi(p^2)=p!\,p^2!...\,p^n!\,\frac{ab^{\frac{p}{ab}\cdot\frac{p^n-1}{p-1}}.bc^{\frac{p}{bc}\cdot\frac{p^n-1}{p-1}}.ca^{\frac{p}{ca}\cdot\frac{p^n-1}{p-1}}}{a^{\frac{p}{a}\cdot\frac{p^n-1}{p-1}}.b^{\frac{p}{b}\cdot\frac{p^n-1}{p-1}}.c^{\frac{p}{c}\cdot\frac{p^n-1}{p-1}}.abc^{\frac{p}{abc}\cdot\frac{p^n-1}{p-1}}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\frac{p}{ab}!\,\frac{p^2}{ab}!...\,\frac{p^n}{ab}!\,\frac{p}{bc}!\,\frac{p^2}{bc}!...\,\frac{p^n}{bc}!\,\frac{p}{ca}!\,\frac{p^2}{ca}!...\,\frac{p^n}{ca}!}{\frac{p}{a}!\,\frac{p^2}{a}!...\,\frac{p^n}{a}!\,\frac{p}{b}!\,\frac{p^2}{b}!...\,\frac{p^n}{b}!\,\frac{p}{c}!\,\frac{p^2}{c}!...\,\frac{p^n}{c}!\,\frac{p}{abc}!\,\frac{p^2}{abc}!...\,\frac{p^n}{abc}!}.$$

Pentru $\alpha=\beta=\gamma$, avem $p=abc$. Deci:

$$\pi(p).\pi(p^2)...\pi(p^n)=p^n!\,\frac{ab^{c\frac{p^n-1}{p-1}}.bc^{a\frac{p^n-1}{p-1}}.ca^{b\frac{p^n-1}{p-1}}}{a^{bc\frac{p^n-1}{p-1}}.b^{ca\frac{p^n-1}{p-1}}.c^{ab\frac{p^n-1}{p-1}}.p^{\frac{p^n-1}{p-1}}}\times$$

$$\times\frac{c!\,pc!\,p^2c!...\,p^{n-1}c!\,a!\,pa!\,p^2a!...\,p^{n-1}a!\,b!\,pb!\,p^2b!...\,p^{n-1}b!}{bc!\,pbc!...\,p^{n-1}bc!\,ca!\,pca!...\,p^{n-1}ca!\,ab!\,pab!...\,p^{n-1}ab!}$$

Se observă că pentru $a=b=c=1$, regăsim formula găsită de D-l M. F. VĂDUVA pentru p număr prim:

$$\pi(p).\pi(p^2)...\pi(p^n)=\frac{p^n!}{p^{\frac{p^n-1}{p-1}}}.$$

3. Să calculăm suma: $\sum_1^n\sigma(p^i)$, avem lesne:

$$\sum_1^n\sigma(p^i)=\sigma(p).\frac{p^{2n}-1}{p^2-1}.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

42. *Asupra notei precedente.* Remarcăm însemnătatea acestei generalizări.

Aceasta ne poate da şi expresia:

$$\varphi(p).\varphi(p^2)...\varphi(p^n)=p^{\frac{n+1}{2}}.[\varphi(p)]^n$$

pentru p oricare.

I. L.

43. *Câteva factorizări noi.* Dintr'o tablă care dă soluţiile minime ale congruenţei

$$x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}; \quad 2 \cdot 10^{15} < p < 3 \cdot 10^{15}$$

pe care am terminat-o de curând şi pe care o voi publica în viitorul apropiat, deduc următoarele factorizări interesante, necunoscute până acum:

1. *Numere de forma* $x^4 + 1$.

$$598^4 + 1 = 203569 \times 628193$$

$$714^4 + 1 = 216841 \times 1198537$$

$$844^4 + 1 = 246289 \times 2060273$$

$$880^4 + 1 = 290737 \times 2062673$$

$$1027^4 + 1 = 2 \times 266081 \times 2090441$$

$$1090^4 + 1 = 17 \times 218833 \times 379441$$

$$1105^4 + 1 = 2 \times 73 \times 89 \times 401 \times 286129$$

$$1110^4 + 1 = 231169 \times 6566929$$

$$1153^4 + 1 = 2 \times 233 \times 16937 \times 223921$$

$$1265^4 + 1 = 2 \times 242617 \times 5277289$$

$$1293^4 + 1 = 2 \times 409 \times 16633 \times 205433$$

$$106273^4 + 1 = 2 \times 241 \times 250409 \times 251233 \times 4206473.$$

Iată şi două factorizări de numere de forma $x^8 + 1$:

$$99^8 + 1 = 2 \times 17 \times 1553 \times 250993 \times 696257$$

$$120^8 + 1 = 285553 \times 150578595217.$$

A. GLODEN
Doctor în Ştiinţele Matematice.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societăţii Politecnice din România. An. LVI. Nr. 10, Octomvrie 1942. Din lucrările societăţii. Luare în considerare de noi membri. D. A. STAN: Incercări asupra tălpilor de beton armat ale stâlpilor izolaţi. SEB. PETRESCU: Incercările locomotivelor DIESEL şi automotoarelor. Note, recensii, sumarele revistelor.

Revista Matematică Politehnica. Anul I, Nr. 1 din 15 Martie 1943 a Societății Matematice Politehnica.

Scoasă din *inițiativa elevilor Școalei Politehnice din București* pentru întreținerea unei atmosfere matematice permanente în timpul anilor de studiu precum și pentru menținerea contactului cu problemele tehnice tratate pe cale pur matematică, *Revista Matematică Politehnica* se prezintă în primul său număr cu următorul cuprins:

1. *Cuvânt înainte* de D-l PROF. C. C. TEODORESCU, Rectorul Politehnicei din București.

2. *Scrisoarea D-lui* PROF. D. POMPEIU către D-l ȘTEFANOVICI I. MIRCEA, Președintele Societății Matematice Politehnica.

3. *Scrisoarea D-lui* ȘTEFANOVICI I. MIRCEA către D-l PROFESOR D. POMPEIU.

4. *Cuvânt al Comitetului de conducere* către studenții Politehnicelor.

5. *Să ne amintim de* SPIRU HARET, de D-l V. ȘTEFAN.

6. *Transformarea expresiunilor de forma* $\sqrt{a \pm b}$, de D-l STĂNESCU N. VASILE.

7. *Asupra cuburilor primelor* n *numere*, de D-l SLT. BUZINCU IOAN

8. *Patratele numerelor terminate în 5*, de D-l CONSTANTIN MIHĂILESCU.

9. *Observațiuni asupra notelor menționate ad. punctul 7 și 8*, de D-l MIRCEA I. ȘTEFANOVICI.

10. *Asupra unei probleme de geometrie*, de D-l MIRCEA I. ȘTEFANOVICI.

11. *Asupra triunghiului pseudo-isoscel*, de D-l HORIA M. BODNĂRESCU.

12. *Bibliografie*, de D-na STELIANA G. VÂRGOLICI.

13. Probleme propuse pentru *liceu*, pentru *universitate* și pentru *tehnicieni.*

14. Regulamentul premiilor instituite de *Soc. Mat. Politehnica.*

Menționăm din *Cuvântul către studenți* al Comitetului de conducere: *« Mărturisim recunoștința noastră față de celelalte reviste de matematici pe care le rugăm să ne primească cu toată dragostea și încrederea ».*

Gazeta Matematică primind cu dragoste și căldură tânăra revistă îi urează *o viață îndelungată,* iar inițiatorilor și colaboratorilor elevi ai Politehnicei să continue cu hotărâre nestrămutată pe drumul de muncă productivă și desinteresată ce și-au propus.

AL. ST.

Revista Matematică din Timișoara. An. XXIII, Nr. 1. D. POMPEIU: Ceva despre parabolă. TH. ANGHELUȚĂ: Formarea ecuației, ale cărei rădăcini, sunt valorile raportului anarmonic, ale rădăcinilor ecuației de gradul al patrulea. D. V. IONESCU; Proprietăți ale tetraedrului

Revista Matematica Hispano-Americana. 1942, Nr. 5. R. OBLATH: Asupra produselor de numere consecutive. H. E. BUCHANAN: Studiul actual al celor trei corpuri. N. CUESTA: Numere reale generalizate.

Idem. 1942, Nr. 6. T. R. BACHILLER: SOPHUS LIE. H. E. BUCHANAN: Stadiul actual al problemei celor trei corpuri. R. OBLATH: Asupra produselor de numere consecutive. F. S. BALAGUER: Asupra unor rezultate relative la teoremele lui PICARD, LANDAU şi SCHOTTKY asupra unui criteriu de cuasi-normalitate. J. G. RUA: Asupra termenilor ciclici. A. FRAILE: Aplicaţiuni ale geometriei analitice.

România Aeriană. An. XVII, Nr. 7, Ianuarie 1942.

Ştiinţă şi Progres. I. I. STAMATE: Indentităţi algebrice. I. I. STAMATE: Asupra unui sistem de ecuaţii. I. CIOBANU: Avitaminoza la plante. E. V. GHIŞA: Smochinul. V. MARIAN: Viaţa lui GALILEO GALILEI. Diverse. Probleme propuse.

I. I STAMATE. Asupra unui sistem de ecuaţii (Extras din *Ştiinţă şi Progres*).

ING. A. A. BELEŞ şi ING. ŞT. G. BĂLAN. Mecanica teoretică şi aplicată, I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

A. PADOA. Théorie des nombres entiers absolus. Turin, 1902.
PEDRO NUNES. Sur la vie et l'oeuvre. Coimbra, 1915.
Donate de D-l ING. I. IONESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 914. *Se dă poligonul* ABCDEFGHI *şi fie* A, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i proecţiunile vârfurilor lui pe diagonala* AG. *Se dă*

$$Ab = n + 2 \quad , \quad bi = 2n + 2 \quad , \quad ic = 20 - n \quad , \quad cd = n + 6,$$

$$de = 60 - 3n \quad , \quad eh = 40 - 2n \quad , \quad hf = n + 10 \quad , \quad fG = n + 4,$$

$$Bb = n + 17 \quad , \quad Cc = n + 30 \quad , \quad Dd = 2n \quad , \quad Ee = 2n - 1,$$

$$Ff = 2n + 3 \quad , \quad Hh = 40 - 2n \quad , \quad Ii = 40 - n.$$

Să se arate că aria acestui poligon rămâne constantă când n *variază. Discuţie în privinţa semnului ariei.*

I. IONESCU.

Avem:

Sup. triungh. $AB_b = \frac{1}{2} A_b \cdot B_b = \frac{1}{2}(n+2)(n+17) =$
$= \frac{1}{2}(n^2 + 19n + 34)$

„ trapez. $_bBC_c = \frac{1}{2} bc\,(bB + cC) = \frac{1}{2}(n+22)(2n+47) =$
$= \frac{1}{2}(2n^2+91n+1034)$

„ „ $_cCD_d = \frac{1}{2} cd\,(cC + dD) = \frac{1}{2}(n+6)(3n+30) =$
$= \frac{1}{2}(3n^2+48n+180)$

„ „ $_dDE_e = \frac{1}{2} de\,(dD + eE) = \frac{1}{2}(60-3n)(4n-1) =$
$= \frac{1}{2}(-12n^2+243n-60)$

„ „ $_eEF_f = \frac{1}{2} ef\,(eE + fF) = \frac{1}{2}(50-n)(4n+2) =$
$= \frac{1}{2}(-4n^2+198n+100)$

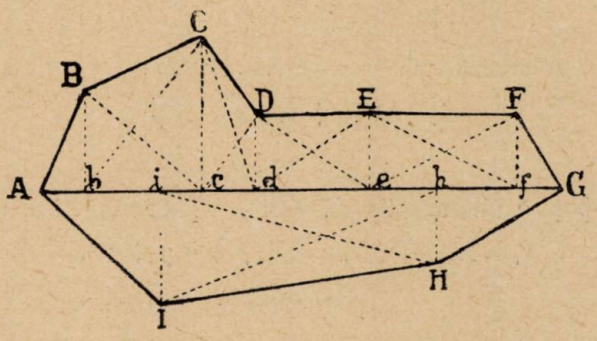
„ triungh. $_fFG = \frac{1}{2} fG \cdot fF = \frac{1}{2}(n+4)(2n+3) =$
$= \frac{1}{2}(2n^2+11n+12)$

„ „ $GH_h = \frac{1}{2} G_h \cdot H_h = \frac{1}{2}(2n+14)(40-2n) =$
$= \frac{1}{2}(-4n^2+52n+560)$

„ trapez. $_hHI_i = \frac{1}{2} hi\,(hH + iI) = \frac{1}{2}(126-5n)(80-3n) =$
$= \frac{1}{2}(15n^2-778n+10080)$

„ triungh. $I_iA = \frac{1}{2} iA \cdot I_i = \frac{1}{2}(3n+4)(40-n) =$
$= \frac{1}{2}(-3n^2+116n+160).$

Deci Sup. ABCDEFGHI $= \frac{1}{2}(12100) = 6050$ ceea ce era de demonstrat.



Această valoare găsită pentru arie este evident pozitivă deoarece este suprafaţa ei intrinsecă. Ea nu ne spune însă nimic de aşezarea ariei în plan, de aceea vom căuta să evaluăm separat,

pentru diferite valori ale lui n, porţiunile de arie aşezate deasupra şi dedesubtul diagonalei AG.

Fie S_1 partea de deasupra şi fie S_2 cea de dedesubtul diagonalei AG.

Lungimile Bb, Cc, Dd, eE, fF, hH şi Ii se anulează respectiv pentru $n = -17,\ -30,\ 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ 20,\ 40$. Ţinând seama de aceasta avem evident:

a) $n < -30$, $S_2 = S = 6050$, $S_1 = 0$ } Suprafaţa este toată sub diagonala AG (de aceeaşi parte).

b) $$-30 < n < -17.$$

Fie α şi β punctele unde dreptele CB şi CD taie pe AG. Avem:

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\alpha\beta \times Cc.$$

Ori

$$\alpha c = \frac{bc \,.\, Cc}{Bb + Cc} = \frac{(n+22)(n+30)}{2n+47}$$

$$c\beta = \frac{cd \,.\, Cc}{Cc + Dd} = \frac{(n+6)(n+30)}{3n+30}$$

$$\alpha\beta = \frac{(n+30)(5n^2+155n+942)}{(2n+47)(3n+30)}.$$

c) $$-17 < n < -\tfrac{3}{2}.$$

Fie β intersecţia lui CD cu AG. Avem:

$$S_1 = ABb + bBCc + cC\beta.$$

d) $$-\tfrac{3}{2} < n < 0$$

Fie β şi δ intersecţiile lui CD şi EF cu AG. Avem:

$$S_1 = ABb + bBCc + cC\beta + \delta Ff + fFG.$$

e) $$0 < n < \tfrac{1}{2}.$$

Fie γ şi δ intersecţiile lui DE şi EF cu AG. Avem:

$$S_1 = ABb + bBCc + cCDd + dD\gamma + \delta Ff + fFG.$$

f) $$\tfrac{1}{2} < n < 20.$$

Diagonala AG nu întretaie nicio latură a poligonului:

$$S_1 = AB b + b BC c + c CD d + d DE e + e EF f + f FG.$$

g) $20 < n < 40.$

Fie ε intersecţia lui IH cu AG. Avem:

$$S_2 = A i I + I i \varepsilon.$$

h) $n > 40.$

Toată suprafaţa este deasupra lui AG.

In felul acesta se poate studia poziţia ariei faţă de o dreaptă a ei. Cred că aceasta s'a înţeles prin discuţia ce se cere din enunţ.

Pentru unele din valorile lui *n*, unele din suprafeţele parţiale sunt negative; aceasta ne arată că am socotit sau avem să socotim, prin felul cum am împărţit suprafaţa în elemente, unele porţiuni de arie care nu aparţin ariei şi deci trebuiesc scăzute.

IOAN B. FLORESCU.

Au mai rezolvat problema fără a discuta semnul D-nii: † T. RESMERIŢĂ, M. MANOILESCU, SLT. MIHAIL I. FOCŞENEANU, I. V. MĂTIEŞ.

PROBLEMA 1679 [1]). *Să se arate că dacă* $(a_{1,k}, a_{2,k}, a_{3,k})$ *sunt respectiv rădăcinile ecuaţiunilor*

$$x^3 + 27 p_k x^2 - 1458 p_k^3 = 0, \qquad (k = 1, 2, 3),$$

putem scrie

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Δ *fiind determinantul elementelor* $a_{i,k}$.

I. MITITELU.

Prin substituţia $x = 9y$, ecuaţia dată devine

$$y^3 + 3 p_k y^2 - 2 p_k^3 = 0$$

$$\therefore \qquad (y + p_k)(y^2 - 2 p_k y - 2 p_k^2) = 0$$

ale cărei rădăcini sunt

$$y_{1,k} = - p_k \quad ; \qquad y_{2,k \text{ şi } 3k} = p_k(-1 \pm \sqrt{3})$$

---

1) In enunţul dela pag. 280, Vol. XVI, in termenul independent era p_k^2 in loc de p_k^3.

aşa că

$$\Delta = \left| -9p_1 \quad -9p_1(1+\sqrt{3}) \quad -9p_1(1-\sqrt{3}) \right|$$

$$\therefore \quad \Delta = -9^3 p_1 p_2 p_3 \left| 1 \;\; 1+\sqrt{3} \;\; 2-\sqrt{3} \right|$$

care este evident nul, având toate liniile identice.

I. V. MĂTIEŞ.

Notă. Să calculăm valoarea lui Δ pentru ecuaţia

$$x^3 + 27p_k x^2 - 1458p_k^2 = 0 \tag{1}$$

aşa cum a fost propusă la pag. 280 Vol. XVI. Facem substituţia $x = 9y$ şi avem ecuaţia

$$y^3 + 3p_k y^2 - 2p_k^2 = 0$$

de unde, punând $y = z - p_k$:

$$z^3 - 3p_k^2 z + 2(p_k^3 - p_k^2) = 0. \tag{2}$$

Rădăcinile ecuaţiei (2) sunt:

$$z_{1,k} = u_k - \frac{p_k^2}{u_k} \quad , \quad z_{2,k} = \alpha u_k - \frac{p_k^2}{u_k}\alpha^2 \quad ; \quad z_{3,k} = \alpha^2 u_k - \frac{p_k^2}{u_k}\alpha$$

unde

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

iar u_k este dat de

$$u_k = \sqrt[3]{p_k^2(1 - p_k + \sqrt{1-2p_k})} \; .$$

Determinantul Δ se poate scrie succesiv

$$\Delta = \left| 9y_{1,1} \;\; , \;\; 9y_{2,1} \;\; , \;\; 9y_{3,1} \right| \quad ; \quad (9y_{i,k} = a_{i,k})$$

$$\Delta = 9^3 \left| z_{1,1} - p_1 \;\; , \;\; z_{2,1} - p_1 \;\; , \;\; z_{3,1} - p_1 \right| \quad ; \quad z_{i,k} - p_k = y_{i,k}$$

$$\Delta = 9^3 \left| u_1 - \frac{p_1^2}{u_1} - p_1 \;\; , \;\; u_1\alpha - \frac{p_1^2}{u_1}\alpha^2 - p_1 \;\; , \;\; u_1\alpha^2 - \frac{p_1^2}{u_1}\alpha - p_1 \right|$$

$$\therefore \quad \Delta = 3^7 \alpha^2 (1-\alpha^2) p_1 p_2 p_3 \left| 1 \quad \frac{u_1}{p_1} \quad \frac{p_1}{u_1} \right| .$$

Notăm

$$\frac{u_1}{p_1} = a \; ; \; \frac{u_2}{p_2} = a' \; ; \; \frac{u_3}{p_3} = a''$$

şi avem

$$\Delta = 3^7 \alpha^2 (1 - \alpha^2) p_1 p_2 p_3 D \tag{3}$$

unde

$$D = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ a' & \frac{1}{a'} & 1 \\ a'' & \frac{1}{a''} & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{a}{a'} + \frac{a'}{a''} + \frac{a''}{a}\right) - \left(\frac{a}{a''} + \frac{a''}{a'} + \frac{a'}{a}\right)$$

sau

$$D = \Sigma \frac{a}{a'} - \Sigma \frac{a}{a''} . \tag{4}$$

Din (3) se vede că pentru ca Δ să fie nul este necesar şi suficient ca D să fie nul. Deci trebuie calculată valoarea lui D în (4). Cum u_k este un radical de ordinul trei vom calcula cubul lui D. Avem

$$D^3 = \left[\Sigma \left(\frac{a}{a'}\right)^3 + 3 \Sigma \frac{a^2}{a'a''} + 3 \Sigma \frac{aa''}{a'^2} + 6\right] -$$

$$- \left[\Sigma \left(\frac{a}{a''}\right)^3 + 3 \Sigma \frac{aa'}{a''^2} + 3 \Sigma \frac{a^2}{a'a''} + 6\right].$$

De unde, după reducerea termenilor asemeni

$$D^3 = \left(\frac{a^3}{a'^3} + \frac{a'^3}{a''^3} + \frac{a''^3}{a^3}\right) - \left(\frac{a^3}{a''^3} + \frac{a''^3}{a'^3} + \frac{a'^3}{a^3}\right)$$

$$\therefore \quad D^3 = \frac{a^6 a'^3 + a'^6 a''^3 + a''^6 a^3 - a^6 a''^3 - a''^6 a'^3 - a'^6 a^3}{a^6 a'^6 a''^6}$$

$$\therefore \quad D^3 = \frac{1}{a^3 a'^3 a''^3} \begin{vmatrix} a^3 & \frac{1}{a^3} & 1 \\ a'^3 & \frac{1}{a'^3} & 1 \\ a''^3 & \frac{1}{a''^3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^3 a'^3 a''^3} \vartheta$$

Cum

$$a, a', a'' = \frac{u_k}{p_k} \quad , \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\frac{u_k^3}{p_k^3} = \frac{1 - p_k + \sqrt{1 - 2p_k}}{p_k} \text{ şi } \frac{p_k^3}{u_k^3} = \frac{p_k}{1 - p_k + \sqrt{1 - 2p_k}} = \frac{1 - p_k - \sqrt{1 - 2p_k}}{p_k}$$

găsim

$$\vartheta = \begin{vmatrix} 1 & p_1 & \sqrt{1 - 2p_1} \end{vmatrix}$$

sau punând

$$(5) \qquad 1 - 2p_1 = t_1^2 \quad \therefore \quad p_1 = \frac{1 - t_1^2}{2}$$

ajungem la

$$\vartheta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1 - t_1^2}{2} & t_1 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \vartheta = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \end{vmatrix}$$

care este un determinant VANDERMONDE a cărui valoare este cunoscută.

Determinantul ϑ deci D şi apoi Δ nu este nul de cât dacă două din valorile t_1, t_2, t_3 sunt egale între ele, dar atunci, din cauza substituţiei (5) urmează că două din valorile p_1, p_2, p_3 sunt egale între ele.

Deci în cazul general Δ *nu este nul* pentru ecuaţia (2).

Reciproc când două din cantităţile p_1, p_2, p_3 sunt egale între ele Δ este evident nul.

I. V. MĂTIEŞ.

PROBLEMA 5176. *Să se arate că locul polului unei tangente mobile la cercul* C_1 *faţă de cercul* C_2, *situate în acelaşi plan, este o conică. Să se cerceteze natura conicei după poziţia şi mărimea relativă a celor două cercuri.*

M. SARIAN.

Se notează cu: M un punct oarecare pe cercul C_1 de rază R_1, P polul tangentei în M la C_1 faţă de cercul C_2 de rază R_2, QC polara centrului C_1 faţă de cercul C_2, Q şi C fiind picioarele perpendicularelor duse din P respectiv C_2 pe această polară; de asemenea cu S, T şi N picioarele perpendicularelor duse din C_2 respectiv pe C_1M, PQ şi pe tangenta în M la C_1.

Triunghiurile dreptunghice C_1SC_2 şi PTC_2 sunt asemenea deoarece au unghiurile din C_2 egale, ca având laturile două câte două perpendiculare. Deci:

$$\frac{C_1S}{PT} = \frac{C_1C_2}{PC_2}$$

dar $C_1S = R_1 - SM = R_1 - C_2N$ şi $PT = PQ - TQ = PQ - CC_2$

înlocuind în proporţia precedenta:

$$\frac{R_1 - C_2N}{PQ - C_2C} = \frac{C_1C_2}{PC_2}$$

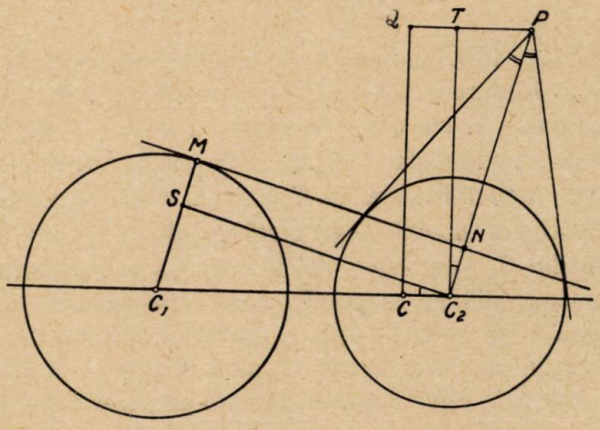
$$\therefore \quad R_1 \cdot PC_2 - PC_2 \cdot C_2N = C_1C_2 \cdot PQ - C_1C_2 \cdot C_2C$$

pe de altă parte se ştie că:

$$C_2C_1 \cdot C_2C = R_2^2 = PC_2 \cdot C_2N$$

deci relaţia precedentă devine:

$$\frac{PC_2}{PQ} = \frac{C_1C_2}{R_1} = \text{const.}$$



din care se deduce că punctul P descrie o conică de focar C_2, directriţă QC şi de excentricitate $\frac{C_1C_2}{R_1}$.

Discuţie. Natura conicei este în funcţie de poziţia şi de mărimea relativă a cercului C_2 faţă de cercul C_1. Astfel:

1. $C_1C_2 = R_1$: centrul C_2 se găseşte pe cercul C_1, P descrie o parabolă.

2. $C_1C_2 > R_1$: C_2 este exterior cercului C_1, P descrie o iperbolă.

$C_1C_2 = R_1\sqrt{2}$: C_2 se găseşte pe cercul lui MONGE al cercului C_1, excentricitatea fiind $\sqrt{2}$, iperbola descrisă de P este echilateră.

3. $C_1C_2 < R_1$: C_2 este în interiorul cercului C_1, P descrie o elipsă.

$C_1C_2 = 0$: cercurile sunt concentrice, punctele M şi N se confundă şi deoarece:

$$PC_2 \cdot C_2N = R_2^2 \quad \text{devine} \quad PC_2 \cdot C_2M = R_2^2$$

sau
$$PC_2 = \frac{R_2^2}{R_1} = \text{const.}$$

P descrie un cerc concentric cu cercurile C_1, C_2 şi de rază $\frac{R_2^2}{R_1}$.

4. $R_2 \to 0$, cercul C_2 se reduce la centrul său. In virtutea aceleiaşi relaţii avem:

$$PC_2 = \frac{R_2^2}{C_2N} \to 0.$$

P rămâne în C_2 pentru toate poziţiile tangentei în M pentru care $C_2N \neq 0$ adică cu excepţia tangentelor cercului C_1 care trec prin C_2. Pentru aceste două tangente, deoarece $C_2N = 0$ rezultă că PC_2 este nedeterminat şi punctul P poate ocupa orice poziţie pe dreptele perpendiculare în C_2 la cele două tangente. In acest caz, P descrie o conică degenerată în două drepte reale dacă tangentele din C_2 sunt reale, adică dacă C_2 este exterior cercului C_1. Dacă C_2 se află pe cercul C_1 conica degenerată se reduce la dreapta C_1C_2, iar dacă C_2 este în interiorul cercului C_1, cum tangentele acestui punct la cercul C_1 sunt imaginare şi locul descris de P se reduce la două drepte imaginare perpendiculare pe primele şi trecând prin C_2. In fine dacă C_2 se confundă cu C_1, P descrie dreptele izotrope trecând prin C_1.

S'au primit bune soluţii *analitice* dela D-nii: H. M. BODNĂRESCU, P. P. DRĂGHICESCU, OCT. E. GHEORGHIU, M. C. NICULESCU, C. PANTELIMON, M. D. POPA, D. RIPIANU AL. I. ROHR, M. L. RUSU, I. I. STAMATE (cu generalizare), MIREL D. STOENESCU, N. D. ŞTEFĂNESCU, TEODOR ŞERBAN (cu generalizare) şi E. N. WEGENER (Bucureşti).

PROBLEMA 5179. *Să se găsească locurile polurilor dreptelor lui* SIMSON, *față de cercul lui* EULER.

I. C. VASILIU.

Soluția I. Fie ABC un triunghiu oarecare înscris în cercul O, P un punct mobil pe acest cerc și ω centrul cercului lui EULER. Ducem prin O dreapta $O\alpha$ așa fel încât

$$\overset{\frown}{\alpha OA} + \overset{\frown}{\alpha OB} + \overset{\frown}{\alpha OC} = 2\pi$$

și notăm cu φ unghiul αOP. Dacă se ia ca axă de x dreapta ωX

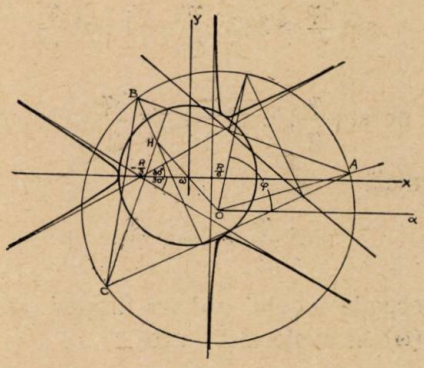


Fig. 1.

paralelă cu $O\alpha$ și ca origină punctul ω, se știe [1]) că ecuația dreptei lui SIMSON a punctului P, în funcție de parametrul φ este

$$(1) \qquad x \sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}.$$

Față de axele alese, ecuația cercului (ω) este

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

1) A se vedea nota dela finele soluției.

Coordonatele polului dreptei (1) faţă de cercul (2) vor fi date de sistemul

$$\frac{x}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{y}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{R}{2}}{\sin\frac{3\varphi}{2}}$$

din care se scoate

$$(3) \qquad x = \frac{R}{2}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi}{2}} \text{ şi } y = \frac{R}{2}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi}{2}}.$$

Avem

$$(4) \qquad \sin\frac{3\varphi}{2} = 3\sin\frac{\varphi}{2} - 4\sin^3\frac{\varphi}{2}.$$

Eliminăm pe $\sin\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\sin\frac{3\varphi}{2}$ între relaţiile (3), (4) şi relaţia fundamentală

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} = 1$$

şi obţinem că ecuaţia locului polului dreptei lui SIMSON a lui P faţă de cercul (ω) în axele alese este

$$\frac{R}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 3\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 4\frac{x^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$

sau după efectuarea calculelor

$$(5) \qquad y^2 = x^2\frac{2x+R}{6x-R}.$$

Locul este deci o cubică; pentru construcţia ei scriem ecuaţia (5) sub forma

$$(6) \quad y = \pm x\sqrt{\frac{x+\frac{R}{2}}{3x-\frac{R}{2}}} = \pm\frac{x}{3x-\frac{R}{2}}\sqrt{\left(x+\frac{R}{2}\right)\left(3x-\frac{R}{2}\right)}.$$

Cubica fiind simetrică față de ωx, vom examina numai ramura corespunzătoare semnului $+$. Curba are puncte reale numai pentru

$$x < -\frac{R}{2} \quad \text{și} \quad \frac{R}{6} < x$$

în intervalul

$$-\frac{R}{2} < x < \frac{R}{6} \tag{7}$$

curba fiind imaginară.

Pentru $x = -\frac{R}{3}$ avem $y = 0$.

Pentru $x = \frac{R}{6}$ avem $y = \infty$, deci dreapta

$$x - \frac{R}{6} = 0$$

este o asimptotă. Pentru $x = \pm\infty$ avem $y = \infty$.

Din (6) se scoate

$$y' = \frac{6x^2 - \frac{R^2}{2}}{2\sqrt{\left(x+\frac{R}{2}\right)\left(3x-\frac{R}{2}\right)^3}}$$

care se anulează pentru

$$x_1 = -\frac{R}{2\sqrt{3}} \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{R}{2\sqrt{3}}$$

x_1 nu interesează căci se găsește în intervalul (7).

Semnul lui y' fiind dat de numărător, pentru x înafara intervalului (7), avem

$y' < 0$ pentru $\frac{R}{6} < x < \frac{R}{2\sqrt{3}}$

$y' > 0$ „ $\frac{R}{2\sqrt{3}} < x$

$y' > 0$ „ $x < -\frac{R}{2}$.

Pentru x_2, funcţiunea prezintă deci un minim a cărui valoare este

$$y_{\min} = \frac{R}{2\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Pentru $x = -\frac{R}{2}$, $y' = \infty$. Deci în punctul $\left(-\frac{R}{2}, 0\right)$ cubica loc are o tangentă paralelă cu ωy; această tangentă este tangentă şi la (ω). In acest punct, cubica loc şi cercul (ω) sunt deci tangente.

Deoarece

$$y'' = \frac{R^3}{2\sqrt{\left(x+\frac{R}{2}\right)^3\left(3x-\frac{R}{2}\right)^5}}$$

nu se anulează pentru valori finite ale lui x, cubica loc nu are puncte de inflexiune.

Tabloul următor rezumă discuţia de până aici:

x	$-\infty$		$-\frac{R}{2}$		$\frac{R}{6}$		$\frac{R}{2\sqrt{3}}$		$+\infty$
y'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+$	$+\infty$		∞	$-$	0	$+$	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{R}{2\sqrt{3}}-\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Procedând după metodele obişnuite, se găseşte că curba admite şi asimptota

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{R}{3\sqrt{3}}$$

care face 30^0 cu axa absciselor pe care o taie în punctul $\left(-\frac{R}{3}, 0\right)$ de pe cercul (ω).

Cu aceste elemente se construieşte imediat curba loc, care are forma dela pag. 367, unde s'au trasat şi ramurile corespunzătoare lui y negativ.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

Soluția II. Se știe că dreptele lui SIMSON înfășoară hipocicloida lui STEINER, care are 3 puncte de întoarcere și că cercul lui EULER este tritangent acestei hipocicloide [1]). Problema revine la a găsi transformata prin polare reciproce a unei hipocicloide cu trei puncte de întoarcere, față de cercul său tritangent. Ecuațiile parametrice ale hipocicloidei sunt

$$(1) \qquad x = 2a\cos\varphi + a\cos 2\varphi \;\; ; \;\; y = 2a\sin\varphi - a\sin 2\varphi$$

iar ecuația cercului tritangent este

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Tangenta într'un punct curent al hypocicloidei este

$$(3) \qquad x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} - a\sin\frac{3\varphi}{3} = 0.$$

Polul dreptei (3) față de cercul (2) este

$$x = \frac{a\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi}{2}} \;, \quad y = \frac{a\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi}{2}} \;.$$

Notând

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$$

rezultă că ecuațiile parametrice ale locului căutat sunt

$$(4) \qquad x = a\frac{1+t^2}{3-t^2} \;, \quad y = a\frac{1+t^2}{t(3-t^2)} \;.$$

Curba reprezentată prin aceste ecuații este o cubică unicursală având un punct dublu izolat în origină și o asimptotă

$$x - \frac{a}{3} = 0$$

paralelă cu Oy. Direcțiile asimptotice oblice sunt date de

$$u = \lim_{t\to\pm\sqrt{3}} \frac{y}{x} = \lim_{t\to\pm\sqrt{3}} \frac{1}{t} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \;.$$

1) C. COȘNIȚA. Coordonnées barycentriques, p. 153.

Ordonata la origine a acestor asimptote este

$$d = \lim_{t \to \pm\sqrt{3}} a\frac{1+t^2}{3-t^2}\left[\frac{1}{t} \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \pm\frac{2a}{3\sqrt{3}}.$$

Deci asimptotele oblice sunt

$$y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}} \pm \frac{2a}{3\sqrt{3}} \quad \therefore \quad \pm 3\sqrt{3}y = 3x + 2a.$$

Studiind, după regulile cunoscute variația curbei (4) se ajunge la construcția cubicei dela soluția I. Dacă eliminăm pe t între ecuațiile (4), găsim că locul în coordonate carteziene este

$$a(x^2 + y^2) + x^3 - 3xy^2 = 0$$

care pentru $a = \frac{R}{2}$, devine ecuația (5) de la soluția I.

P. P. DRĂGHICESCU
(Șc. Ofițeri de geniu).

Observațiuni. 1°. Asimptotele cubicei (5) formează un triunghiu echilateral, al cărui centru de greutate este în ω.

2°. Cele trei ramuri ale cubicei sunt superpozabile, ele având ca axă de simetrie, înălțimile triunghiului format de asimptote.

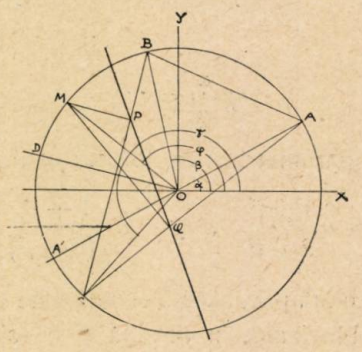


Fig. 2.

3°. Se știe că dreapta lui SIMSON înfășoară hipocicloida lui STEINER și taie continuu cercul lui EULER căruia îi este tangentă în 3 puncte comune cu punctele de tangentă ale lui (ω) cu hipocicloida lui STEINER. Rezultă deci că cubica loc *este tangentă cercului* (ω) *în aceste trei puncte.*

4. Intru cât ecuația (1) dela pagina 367 a dreptei lui SIMSON nu se găsește în tratatele obișnuite, găsesc necesar să o stabilesc împrumutând metoda dată la pag. 135 *Cours de mathématiques spéciales sous forme de problèmes*, par R. NOGUÈS.

Fie triunghiul ABC raportat la două axe care trec prin centrul O al cercului circumscris. Notăm cu α, β, γ unghiurile măsurate în sens pozitiv pe care OA, OB, OC le fac cu axa Ox, pe care o alegem aşa încât

(1) $$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi.$$

Pentru construcţia lui Ox, procedăm după cum urmează:
Fie A' diametralul lui A şi OD bisectoarea lui BOC. Luăm

$$\sphericalangle XOA = \frac{2}{3}\overset{\frown}{DOA'}$$

şi observăm că

$$\alpha = \alpha \;;\; \beta = \alpha + \overset{\frown}{AOB} \;;\; \gamma = \alpha + \overset{\frown}{AOB} + \overset{\frown}{BOC}$$

sau adunând

(2) $$\alpha + \beta + \gamma = 3\alpha + 2\overset{\frown}{AOB} + \overset{\frown}{BOC}.$$

Pe de altă parte prin construcţie avem

$$\alpha = \overset{\frown}{xOA} = \frac{2}{3}\overset{\frown}{DOA'} = \frac{2}{3}\left(\pi - \overset{\frown}{AOB} - \frac{\overset{\frown}{BOC}}{2}\right).$$

Ducând această valoare în membrul II din (2), găsim pe (1).
Faţă de axele luate avem

$$B\,(R\cos\beta,\ R\sin\beta) \quad \text{şi} \quad C\,(R\cos\gamma,\ R\sin\gamma)$$

de unde se deduce ecuaţia dreptei BC

(BC) $$x\cos\frac{\beta+\gamma}{2} + y\sin\frac{\beta+\gamma}{2} - R\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 0$$

sau ţinând seama de (1).

(3) $$-x\cos\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2} = R\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Fie $M\,(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi)$ un punct oarecare pe cercul O. Ecuaţia perpendicularei MP din M pe BC de ecuaţie (3), este

(4) $$x\sin\frac{\alpha}{2} + y\cos\frac{\alpha}{2} = R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right).$$

Din (3) şi (4) se scot coordonatele lui P, care se pun sub formele

$$(x_1, y_1) \quad \begin{cases} \dfrac{x_1}{R} = \dfrac{\cos\beta + \cos\gamma}{2} + \dfrac{\cos\varphi - \cos(\alpha+\varphi)}{2} \\ \dfrac{y_1}{R} = \dfrac{\sin\beta + \sin\gamma}{2} + \dfrac{\sin\varphi + \sin(\alpha+\varphi)}{2}. \end{cases}$$

La fel se găseşte că coordonatele x_2, y_2 ale proiecţiei Q a lui M pe AC sunt date de

$$(x_2, y_2) \quad \begin{cases} \dfrac{x_2}{R} = \dfrac{\cos\gamma + \cos\alpha}{2} + \dfrac{\cos\varphi - \cos(\beta + \varphi)}{2} \\ \dfrac{y_2}{R} = \dfrac{\sin\gamma + \sin\alpha}{2} + \dfrac{\sin\varphi + \sin(\beta + \varphi)}{2} \end{cases}.$$

Ecuaţia dreptei care trece prin (x_1, y_1), (x_2, y_2) se poate scrie, după diferite transformări, sub forma

$$(5) \quad \frac{2x}{R}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{2y}{R}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\left(\alpha + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\beta + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\gamma + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\frac{3\varphi}{2} = 0.$$

Centrul de greutate G al triunghiului ABC are coordonatele

$$G\left[\frac{R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)}{3}, \frac{R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)}{3}\right].$$

De oarece

$$O\omega = \frac{3}{2}OG$$

coordonatele lui ω vor fi

$$\omega\left[\frac{R}{2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma), \frac{R}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\right].$$

Deplasăm acum axele de coordonate paralel cu ele în ω şi folosind formulele obişnuite de schimbarea axelor ecuaţia (5) devine

$$x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}$$

adică ecuaţia (1) de la pag. 367.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

Generalizare. Ne propunem a găsi *locul polurilor dreptelor lui* SIMSON *ale unui triunghiu dat, faţă de un cerc oarecare din planul triunghiului.*

Fie

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

ecuaţia unui cerc din planul triunghiului ABC, înscris în cercul de rază R. Polara unui punct P(X, Y) faţă de acest cerc se poate scrie

$$x(X - a) + y(Y - b) - aX - bY + c = 0.$$

Pentru ca această dreaptă să fie chiar dreapta lui SIMSON, de ecuație

$$x \sin \frac{\varphi}{2} + y \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{R}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}$$

este necesar și suficient ca

$$\frac{X - a}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{Y - b}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{-aX - bY + c}{-\frac{R}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}} .$$

Ridicând primii doi membri la patrat, aplicând o proprietate a rapoartelor și apoi extrăgând rădăcina patrată avem

$$\frac{X - a}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{Y - b}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{(X-a)^2 + (Y-b)^2}}{1} = \frac{-aX - bY + c}{-\frac{R}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}}$$

De aici se scot valorile lui $\sin \frac{\varphi}{2}$, $\sin \frac{3\varphi}{2}$ și ținând seama de

$$\sin \frac{3\varphi}{2} = 3 \sin \frac{\varphi}{2} - 4 \sin^3 \frac{\varphi}{2}$$

ajungem la ecuația

$$\frac{3(Y-b)^2 - (X-a)^2}{(Y-b)^2 + (X-a)^2} = \frac{2(aX + bY - c)}{R(X-a)} .$$

Deci *locul polurilor dreptelor lui* SIMSON *față de un cerc oarecare din planul triunghiului este o cubică.*

Sugerez corespondenților să cerceteze dacă printre cubicele date de ecuația precedentă, nu se găsesc și în ce cazuri cubice remarcabile cunoscute în geometria triunghiului în legături cu anume cercuri caracteristice din planul acestuia.

ȘT. S. MIHĂIESCU.

PROBLEMA 5381. *Să se verifice identitatea*

$$(\Sigma A^2)(\Sigma u x_0 - \Sigma A u a^2) + \Sigma A u (\Sigma A^2 a^2 - 1) = 0,$$

unde

$$A = \frac{x_0}{a^2 - \rho^2} , \quad B = \frac{y_0}{b^2 - \rho^2} , \quad C = \frac{z_0}{c^2 - \rho^2}$$

și știind că

$$\sum \frac{x_0^2}{a^2 - \rho^2} = 1.$$

M. GHERMĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: EMIL ISAC, D-TRU NACHE și GH. D. VASILIU.

Avem

$$\Sigma ux_0 = \Sigma Au(a^2 - \rho^2) = \Sigma Aua^2 - \rho^2 \Sigma Au,$$

astfel că egalitatea dată devine

$$(\Sigma A^2)(-\rho^2 \Sigma^2 Au) + \Sigma Au(\Sigma A^2 a^2 - 1) = 0$$

sau

$$(\Sigma Au)[\Sigma A^2(a^2 - \rho^2) - 1] = 0.$$

Dacă $\Sigma Au = 0$, egalitatea devine identitate. Dacă $\Sigma Au \neq 0$, egalitatea se reduce la

$$\Sigma A^2(a^2 - \rho^2) = 1.$$

care este identică cu relația de condiție dată.

PROBLEMA 5559. *Dacă* $p_1, p_2, \ldots p_n$ *reprezintă numerele prime cu* N *și inferioare lui, atunci avem:*

$$p_1^n + p_2^n + \ldots + p_n^n = \mathcal{M}N + \varphi(N)$$

unde $\varphi(N)$ *reprezintă indicatorul lui* N.

(Enunț rectificat).

COMANDOR I. LINTEȘ.

Numerele p_i fiind prime cu N, iar $n = \varphi(N)$, atunci avem:

$$p_i^n - 1 = \mathcal{M}N.$$

Prin urmare:

$$\sum_1^n p_i = \mathcal{M}N + n = \mathcal{M}N + \varphi(N).$$

Notă. In enunț s'a trecut din eroare $\mathcal{M}\varphi(N)$.

D-l D. VASILIU a arătat prin exemple numerice că, așa cum s'a publicat problema, nu este totdeauna adevărată.

I. L.

PROBLEMA 5686. *Să se construiască triunghiul* ABC, *asemenea cu un triunghiu dat, cunoscând poziția vârfului* A *și știind că* B *și* C *se află pe două drepte date.*

G-L D. PETROVANU.

Soluție, dată de D-nii: G. GH. DONȚU (Liceul de aplicație, Iași); M. GH. POPESCU (Liceul Pitești); OCTAV C. GHEORGHIU (Liceul Internat, Iași) și P. P. DRĂGHICESCU.

Presupunem problema rezolvată și fie D și E punctele în care cercul ABC taie pe Δ și pe Δ'. Patrulaterele inscriptibile ABCE și ACBD dau

$$\sphericalangle AE\Delta' = \sphericalangle ABC \quad \text{și} \quad \sphericalangle AD\Delta = \sphericalangle ACB.$$

Problema revine la a construi triunghiul ADE în care se cunosc unghiurile (AD, Δ) și (AE, Δ'). Problema este totdeauna posibilă.

Notă. 1°. D-l MARCEL COTARIU (Brăila) a rezolvat problema, căutând locurile lui B și C, care sunt niște drepte.

2°. Problema este cunoscută. Ea este publicată și în *Culegere de Probleme de geometrie* de G. ȚIȚEICA, problema 19, pag. 124, cap. VII, ediția 1901.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 5694. *Un patrat* ABCD *este împărțit printr'o dreaptă paralelă cu două laturi opuse, în dreptunghiurile* AMND *și* MNCB. *Cunoscând reportul ariilor acestor dreptunghiuri și lungimea* $\overline{MD}$, *să se reconstruiască patratul.*

VIRGIL GHIȚESCU.

Soluție geometrică dată de D-ra IACOMI D. ELENA (Fundația „Regele Ferdinand", Iași) și de D-nii: FL. CĂRUNTU, MARCEL COTARIU, PAUL DRĂGHICESCU, ȘT. MIHĂILESCU, GH. PUCHIU, C. D. EFTIMIE, I. I. BUZINCU, SUBLOC. N. ȘTEFĂNESCU, N. T. ROȘU, M. BÂRZESCU, D. NACHE, C. C. ILIESCU, M. M. PĂTRĂȘCIOIU, I. D. PÂRVAN și GH. VRÂNCEANU.

Fie

$$\frac{\text{aria AMND}}{\text{aria MNCB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{m}{n} \quad ; \quad \overline{MD} = l.$$

Pe o dreaptă indefinită xy luăm un punct M. Luăm apoi de o parte şi de alta a acestuia segmentele $\overline{MA'}$ şi $\overline{MB'}$, egale respectiv cu m şi n unităţi oarecare. Construim patratul A'B'C'D' de latură $\overline{A'B'}$. Pe semi-dreapta MD' luăm $\overline{MD} = l$. Cunoscând poziţia vârfului D şi suportul xy al laturii AB, construim uşor patratul cerut ABCD.

Soluţie algebrică dată de D-nii: DAN CORBARU, M. COTARIU, AUREL CUBAT, GH. DONŢU, TR. DUMITRESCU, ST. FLORICĂ, N. V. IONESCU, M. MIŞICU, N. PITIŞ, CLAUDIU SENI, C. STAICU, R. VOINEA, EUG. WEGENER, M. I. CONSTANTINESCU, M. MANOLACHE, C. C. TINCU, I. VASILESCU şi LUCIAN GH. MUNTEAN (Liceul Alba-Iulia).

Introducem notaţiile:

$$\overline{AM} = x \quad , \quad \overline{MB} = y \quad ; \quad \frac{\text{aria AMND}}{\text{aria MNCB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = k \quad ; \quad \overline{MD} = l.$$

Conform enunţului avem următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2 + (x+y)^2 = l^2 \\ \dfrac{x}{y} = k. \end{cases}$$

Rezolvarea acestui sistem este elementară, iar soluţia pozitivă este

$$x = \frac{kl}{\sqrt{(k+1)^2 + k^2}} \quad ; \quad y = \frac{l}{\sqrt{(k+1)^2 + k^2}}$$

l fiind o lungime dată, iar k un număr abstract, se vor construi geometric formulele de mai sus care dau pe x şi y. Având d. ex. $k = \frac{2}{3}$, rezultă

$$y^2 = l \times \frac{9}{29} l$$

şi deci vom obţine pe y construind media proporţională a segmentelor l şi $\frac{9}{29} l$ etc.

Notă. Cu privire la soluţia geometrică, menţionăm că patratele A'B'C'D', ABCD, sunt două figuri omotetice, centrul de omotetie fiind M, iar raportul de omotetie

$$\frac{\overline{MD'}}{\overline{MD}} = \frac{\sqrt{(m+n)^2 + m^2}}{l}.$$

V. GH.

PROBLEMA 5725. *Fie un triunghiu oarecare* ABC *de laturi a, b, c. Dealungul laturilor lucrează, în sensul* ABC, *trei forţe* F_a, F_b, F_c, *de rezultantă* F *şi trei forţe* P_a, P_b, P_c *de rezultantă* P. *Să se arate că în cazul când rezultantele sunt paralele avem:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ F_a & F_b & F_c \\ P_a & P_b & P_c \end{vmatrix} = 0.$$

GABRIELA ŢIŢEICA.

Soluţie dată de D-l E. MODÂLCĂ (Politechnica Bucureşti).

Fie Oxy un sistem de axe rectangulare, axa Ox confundându-se cu latura BC a triunghiului. Fie X_f, Y_f componentele lui F şi X_p, Y_p componentele lui P. Avem:

$$X_f = F_a - F_b \cos C - F_c \cos B \quad ; \quad Y_f = F_b \sin C - F_c \sin B$$

$$X_p = P_a - P_b \cos C - P_c \cos B \quad ; \quad Y_p = P_b \sin C - P_c \sin B.$$

Rezultatele fiind paralele avem:

$$\frac{X_f}{Y_f} = \frac{X_p}{Y_p}$$

sau înlocuind

$$(F_a - F_b \cos C - F_c \cos B)(P_b \sin C - P_c \sin B) =$$

$$= (P_a - P_b \cos C - P_c \cos B)(F_b \sin C - F_c \sin B).$$

Făcând calculele necesare şi grupând termenii, avem:

$$\sin C (F_a P_b - F_b P_a) - F_c P_b (\sin B \cos C + \sin C \cos B) -$$

$$- \sin B (F_a P_c - F_c P_a) + F_b P_c (\sin B \cos C + \sin C \cos B) = 0.$$

$$\therefore \quad (F_b P_c - F_c P_b) \sin A - (F_a P_c - F_c P_a) \sin B +$$

$$+ (F_a P_b - F_b P_a) \sin C = 0$$

şi cum

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

rezultă

$$a (F_b P_c - F_c P_b) - b (F_a P_c - F_c P_a) + c (F_a P_b - F_b P_a) = 0$$

care nu este altceva decât desvoltarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ F_a & F_b & F_c \\ P_a & P_b & P_c \end{vmatrix} = 0.$$

S'au primit de asemenea soluţii foarte bune dela D-nii: MANOLACHE C. MIRCEA (Politechnica Bucureşti), MARIN GH. POPESCU (clasa VIII-a, Piteşti), OCTAV C. GHEORGHIU (clasa VIII-a liceul Internat, Iaşi), BAKONYI C. (Timişoara).

G. Ţ.

EXERCIŢII

18. Să se arate că între elementele triunghiului avem

$$\frac{1}{p^2} \sum \frac{2r_a + h_a}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} a = 6.$$

CPT. E. ŞT. IACOB.

R. Se ţine seamă de relaţiile cunoscute

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c$$

$$r_a = \frac{S}{p - a}, \ldots \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r_a}{p}$$

şi se deduce imediat relaţia din enunţ.

19. Intr'un triunghiu cu laturile în progresie aritmetică avem

$$\sin \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

MARCEL D. COTARIU.

R. Din relaţiile fundamentale se scoate

(1) $$\sin A + \sin C = 2 \sin B.$$

In orice triunghiu avem

$$\sin A + \sin C - \sin B = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

De unde ţinând seamă de (1)

$$\sin B = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

are este relaţia din enunţ, scrisă sub altă formă.

20. Se notează cu T, S_T, N, S_N respectiv tangenta, subtangenta, normala şi subnormala unui punct oarecare P de pe o cicloidă. Să se demonstreze că

$$\left[\frac{S_T}{T}\right]^2 + \left[\frac{S_N}{N}\right]^2 = 1.$$

E. N. WEGENER.

R. Ecuaţiile parametrice ale cicloidei fiind

$$x = a(\varphi - \sin\varphi) \quad , \quad y = a(1 - \cos\varphi)$$

vem

$$T = 2a \sin\frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \quad , \quad N = 2a \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$S_T = 2a \sin^2\frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \quad , \quad S_N = a \sin\varphi$$

de unde se deduce imediat relaţia din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

5775. Să se descompuie în doi factori numărul 33337.

I. IONESCU.

5776. Dacă medianele unui triunghiu verifică relaţia:

$$m_a^2 = m_b^2 + m_c^2,$$

iar laturile a, b, c sunt numere întregi, atunci:

$$b + 2c = \text{M5} \quad , \quad 2b - c = \text{M5}.$$

G. G. CONSTANTINESCU.

5777. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_m$) codivizorul maxim şi $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ comultiplu minim al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Să se demonstreze că, dacă $p < n < m$,

$$\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p}) = 1 \quad \text{şi} \quad \Pi(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p-1}) \neq 1$$

produsul:

$$\Pi([a_1, a_2, \ldots, a_n], a_{n+1}, \ldots, a_m)$$

este o putere a s^a perfectă, unde

$$s = (m - n + 1)/(m - n + 1 \quad , \quad [1, 2, \ldots, n - p]),$$

iar II referindu-se respectiv la toate combinările câte

$$(m-p)\ ,\ (m-p-1)$$

și n ale numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ care intră în

$(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p})$; $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p-1})$ și $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

(Generalizarea problemei 1885, G. M., XVIII, 457; a se vedea și nota 42, G. M., XLVII, 411).

IOAN B. FLORESCU.

5778. Se dau sumele:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i^3 - S_i^1}{S_i^2 - S_i^1} \quad ; \quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i^4 - S_i^2}{S_i^3 - S_i^1};$$

unde

$$S_i^p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + i^p;$$

1°. Să se calculeze suma seriei al cărei termen general este:

$$T_n = \frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2};$$

2°. Să se arate că:

$$\lim_{n \to 0} (T_n)^n = \lim_{n \to \infty} (\sigma_1)^{\frac{1}{n}}.$$

C. MIHU.

5779. Dacă numărul real a satisface relației $4a - 1 > 0$. ecuația de variabilă reală:

$$x^6 - 2x^5 + (6a-1)x^4 - 2(2a-1)x^3 + a(9a-4)x^2 - 2a^2x + 4a^3 = 0$$

are rădăcinile situate pe două drepte trecând prin origină și simetrice în raport cu axa reală.

CPT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

5780. Punem:

$$P_i(x) \equiv (x+\lambda)^m x^i \equiv p_0^{(i)} x^{m+n-2} + p_1^{(i)} \cdot x^{m+n-3} + \ldots + p_{m+n-2}^{(i)}$$

$$(i = n-2,\ n-1, \ldots, 1, 0)$$

și

$$Q_i(x) \equiv (x+\lambda)^n \cdot x^i \equiv q_0^{(i)} x^{m+n-2} + q_1^{(i)} x^{m+n-3} + \ldots + q_{m+n-2}^{(i)}$$

$$(i = m-2,\ m-1, \ldots, 1.\ 0).$$

Să se arate că, oricare ar fi λ, rangul matricei:

$$\begin{Vmatrix} p_0^{(n-2)} & p_1^{(n-2)} & \dots & p_{m+n-2}^{(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_0^{(0)} & p_1^{(0)} & \dots & p_{m+n-2}^{(0)} \\ q_0^{(m-2)} & q_1^{(m-2)} & \dots & q_{m+n-2}^{(m-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_0^{(0)} & q_1^{(0)} & \dots & q_{m+n-2}^{(0)} \end{Vmatrix}$$

este mai mic decât $(m + n - 2)$.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5781. O secantă variabilă dusă prin punctul fix A taie în P şi Q două drepte fixe Δ şi Δ'. Dacă B şi C sunt simetricele lui A faţă de Δ şi Δ', să se afle locul geometric al intersecţiei cercurilor (APB) şi (AQC).

MIRCEA BÂRZESCU.

5782. Cercul înscris (I) şi cercul exînscris (I_a), atinge latura BC a triunghiului ABC în D şi D'. Fie E şi E' diametralele lui D şi D' în (I) şi (I_a), iar A' piciorul înălţimii $\overline{AA'}$. Să se demonstreze, că dreptele A'E, A'E' întâlnesc bisectoarea AI a unghiului A în punctele P, P' situate pe dreptele care unesc picioarele bisectoarelor unghiurilor B şi C.

Să se calculeze apoi distanţa $\overline{PP'}$ în funcţie de laturile triunghiului ABC.

G-L GH. BUICLIU.

5783. Se consideră cercurile (C'), (C'') concentrice în O şi un punct P_1 în planul lor. Se duce tangenta $\overline{P_1T_1'}$ la cercul (C'). Raza $\overline{OT_1'}$ taie pe (C'') în T_1''. Fie M_1'' proiecţia lui T_1'' pe OP_1. Fie P_2, P_3 încă două puncte în planul celor două cercuri şi M_2'', M_3'' omoloagele lui M_1''. Dacă M_1'', M_2'', M_3'' sunt pe dreapta Δ_1, atunci $T_1''M_1''$, $T_2''M_2''$, $T_3''M_3''$ sunt concurente într'un punct N_1''

Se mai consideră încă două serii de câte trei puncte ca M_i'' colineare pe dreptele Δ_2, Δ_3 şi punctele N_2'', N_3'' corespunzătoare. Dacă Δ_1, Δ_2, Δ_3 sunt concurente, atunci N_1'', N_2'', N_3'' sunt colineare.

TH. GH. COCEA.

5784. Să se demonstreze că între unghiurile diedre λ, μ, ν ale unui tetraedru echifacial există relaţia

$$\cos\lambda + \cos\mu + \cos\nu = 1.$$

I. C. VASILIU.

5785. Sub ce unghiu şi în ce punct este tăiat ecuatorul de cercul mare al sferei pământeşti, care trece prin *Bucureşti* (latitudine nordică $\varphi_1 = 44^0 27',7$ şi longitudine estică $\lambda_1 = 26^0 6',5$) şi prin portul australian SYDNEY (latitudine sudică $\varphi_2 = 33^0 57'$ şi longitudine estică $\lambda_2 = 151^0 14'$).

GENERAL GH. LITEANU.

5786. Fie M un punct în planul unei conice de centru O, cu un focar în F şi P intersecţia razei OM cu perpendiculara din F pe polara lui M. Să se arate, că, dacă M este arbitrar în plan, P descrie directoarea corespunzătoare focarului F. Ce devine proprietatea în cazul parabolei?

N. N. MIHĂILEANU.

5787. Pe axa mică a unei elipse se iau punctele A şi A_1, la distanţe egale cu depărtarea focarelor de centrul elipsei. Fie P şi P_1 proiecţiile lui A şi A_1 pe o tangentă la elipsă, iar M_1 un punct pe această tangentă, la distanţă de P egală cu $\overline{A_1P_1}$ sau de P, egală cu $\overline{AP}$.

Se cere locul punctului M, când tangenta la elipsă variază.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

ERATĂ. 1°. Punctul *a)* dela problema 5759, propusă la pag. 288, Vol. XLVIII se înlocuieşte prin:

a) Să se exprime (*s*) *cu ajutorul elementelor lui* (S) *şi a unghiului* (α).

2°. In rândul 16 de sus dela pag. 315 se înlocuieşte 9 prin 8 şi 1 prin 111.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Broşteanu Gh. Gh. (P); *Căruntu D. Fl.* (5754); *Cotariu D. M.* (5624, 95, 754, 56, 62, 65, E); *Damian N. St.* (5756); *Drăghicescu P. P.* (5056, 664, 76, 84, 85, 87, 97, 705, 07, 11, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 33, 34, 43, 44, 54, 58, N); *Enăchescu Gh. I.* (4634, 5056, 575, 80, 93, 704, 05, 07, 32); *Gheorghiu E. Oct.* (E); *Gloden A.* (N); *Iacomi D. Elena* (5694); *Iliescu C. C.* (5595, 631, 43, 50, 69, 94, 705, 52, 65); *Iliovici G. C.* (N); *Ionescu F. R.* (5692); *Mahrenholz I.* (5698, 742, 53, 54, N); *Manolache C. M.* (5632, 86); *Marinescu M. I.* (5754); *Modâlcă Em.* (5726); *Munteanu Gh. L.* (5703); *Pârvan D. I.* (5626, 43, 94, 717); *Pătrăşcioiu I. M.* (5694, 721, 50, 53, 56); *Pitiş L. A.* (5632, 713); *Popescu I. Ad.* (5566, 88, 637, 753, N); *Puchiu T. Gh.* (5754); *Roşu Tr. N.* (5575); *Staicu I. C.* (5762, 65, E); *Stancu M. I.* (5626); *Ştefănescu N.* (5395, 750); *Stoenescu D. Mirel*, S-Lt. av. (4897, 5006, 64, 381, 522, 606, 09, 18, 26, 44, 59, 707, 11, 17, 22, 24, 44, 53); *Teodorescu St. I.* (1958, 5676, P); *Thébault V.* (N, P); *Wegener N. E.* (4755, 68, 923, 5267, 301, 566, 674, 754, 62).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă** o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Folle vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de **Gh.** Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 16.770

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Broşteanu Gh. Gh. (P); *Căruntu D. Fl.* (5754); *Cotariu D. M.* (5624, 95, 754, 56, 62, 65, E); *Damian N. St.* (5756); *Drăghicescu P. P.* (5056, 664, 76, 84, 85, 87, 97, 705, 07, 11, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 33, 34, 43, 44, 54, 58, N); *Enăchescu Gh. I.* (4634, 5056, 575, 80, 93, 704, 05, 07, 32); *Gheorghiu E. Oct.* (E); *Gloden A.* (N); *Iacomi D. Elena* (5694); *Iliescu C. C.* (5595, 631, 43, 50, 69, 94, 705, 52, 65); *Iliovici G. C.* (N); *Ionescu F. R.* (5692); *Mahrenholz I.* (5698, 742, 53, 54, N); *Manolache C. M.* (5632, 86); *Marinescu M. I.* (5754); *Modâlcă Em.* (5726); *Munteanu Gh. L.* (5703); *Pârvan D. I.* (5626, 43, 94, 717); *Pătrăşcioiu I. M.* (5694, 721, 50, 53, 56); *Pitiş L. A.* (5632, 713); *Popescu I. Ad.* (5566, 88, 637, 753, N); *Puchiu T. Gh.* (5754); *Roşu Tr. N.* (5575); *Staicu I. C.* (5762, 65, E); *Stancu M. I.* (5626); *Ştefănescu N.* (5395, 750); *Stoenescu D. Mirel*, S-Lt. av. (4897, 5006, 64, 381, 522, 606, 09, 18, 26, 44, 59, 707, 11, 17, 22, 24, 44, 53); *Teodorescu St. I.* (1958, 5676, P); *Thébault V.* (N, P); *Wegener N. E.* (4755, 68, 923, 5267, 301, 566, 674, 754, 62).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă** o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 16.770

BIBLIOTECA ... SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 9. — MAI 1943

SUMARUL

1. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din anul 1943 . . . . . *O. N. Ţino.*
2. † Profesorul Andrei Gh. Ioachimescu (urmare) . . . . . *Alexandru Stoenescu.*
3. Aplicaţii ale geometriei la discuţia şi separarea rădăcinilor unei ecuaţii . . . *N. Abramescu.*
4. Asupra unei matrici din calculul vectorial. *V. Vâlcovici.*
5. Raport pentru acordarea premiului de algebră . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
6. Note matematice: 44 — 45.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 319.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 3069, 3802, 5341, 5605, 5703.
12. Exerciţii: 21.
13. Probleme propuse: 5788 — 5799.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLVIII. Nr. 9 *SUPLIMENT* MAI 1943

DAREA DE SEAMĂ

asupra mesei comune care a încheiat al 33-lea Concurs al „Gazetei Matematice"

Suntem în 1 Mai 1943. Au trecut 1 an şi 11 luni dela începutul războiului. In lupta pentru *Ţară* şi *Dreptate* trupele noastre s'au acoperit de glorie în luptele dela *Sevastopol, Cherci, Harcov, Cotul Donului, Stepa Calmucilor, Stalingrad, Novorosisk* şi *Capul de pod al Cubanului.*

Războiul continuă. Se duce lupta mai departe pentru obţinerea victoriei finale şi pentru reintronarea justiţiei, credinţei şi păcii.

Pe frontul intern, se lucrează ziua şi noaptea pentru armată şi pentru aprovizionarea internă cu articole de primă necesitate.

In atmosfera încărcată a războiului, sub apăsarea grijilor şi lipsurilor sale, se desvoltă noile generaţii, generaţii pentru binele cărora se fac toate sacrificiile şi cărora li se aduce astăzi jertfa sângelui.

Pentru formarea cât mai temeinică, a acestor generaţii tinere, Societatea *Gazeta Matematică* îşi continuă activitatea sa şi îşi ţine în mod regulat *Concursurile* sale.

Anul acesta, *Concursul Gazetei Matematice* a avut loc sub apăsarea grea a două evenimente triste, doliul pentru stingerea din viaţă a *blândului* şi *neuitatului* stâlp Profesorul ANDREI G. IOACHIMESCU şi lipsa dela concurs a D-lui PROFESOR ION IONESCU, imobilizat de boală pe patul de suferinţă.

Gândul de a nu avea pe D-l PROFESOR ION IONESCU în mijlocul lor nu a fost însă primit de membrii *Gazetei Matematice.*

In aceste condiţii, în seara zilei de 1 Mai 1943, pentru a putea începe masa comună împreună cu D-l PROFESOR ION IONESCU, un grup de membri ai *Gazetei Matematice* compus din: D-ra GABRIELA ŢIŢEICA şi D-nii G-RAL BUICLIU, PROFESOR O. N. ŢINO, ING. D. STOICA, COMANDOR I. LINTEŞ, ING. I. CHIŢULESCU, ING. D. STAN, PROFESOR GH. T. GHEORGHIU, PROFESOR GH. ŞERBAN ŢIŢEICA, PROFESOR RADU ŢIŢEICA, PROFESOR G. G. CONSTANTINESCU, PROFESOR VIRGIL GHIŢESCU şi ING. AL. STOENESCU precum şi din reprezentanţii elevilor concurenţi: D-nii DUMITRESCU F. DAN, VRÂNCEANU GHORGHE şi DUMITRESCU F. SORIN, s'au dus la locuinţa sa modestă din Str. Răsuri 25.

In pat, sub straja ocrotitoare a *Sfântului Ioan,* l-am revăzut pe D-l PROFESOR ION IONESCU cu privirea sa vie, mobilă şi pătrunzătoare, cu zâmbetul său natural atât de cunoscut nouă şi cu buna dispoziţie din zilele frumoase de altă dată.

Conversaţiile alunecau uşor pline de amintiri din timpul *Concursurilor* de odinioară.

In acest cadru, D-l PROFESOR ION IONESCU ne-a povestit o frumoasă întâmplare dela Bârlad, cu ocazia concursului *Gazetei Matematice* ţinut în acea localitate.

Intr'o atmosferă de emoţie şi de înălţare sufletească, D-l PROFESOR ION IONESCU a ciocnit ouă roşii cu cei prezenţi.

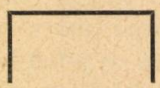
Şi precum la Sfânta slujbă a Paştilor se ia lumină din lumina *Invierii*, tot astfel D-l ING. D. STOICA a luat un ou roşu pentru a continua cu el ciocnirea ouălelor roşii la masa comună a *Gazetei Matematice*.

Frumoasa vizită se încheie prin urările de grabnică însănătoşire aduse D-lui PROFESOR ION IONESCU, în sănătatea căruia se închină un pahar cu vin şi se cântă de mic şi mare *„Mulţi ani trăiască"*.

* * *

Masa comună are loc la 1 Mai 1943 orele 20^{30} în sala cea mică a *Restaurantului Luzana*.

La masa în formă de



iau parte: D-nii COLONEL C. PANĂ, AVOCAT ALEX. IONESCU, INSPECTOR TR. POPP, V. GRIGORCEA şi LT. IVĂNOIU invitaţi ai *Gazetei Matematice*.

D-l General GH. BUICLIU, stâlp cooptat al *Gazetei Matematice*, D-ra GABRIELA ŢIŢEICA şi D-nii V. CAMBUREANU, D. V. CAMBUREANU, I. CHIŢULESCU, GH. GH. CONSTANTINESCU, ZAHARIA FLORIAN, N. I. GEORGESCU, VIRGIL GHIŢESCU, C. IONESCU-ŢIU, GH. ILIESCU, I. LINTEŞ, CRISTEA MATEESCU, CRISTEA NICULESCU, ALEXANDRU PANTAZI, FL. PĂSĂRICĂ, AL. AL. ROŞU, D. STAN, ALEXANDRU STOENESCU, D. STOICA, O. ŢINO, RADU ŢIŢEICA, ŞERBAN ŢIŢEICA, I. VARDALA membrii ai *Gazetei Matematice*.

D-nii DUMITRESCU F. DAN, ILIESCU CONSTANTIN, PĂLĂCEANU V., VASILIU DUMITRU, COLUMBEANU P., POPA NICOLAE, BÂRZESCU MIRCEA, NACHE DUMITRU, VRÂNCEANU GH., VOLANSCHI A. DAN şi DUMITRESCU F. SORIN concurenţi la *Concursul* din 1943 al *Gazetei Matematice*.

Masa începe cu tradiţionala ciocnire a ouălelor roşii.

D-L GENERAL GH. BUICLIU ciocneşte cu cel mai tânăr concurent al *Gazetei Matematice*, D-l DUMITRESCU F. SORIN, un *eminent* elev din cl. IV-a de liceu.

Masa se continuă în timp ce se povestesc amintiri din şcoală, amintiri dela *Concursul Gazetei Matematice* şi amintiri din războiul actual.

Menţionăm că în mijlocul nostru se găsesc acum D-nii: COMANDOR I. LINTEŞ, CĂPITAN C. IONESCU-ŢIU, G. C. CONSTANTINESCU şi VIRGIL GHIŢESCU întorşi de pe front unde au îndeplinit misiuni grele sau au luptat cu armele în mâini până departe în *Cotul Donului* şi *Stepa Calmucilor*.

Prima cuvântare este rostită de D-l GENERAL GH. BUICLIU.

Noi ştim din experienţa noastră că matematica este o ştiinţă grea. Pentru înţelegerea ei întrebuinţăm un simbol, simbolul matematic.

Tot astfel în domeniul politic există un simbol, simbolul Patriei şi Naţiunii. Acest simbol este: Coroana, reprezentată prin Regele nostru.

Intreagă asistenţă în picioare, prin urale şi strigăte de *Trăiască Regele*, ovaţionează pe *Suveran.*

In continuare D-l GENERAL BUICLIU rosteşte următoarele:

Conform tradiţiei **Gazetei Matematice** *prima cuvântare trebuie ţinută de cel mai vechi membru al Societăţii, prezent la masă, în cazul de faţă de D-l* ING. N. I. GEORGESCU.

D-sa însă m-a rugat să preiau asupra mea această îndatorire.

Sarcina este grea, mai ales că Societatea noastră este în doliu.

Unul dintre cei mai harnici fondatori ai **Gazetei Matematice,** PROFESORUL A. GH. IOACHIMESCU, *s'a stins din viaţă.*

In memoria sa să păstrăm câteva clipe de reculegere.

Intr'o tăcere absolută, revedem fiecare în mintea noastră chipul blând al lui A. GH. IOACHIMESCU, iar în sufletul nostru simţim prezenţa sufletului său mare şi generos.

Caracterul de anul acesta al Concursului **Gazetei Matematice,** *— continuă* D-l GENERAL BUICLIU *— prezintă o penibilă lacună — lipsa* D-lui PROFESOR ION IONESCU *a cărui prezenţă lumina întotdeauna atât zilele de masă cât şi cele de sărbătoare ale Societăţii noastre.*

D-sa mi-a spus însă, „NU VREAU SĂ FIU ABSENT, iar cuvântarea mea mi-o voi rosti prin D-l ING. I. GHIŢULESCU*".*

Referitor la concursul din acest an declar că a fost foarte reuşit, o treime din candidaţi fiind premiaţi iar ceilalţi fiind recunoscuţi ca buni la matematică.

Se observă, cu toate oscilaţiile mai mari sau mai mici, că se realizează un progres continuu.

Frumoasa iniţiativă de acum 48 ani, spiritul de sacrificiu, munca fără preget şi desinteresată îşi dau roadele lor.

Să avem deci un gând de recunoştiinţă pentru cei cari au fundat **Gazeta Matematică** *şi pentru cei cari continuă această operă.*

Adresându-se candidaţilor *Gazetei Matematice,* D-l G-RAL BUICLIU le spune:

Meritul succesului vostru la concurs este datorat profesorilor şi conducătorilor voştri, reprezentaţi la masa noastră prin D-l COLONEL C. PANĂ *şi D-l* TRAIAN POPP.

Meritul succesului vostru este datorat şi muncii voastre înafara programelor de studii, muncă pentru care aţi sacrificat plăcerile vacanţei, muncă ce v'a ajutat să înfruntaţi rigorile concursului.

Felicit pe elevii concurenţi şi le doresc ca plecând de aici cu conştiinţa datoriei împlinite să urmeze mai departe cu râvnă munca începută.

Cuvântarea D-lui GENERAL BUICLIU se încheie în puternicele aplause ale tuturor participanţilor.

Se face apoi o tăcere desăvârşită. Prin glasul D-lui ING. I. CHIŢULESCU, asistenţa *ascultă cuvintele D-lui* PROFESOR ION IONESCU:

Iubiţi camarazi, iubiţi corespondenţi,

Este pentru prima oară, de când Soc. Gazeta Matematică a înfiinţat concursurile anuale (1902) şi când eu nu am putut veni să iau parte la ele, ca examinator sau ca privitor.

De asemeni este prima dată când nu pot să particip la această serbare de încheiere a concursului cu excepţia unui an (1922) din cauza doliului pentru mama mea; cauza este o boală năpraznică care m'a ţinut imobilizat în pat dela 10 Noemvrie anul trecut şi care mă ţine şi acum şi pe care sunt sigur că aţi resimţit-o prin reducerea activităţii mele la **Gazeta Matematică**. *Colegii mei cari au luat parte la concursul din anul acesta, au căutat să-mi ridice în parte părerea mea de rău, că am lipsit, dela concurs şi dela această masă, prin faptul că astă seară, 12 dintr'ânşii au venit la mine acasă şi mi-au dat ocazie ca ciocnind ouă roşii să le pot zice tradiţionalul „Hristos a înviat" şi să-i revăd, deşi pe mulţi i-am revăzut odată sau de mai multe ori în timpul boalei mele, prin vizitele pe care mi le-au făcut, interesându-se de starea sănătăţii mele.*

O altă durere a fost pentru mine pierderea colegului Andrei Ioachimescu, unul din inginerii cu care am pornit la crearea **Gazetei Matematice**. *El prevăzuse că activitatea mea intelectuală prea mare mă va dobori şi mi-a scris în vara trecută că să nu uit că regretatul nostru coleg Gh. Ţiţeica a spus la serbarea* **Gazetei Matematice** *cu ocazia celor 40 de ani de existenţă, ca să îngrijim de sănătatea noastră pentru ca la jubileul de 50 ani al* **Gazetei Matematice** *să mai rămânem printre membri cel puţin unul din întemeietorii revistei, căci el simţea că teribila boală de care suferea de mai mulţi ani il va dobori în curând.*

Ca dintr'o altă lume am privit însă cu plăcere activitatea şi munca camarazilor mei care au ţinut ca Gazeta Matematică să-şi urmeze cursul său înainte cu toate vremurile grele prin care trece ţara şi ştiinţa românească.

Voi tineri elevi şi studenţi, luaţi exemplu de ce poate face o Asociaţie de oameni hotăriţi pentru munca desinteresată continuă şi pătrunşi de spiritul de sacrificiu. Chiar dacă ar fi numai atâta, exemplul **Gazetei Matematice** *va rămâne la noi în ţară acelora care vor să întreprindă acţiuni durabile şi cu efecte mari şi pozitive.*

Nu trebuie să uitaţi că unul din cei mai mari oameni de arme pe care i-a avut omenirea, NAPOLEON, *a spus că desvoltarea ştiinţelor matematice într'o ţară este în legătură cu prosperitatea Statului şi că prin urmare lucrând la* **Gazeta Matematică** *nu aveţi ca rezultat numai deslegarea de probleme şi studii matematice ci şi desvoltarea ştiinţifică a ţării la care veţi fi colaboratori în specialităţile ce le veţi alege.*

Eu vă urez ca exemplul de muncă şi de perseverenţă de care aţi dat dovadă cu acest concurs să vă rămână, în toată viaţa, în acţiunile ce le veţi întreprinde.

Noi vom rămâne mulțumiți că am putut contribui la crearea de oameni conștienți la datoria lor, cu dor și putere de muncă pentru desvoltarea științifică a țării.

Intr'o izbucnire spontană, în aplause ce nu se mai sfârșesc fiecare participant urează D-lui PROFESOR ION IONESCU o cât mai *grabnică însănătoșire, o viața senină cât mai îndelungată.*

A urmat cuvântarea D-lui INGINER D. STAN:

Domnilor,

Tradiția noastră care vrea ca programul Concursului anual al **Gazetei** *să se termine cu această masă comună, mai voia altădată ca ea să nu însemne numai prilej de cunoaștere și înțelegere reciprocă, de întărire a legăturii firești dintre* **Gazetă** *și corespondenții ei cei mai harnici, ci și destindere pentru concurenți, după grijile și emoțiile Concursului: așa dar, prilej de veselie tinerească, sub ochii încântați ai celor mai bătrâni.*

Din nefericire, anul acesta, în atmosfera mesei noastre de azi e greu să plutească veselia. Pe lângă motivele de întristare comune sufletelor tuturora, — din cauza grozăviilor măcelului mondial în care ne găsim atât de crâncen angrenați, din cauza sfâșierilor de-a nu vedea încă zorii așteptați ai reintregirii Țării noastre ciuntite, și din cauza negurilor viitorului ce se anunță cu primejdii tot mai mari, — noi cei dela **Gazeta Matematică** *mai suntem îndoliați și de dispariția veneratului și blândului nostru* PROFESOR ANDREI IOACHIMESCU, *unul dintre fondatorii și marii realizatori ai* **Gazetei.**

Trebuie să punem surdina îngândurării peste manifestările mesei noastre de azi.

Aceasta nu poate însă să ne împiedece, Domnilor Concurenți, să vă arătăm toată aprecierea noastră. — entusiastă chiar, — pentru sforțările D-vs., pentru munca voluntară ce v'ați impus, pentru hotărîrea cu care v'ați sacrificat vacanța aceasta de primăvară, împinși doar de dragostea pentru matematici.

Mai mult, am dori chiar să vă întărim încă, credința în virtuțile muncii desinteresate și în importanța sforțărilor perseverente și continui,

Vă voi da pentru aceasta, două pilde adânc convingătoare, luate din însăși mediul cel mai autorizat al **Gazetei.**

Prima, ne-a rămas dela în veci regretatul PROFESOR IOACHIMESCU. *Nu e nici locul, și nici momentul să vă vorbesc de marea lui personalitate și de meritele nepieritoare ce-a avut în înălțarea* **Gazetei Matematice.** *Vă voi spune însă, cum a plecat el pe drumul fără de întoarcere.*

In ultimii ani, mai mulți la număr, boala îl ținuise în casă. Aceasta nu i-a putut tăia însă firul activității sale neobosite. In tot acest timp, neîntrerupt, camera lui de suferință a fost și cameră de lucru. Iar în ultima vreme, deși se putea bizui pe ajutorul unor colaborări eminente și devotate, a ținut să refacă, cu mâna lui, o parte din manuscrisul magistralului său curs de Mecanică Rațională dela Politechnică, pentru a fi dat la tipar. A lucrat până în ultima zi, fără răgaz, fără șovăire, fără descurajare față de

semnele tot mai vădite de slăbiciune, — cu acelaşi entusiasm pentru ştiinţă, cu aceeaşi dragoste pentru tineretul studios căruia i se adresa opera lui. S'a spus cu drept cuvânt, că moartea l-a luat dela masa de lucru...

Dacă veţi medita o clipă la viaţa de muncă neîntreruptă, la activitatea multilaterală şi rodnică a desăvârşitului inginer şi la opera realizată de neuitatul Profesor, care a fost IOACHIMESCU, *veţi înţelege de sigur şi toată frumuseţea etică a acestui apus de soare...*

A doua pildă o avem dela D-l PROFESOR ION IONESCU, *marele făuritor al* **Gazetei Matematice**, *stâlpul ei cel mai de temei şi adevăratul ei suflet.*

După cum ştiţi, D-l IONESCU *este suferind de mai multe luni şi obligat să stea în pat. Pe la începutul iernii trecute a apărut un Număr al* **Gazetei** *fără problemă propusă de D-sa, spre marea emoţie a celor ce stau mai pe aproape de* **Gazetă**. *Vina n'a fost nici atunci a D-lui Profesor, dar pentru ca aceasta să nu se mai întâmple, — acum câtva timp când a putut să se aşeze câteva momente la masa de lucru, cea dintâi grijă i-a fost să pregătească o rezervă de probleme pentru mai multe numere viitoare. L'am găsit acolo, pentru prima oară când putea să lucreze la masă, examinând şi clasând însemnări mai vechi şi dictând probleme de propus pentru* **Gazetă**.

Pe de altă parte, trebuie să adaog că D-l PROFESOR ION IONESCU *deşi bolnav, n'a încetat să lucreze zi de zi, cu asiduitate, susţinut de voinţa sa proverbială, la redactarea definitivă a cursului său de Poduri, în vederea tipăririi. Ajutat de foşti Asistenţi şi de mai mulţi ingineri mai tineri, de-acolo din patul de suferinţă, definitivează textele pentru completarea manuscriselor, dictând, controlând, dând indicaţii, şi clasând materialul adunat de el an după an.*

Iată exemple pline de învăţăminte, pe care ni le dă şi astăzi D-l PROFESOR IONESCU, *dela care o generaţie întreagă de ingineri a avut atât de mult de învăţat.*

Domnilor, dintre toate atributele caracteristice ale **Gazetei**, *unde se cultivă deopotrivă, după cum ştiţi, şi entusiasmul creator, şi armonia între colaboratori şi între generaţii, şi spiritul de sacrificiu, şi modestia direct proporţională cu meritele, şi creaţia originală pusă în slujba Ştiinţei şi a Patriei, — dacă am ales să preamăresc astăzi munca perseverentă şi desinteresată, prin exemplificările impresionante ce am dat, n'am făcut-o la întâmplare. Ne găsim doar azi în ziua de 1 Mai, când se sărbătoreşte munca, şi cred că nicăieri nu s'ar putea sărbători cu mai multă îndreptăţire cea mai nobilă dintre munci: cea intelectuală, decât aici la* **Gazeta Matematică**, *această autentică redută de muncă intelectuală originală şi românească. Întru această sărbătorire, vă propun o singură manifestare; să omagiem cu toţii pe acela care a muncit mai mult la* **Gazetă**, *pe iubitu nostru* PROFESOR ION IONESCU.

Şi cu această ocazie, să-i urăm într'un glas însănătoşire deplină, exprimându-i şi marele nostru regret că nu-l avem astăzi printre noi, ca să ne prezideze, aşa cum ne deprinsesem de mulţi ani de zile.

Închin paharul pentru **Gazeta Matematică** *şi pentru D-l* ION IONESCU.

Asistența în picioare, închină un pahar de vin pentru sănătatea D-lui PROFESOR ION IONESCU și pentru **Gazeta Matematică.**

Reluând cuvântul D-l GENERAL GH. BUICLIU ne povestește cum la origina **Gazetei Matematice** nu a lipsit nici preotul, nici avocatul.

De preot nu voi vorbi astăzi dar despre avocat, D-l ALEXANDRU IONESCU *țin să vă comunic că a îndeplinit dela primul număr al* **Gazetei Matematice** *slujba de contabil, casier, corector, secretar, factor poștal, etc.*

Mai târziu, de ani de zile, de câte ori **Gazeta Matematică** *are nevoie de o povață, un consult sau se află situată în fața unei chestiuni juridice, D-l* ALEXANDRU IONESCU *și-a dat cu drag prețiosul și desinteresatul său concurs.*

Să trăiască D-l ALEXANDRU IONESCU.

Asistența închină un pahar cu vin în sănătatea D-lui AVOCAT ALEXANDRU IONESCU.

In replică, D-l ALEXANDRU IONESCU răspunde următoarele:

Am primit cu multă mulțumire invitația D-vs. la masa comună a **Gazetei Matematice.** *Astă seară mă văd silit să recurg la exercitarea practicei mele de avocat, prin faptul că voi cere revendicarea dreptului meu împotriva D-lui* ING. N. I. GEORGESCU *declarat cel mai vechi membru al* **Gazetei Matematice.**

A revendica înseamnă a scoate pe cineva pentru a-i lua locul. Iată deci gravitate cazului meu.

Și pentru susținerea acestei teze vă aduc la cunoștință că din clasa V de liceu am lucrat pentru **Gazeta Matematică** *îndeplinind dela primul său număr însărcinările cele mai variate, contabil, copist, casier pentru strângerea dela 7 persoane suma de 15 lei lunar, factor poștal, corector etc.*

Dacă la **Gazeta Matematică** *au activat multe forțe văzute în plină lumină eu am colaborat în partea ocultă.*

Țiu să evidențiez aceasta pentru ca tineretul să cunoască greutățile întâmpinate în trecutul **Gazetei Matematice,** *greutăți învinse prin munca și devotamentul celor patru stâlpi ai săi.*

Domnilor concurenți ai **Gazetei Matematice,** *către Dvs. mă îndrept: veți primi în curând un patrimoniu de seamă, patrimoniul* **Gazetei Matematice.**

Acest patrimoniu va trebui să-l apărați cu sfințenie și să-l purtați cu toată puterea către perfecțiune și progres.

Să nu spuneți niciodată că totul este terminat ci mai este de lucru și că acest lucru trebuie să se facă.

Asistența profund impresionată aplaudă îndelung pe D-l avocat ALEXANDRU IONESCU pentru admirabila sa cuvântare.

D-l G. G. CONSTANTINESCU într'o frumoasă cuvântare amintește că înafară de preot și avocat, **Gazeta Matematică** a avut și un naș: pe regretatul ING. V. BALABAN.

Ca și balada românească în care o ființă a trebuit să fie sacrificată pentru ridicarea Mânăstirii Curtea de Argeș tot astfel la întemeierea **Gazetei Matematice,** *se găsește sufletul nașului său* ING. V. BALABAN, *mort*

la 22 Septemvrie 1895 la o săptămână după apariţia primului număr al **Gazetei Matematice.**

Să păstrăm un moment de reculegere pentru cel ce a fost ING. V. BALABAN.

Asistenţa păstrează un moment de tăcere.

D-l GENERAL BUICLIU relevează munca depusă de D-l PROFESOR O ŢINO şi sacrificiile pe care le face pentru a putea lua parte la şedinţele şi la *Concursul* **Gazetei Matematice.**

D-sa menţionează de asemenea şi pe D-l PROFESOR VIRGIL GHIŢESCU venit din provincie în multiple rânduri pentru **Gazeta Matematică,** şi pe D-l PROFESOR AL. PANTAZI care şi-a părăsit cursurile şi studiile sale pentru a fi examinator la *Concursul* **Gazetei Matematice.**

In aplause unanime asistenţa închină un pahar cu vin în sănătatea lor.

Urmează cuvântarea D-lui COLONEL DR. ING. C. PANĂ.

D-sa după ce scuză lipsa D-lui GENERAL TRAIAN ILIESCU, Directorul Liceelor Militare, reţinut în casă din motive de sănătate, aduce **Gazetei Matematice** mulţumiri şi recunoştinţă pentru emulaţia şi dragostea pentru matematici pe care o răspândeşte printre elevi Liceelor Militare,

Ca urmare, Direcţiunea Liceelor Militare oferă **Gazetei Matematice** o contribuţie de 30.000 lei.

D-l COLONEL C. PANĂ îşi încheie cuvântarea sa cu urarea: *Trăiască Gazeta Matematică, Trăiască conducătorii şi membrii Gazetei Matematice.*

Vii aplause ale tuturor membrilor *Gazetei Matematice* mulţumesc D-lui COLONEL C. PANĂ pentru frumoasele sale cuvinte.

Conform unei vechi tradiţii D-l ING. I. CHIŢULESCU — în lipsa D-lui ING. AL. BUNESCU — aduce mulţumiri *Şcoalei Politechnice* pentru punerea la dispoziţie a sălilor necesare ţinerii *Concursului Gazetei Matematice, Căminului Studenţilor Şcoalei Politechnice* pentru găzduirea oferită concurenţilor precum şi *Direcţiunii C. F. R.* pentru ajutorul material dat în locul biletelor de transport care n'au sosit la timp.

D-sa mulţumeşte de asemenea membrilor *Gazetei Matematice* cari au donat cărţi pentru premierea concurenţilor, D-lui ING. ZAMFIRESCU, pentru suma oferită cu scopul de a se cumpăra cărţi pentru premianţi precum şi D-lui GENERAL TRAIAN ILIESCU şi D-lui COLONEL C. PANĂ pentru contribuţia cu 30.000 lei a Liceelor Militare.

In continuare D-l I. CHIŢULESCU mulţumeşte D-lui GH. ILIESCU pentru neobosita şi desinteresata sa activitate şi D-lui V. GRIGORCEA pentru zelul depus în rezolvarea tuturor chestiunilor financiare şi contabile ale **Gazetei Matematice.**

In încheiere, D-l I. CHIŢULESCU aduce mulţumiri membrilor Comisiei examinatoare, concurenţilor pentru interesul şi munca depusă precum şi tuturor celor ce au luat parte la această masă.

Aplause puternice acopăr ultimele cuvinte ale D-lui I. CHIŢULESCU.

Dar D-l ING. D. STOICA, *Moş-Crăciunul* **Gazetei Matematice** nu este satisfăcut numai cu mulţumirile platonice aduse de D-l ING. I. CHIŢULESCU elevilor concurenţi.

D-sa spune: *Ca şi în anul trecut şi anul acesta doresc să am mulţumirea ca fiecare dintre concurenţi să rămână cu o amintire frumoasă a concursului.*

Alegerea premianţilor s'a făcut după spiritul de dreptate al conştiinţei noastre, dar această dreptate nu este absolută.

Ca urmare rog pe fiecare concurent să-şi aleagă o carte de matematici pe care să i-o dăruiesc şi pe care s'o păstreze în amintirea Concursului **Gazetei Matematice** *din acest an.*

D-l INGINER I. CHIŢULESCU mulţumeşte D-lui D. STOICA pentru frumosul său dar, menţionând că a devenit o *tradiţie* a **Gazetei Matematice** ca D-l STOICA *Moş-Crăciunul* **Gazetei Matematice** *să împartă cărţi concurenţilor.*

In aplausele şi uralele întregei asistenţe se închină un pahar în sănătatea D-lui INGINER D. STOICA, *Moş-Crăciun* căruia participanţii îi urează o viaţă lungă, frumoasă şi senină ca şi sufletul său.

D-l INGINER I. CHIŢULESCU mulţumeşte de asemenea patronului localului *Luzana* care a oferit la masa *Gazetei Matematice* primul şi ultimul fel, ţuica şi cafeaua.

Urmează cuvântarea D-lui AVOCAT ALEXANDRU IONESCU prin care arată importanţa tradiţiei şi istoriei în oricare domeniu de activitate.

Cunoaşterea trecutului este piatra de temelie a pregătirii sufleteşti a tinerelor generaţii pentru munca şi lupta ce o vor duce aceste generaţii în viitor.

Ca urmare, D-sa propune să se întocmească un *studiu documentar al trecutului* **Gazetei Matematice** *cu ocazia împliniri a 50 ani dela înfiinţare* şi donează în acest scop pentru începerea lucrărilor suma de 25.000 lei.

Gândul frumos şi gestul generos al D-lui AVOCAT ALEXANDRU IONESCU a entusiasmat întreaga asistenţă.

Respectând dorinţa D-lui AL. IONESCU, nu i se aduc mulţumiri verbale, în schimb aplause puternice, arată impresia profundă şi satisfacţia sufletească resimţită de participanţi.

Ultima cuvântare este ţinută de D-l PROFESOR O. ŢINO ca replică a cuvântării D-lui G-RAL GH. BUICLIU, prin care se aduce mulţumiri Profesorilor de Matematici.

Societatea Gazeta Matematică — spune D-sa — *se compune din trei colori: ingineri, ofiţeri şi profesori.*

Partea materială a fost lăsată mai mult în seama inginerilor.

Ofiţerii, prin Direcţia Liceelor Militare au întreţinut printre elevii lor o atmosferă sufletească caldă plină de dragoste şi înţelegere pentru **Gazeta Matematică.**

Profesorii au contribuit la rândul lor cu pregătirea tinerilor candidaţi pentru concurs.

Aceste trei colori au păstrat cu sfinţenie legăturile dintre ele şi prin sforţări comune au învins toate piedecile, au rezolvat toate dificultăţile.

Pentru exemplificare, să ne gândim ce greutăţi ar fi întâmpinat **Gazeta Matematică** *pentru obţinerea biletelor dela C.F.R. fără ajutorul D-lui*

I. CHIŢULESCU *sau pentru obţinerea telefonului fără ajutorul D-lui* ING. D. STAN.

Mulţumirile pentru reuşita concursului pe care D-l GENERAL GH. BUICLIU *le aduce Profesorilor, se datoresc în bună parte Inginerilor şi Ofiţerilor.*

Menţionăm astfel că la actualul concurs, D-l COMANDOR LINTEŞ *a renunţat la masa de prânz pentru a putea fi punctual la concursul* **Gazetei.**

De asemenea nu trebuie să uităm marea activitate a D-lui GENERAL GH. BUICLIU, *atât la* **Gazetă** *cât şi la suplimentul* **Gazetei.**

In încheiere, D-l PROFESOR O. ŢINO *urează D-lui* PROFESOR ION IONESCU *grabnică însănătoşire, aduce din partea Profesorilor dela* **Gazeta Matematică** *mulţumiri Inginerilor şi Ofiţerilor, iar tinerilor candidaţi le cere să permanentizeze memoria celor ce au lucrat pentru* **Gazeta Matematică** *spre a-şi forma astfel sufletul şi voinţa în lupta ce o vor duce mai târziu, atât în viaţă cât şi pe ogorul ştiinţei.*

Aplause nesfârşite mulţumesc D-lui PROFESOR O. ŢINO pentru frumoasa sa cuvântare.

Nu au lipsit dela această masă nici tradiţionalele epigrame şi poezii.

Redăm mai jos duelul epigramatic dintre D-ra GABRIELA ŢIŢEICA (G. Ţ.) şi D-nul I. CHIŢULESCU (I. C.)

Onor. Comisiunii de Examinare.

Cuvântul „stâlp" e masculin.
Şi a fi „stâlp" nu sunt în stare,
„Proptea" este la feminin
Şi deci proptesc: „Daţi notă mare"

G. Ţ.

Notă mare „cu proptea" e greu de dat
De nu s'a sprijinit pe el cel ascultat
Aşa că, funcţia de a propti e plicticoasă
Oricât ar fi, de drept, politicoasă.

(I. C.)

Dreptate-aveţi Dom' Delegat!
Judecând pe fiecare candidat
La adevărata lui valoare
Cu toţii ar căpăta medie mare!

(G. Ţ.)

Mă 'nchin cu mult respect în faţa valorii intrinsece
Şi 'n faţa sacrificiului făcut de candidaţi
De-a renunţa la o vacanţă; dar, cată să se disece
Acea valoare, când este vorba de-a alege premiaţi.

(I. C.)

Ultimul răspuns !

Foaie verde şi-o pansea
Mă las, nu mai sunt proptea
Candidaţii n'au nevoie
Delegaţii nu-mi dau voie !

(G. Ţ.)

In acelaşi cadru al manifestărilor artistice şi literare menţionăm şi frumoasa poezie ocazională compusă de D-l FLORIAN ZAHARIA :

Când e vorba de banchet
Se 'nscriu la membri... berechet.
Dar de se ţine vre-o şedinţă
Membrii sunt... în suferinţă
Proverbul românesc nu minte
Căci... „La plăcintă înainte".

De sunt cam aspru de-astă dată
Vă rog, colegi să mă scuzaţi
Căci cel ce faptul îl constată
E tocmai dintre cei vizaţi.

Şi totuşi constatăm ; proverbul minte
Când spune „la plăcinte înainte"
Căci astăzi la banchet mai toţi repetă :
Sunt prea puţini cei cari sunt prezinte
Dar mult mai mulţi lucrează la „Gazetă".

La ora 23,15 D-l GENERAL BUICLIU dă semnalul de plecare.

Pe străzile întunecate trec în goană ultimele tranvaie. Noaptea este senină şi caldă, stele singure sclipesc fără a ţine seama de războiu şi de camuflaj. Şi gândul nostru se duce departe de ţară, undeva pe front, unde stau de veghe şi luptă cei mai buni dintre noi.

Astfel se sfâr cel de al 33-lea *Concurs al Gazetei Matematice.*

ALEXANDRU STOENESCU

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“ DIN ANUL 1943

Societatea „*Gazeta Matematică*“ în Adunarea generală dela 27 August 1942 a hotărît pentru anul 1943 ţinerea Concursului tradiţional de matematici, între elevii liceelor civile şi militare, corespondenţi ai revistei „*Gazeta Matematică*“, şi ai *Suplimentului Gazetei Matematice*. Anunţarea acestui concurs, condiţiile lui, data la care va fi ţinut, precum şi programa analitică a concursului au fost date în Nr. 2, Vol. XLVIII (15 Oct. 1942) al revistei *G. M.* şi în *Nr. 9, An. IX al S. G. M.* Din 48 candidaţi, care au înaintat cereri în termen, au fost admişi 35 candidaţi, 23 dela liceele militare şi 12 dela liceele civile.

Dintre candidaţii admişi la concurs, *patru* dela liceele militare şi *trei* dela liceele civile nu s'au prezentat la concurs, fără a anunţa şi a motiva absentarea. Şase dintre aceştia sunt elevi în clasa VIII-a. Presupunem că absentarea este datorită *stării de răsboi*, care a făcut, între altele, ca examenul de bacalaureat să se ţină în anul acesta în primele zile ale lunii Mai. Regretăm lipsa unora dintre ei, cunoscând bogata lor activitate la revista „*G. M.*“.

Toţi ceilalţi candidaţi s'au prezentat la *ambele lucrări ale probei scrise* şi dintre ei au fost admişi să treacă examenul oral 15, adică aproape jumătate din numărul lor. Intrebuinţând metafora mult regretatului nostru profesor G. ŢIŢEICA, trebuie să recunoaştem că totuşi „*sita a fost cam deasă*“. Este de observat că dorinţa Domnului Profesor Ing. ION IONESCU a fost cu prisosinţă împlinită. Numărul candidaţilor la *Aritmetică* şi la *Teoria Numerelor* a fost însemnat. *Candidaţii din clasele a V-a şi a VI-a, în majoritatea lor, au ţinut să răspundă acestei dorinţe*. De sigur că munca stăruitoare depusă de Domnul Comandor I. LINTEŞ la *S. G. M.* a contribuit în măsură însemnată la acest rezultat.

Comisia examinatoare pentru acest concurs a fost alcătuită după cum urmează: GENERAL GH. BUICLIU pentru *Algebră* la clasele IV-a şi a V-a; Profesor Ing. I. CHIŢULESCU pentru *Geometria Descriptivă* la clasa VII-a; Doctor în Matematici G. G. CONSTANTINESCU, pentru *Algebră* la clasa VII-a; profesor VIRGIL GHIŢESCU pentru *Geometria în Spaţiu* la clasele IV-a şi a VI-a; Comandor I. LINTEŞ pentru *Aritmetică* la clasa V-a şi pentru

Teoria Numerelor la clasa VI-a; Profesor N. N. MIHĂILEANU pentru *Geometria Plană* la clasele V-a; Profesor AL. PANTAZI pentru *Algebră* la clasa VIII-a; Ing AL. STOENESCU pentru *Mecanică* la la clasa VIII-a; Ing, D. STOICA pentru *Trigonometrie* la clasa VI-a şi Profesor O. N. ŢINO pentru *Geometria Analitică* la clasa VIII-a.

Probele concursului au avut loc în zilele de 29 Aprilie—1 Mai, în două din sălile *Politechnicei din Bucureşti* şi au fost urmărite, înafară de *membrii Comisiunii,* de următorii membri ai Societăţii *„Gazeta Matematică“:* GABRIELA G. ŢIŢEICA, GH. ILIESCU, N. GEORGESCU, TR. POPP, N. CIORĂNESCU, RADU G. ŢIŢEICA, ŞERBAN G. ŢIŢEICA, GH. TH. GHEORGHIU, EM. ARGHIRIADE, TEODOR STOICESCU, C. D. IONESCU-ŢIU, N. ŞTEFĂNESCU, EM. MEREUŢĂ. Au mai asistat la proba orală Domnii Profesori TOPORĂSCU şi GH. CĂLUGĂREANU.

Lipsa Domnului Profesor Ing. ION IONESCU a lăsat asupra începutului acestui concurs o tristeţe adânc simţită de membrii Comisiei. Numai gândul de a-l ţine zilnic în curent cu mersul lucrărilor a risipit-o puţin.

Felul în care s'au prezentat în general, Concurenţii a impresionat plăcut atât pe membrii Comisiunii, cât şi pe auditori. Chiar după trecerea examenului lor oral, unii dintre candidaţi au urmărit mai departe, cu mult interes, desfăşurarea concursului.

După dorinţa colegilor mei examinatori, voi da în acest raport câteva din observările noastre.

In general s'a văzut la mulţi dintre candidaţi lipsă de exerciţii. Se pare, că deşi Societatea *„Gazeta Matematică“*, a făcut sacrificii să retipărească ediţii nouă pentru *Culegeri de Probleme* de *Aritmetică,* de *Geometrie,* de *Algebră,* de *Trigonometrie,* de *Geometrie Analitică,* ele au fost văzute numai in treacăt de către unii candidaţi. Aşa, la trigonometrie, exerciţii şi relaţii privitoare la sume de mai mult de două arce erau în general necunoscute. De asemenea majoritatea candidaţilor din clasa a VI-a, a dovedit lipsă de vedere clară a liniilor şi unghiurilor în spaţiu. De aceea problema a doua, dată la *proba scrisă de Trigonometrie* la această clasă (la care nu era nevoie de multe cunoştinţe de trigonometrie, însă cerea o vedere clară în spaţiu) a fost rezolvată numai de un singur candidat, deşi *Geometria în spaţiu* este obiect principal în clasa VI-a.

Unii dintre candidaţi s'au prezentat la concurs fără să cunoască toată materia cerută de programa analitică publicată (de exemplu la clasa V-a, la Algebră). Materia făcută în o clasă oarecare a unui liceu se adresează tuturor elevilor acelei clase, pe când concursul *Gazetei Matematice* se adresează celor distinşi dintre aceşti elevi. Alegerea acestor candidaţi dintre corespondenţii revistei noastre „*Gazeta Matematică*“ are acest înţeles, că oricare candidat să aibă obişnuinţa de a consulta pe lângă manualele de clasă, alte manuale clasice de matematici, precum şi culegeri de probleme în legătură cu materia pregătită. Observăm totuşi cu mulţumire că la unele materii hotărîte de noi pentru concurs, cum este *Geometria Descriptivă* sau *Teoria Numerelor*, candidaţii care s'au prezentat şi-au pregătit singuri materia folosindu-se de cărţile pe care le-au putut găsi. S'a resimţit totuşi lipsa cărţilor de *Teoria Numerelor.*

Rezultatul concursului din acest an a fost foarte bun.

Iată acum rezultatul clasificării candidaţilor reuşiţi la ambele probe (scrise şi orale) ale concursului, precum şi premiile acordate de către Societatea „*Gazeta Matematică*“ :

1. In rândul întâi au fost clasificaţi împreună: D-l POPESCU GH. MARIN, elev în clasa VIII-a a liceului „I. C. Brătianu“ din Piteşti şi D-l DUMITRESCU F. DAN, elev în clasa VII-a la Colegiul „Sf. Sava“ din Bucureşti.

D-l POPESCU GH. MARIN a făcut o lucrare scrisă execelentă la *Mecanică*, cu *generalizări* şi *observaţii* personale.

Răspunsuri bune la oral, atât la *Statică* cât şi la *Dinamică.* De asemenea la *Geometrie Analitică* a făcut o lucrare scrisă *bună* şi a răspuns *foarte bine* la oral, având cunoştinţe care au întrecut cu mult cadrul programei analitice cerute. Calm şi sigur în răspunsuri.

D-l DUMITRESCU F. DAN s'a prezentat deosebit de bine la *Geometria Descriptivă* stăpânind pe deplin materia. La *Algebră* a arătat o observaţie vioaie pe lângă o *judecată bună*, şi *un calcul excelent.*

Li se acordă ca premiu: D-lui POPESCU GH. MARIN volumele următoare: A. ANGELESCU, *Lecţiuni de Calcul Diferenţial; Elementele lui* EUCLID, vol. I, II şi III, traduse de D-l PROF. V. MARIAN din limba greacă; GH. EM. FILIPESCU, *Statica Construcţiunilor şi*

Rezistența Materialelor; Gazeta Matematică, volum jubilar; P. MONTEL, *Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes*; A. PANTAZI, *Elemente de Geometrie proiectivă diferențială a curbelor și suprafețelor;* T. POPOVICIU, *Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame.*

Iar D-lui DUMITRESCU F. DAN volumele următoare: GH. BRATU, *Curs de Analiză Matematică; Elementele lui* EUCLID, vol. I, II și III, traduse din limba greacă de D-l PROF. V. MARIAN; GH. EM. FILIPESCU *Statica Construcțiunilor și Rezistența Materialelor; Gazeta Matematică*, volum jubilar; I. IONESCU, *Beton armat;* A. PANTAZI, *Elemente de Geometrie proiectivă diferențială a curbelor și suprafețelor;* T. POPOVICIU, *Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame.*

2. In locul al doilea a fost clasificat D-l DUMITRESCU F. SORIN, elev în cla IV-a la Colegiul Național „Sf. Sava" din București. D-sa a prezentat o lucrare scrisă *bună* la *Algebră* și una *foartă bună* la *Geometrie.*

La *oral*, atât la *Algebră*, cât și la *Geometrie*, a întrecut toate așteptările, dând răspunsuri foarte bune, chiar la chestiunile care depășeau cu mult programa analitică. I se dau ca premiu volumele următoare: N. ABRAMESCU, *Curs de Matematici Generale*, vol. I, Matematici elementare; C. BOURLET, *Leçons d'Algèbre élémentaire;* A. G. IOACHIMESCU, *Culegere de Probleme de Mecanică*, ed. II-a revăzută de GABRIELA ȚIȚEICA; TR. LALESCU, *La Géometrie du Triangle;* T. LEMOYNE, *Les lieux géométriques.*

3. In locul al treilea vine D-l VRÂNCEANU GH. GHEORGHE, elev în clasa V-a la liceul militar „Mihai Viteazul" din Timișoara. D-sa a prezentat lucrări scrise foarte bune, atât la *Algebră*, cât și la *Aritmetică.* De asemenea, pe lângă *proba orală bună* dela *Algebră*, a trecut una *foarte bună* la *Aritmetică.* I se acordă ca premiu volumele următoare: A. A. BELEȘ și ȘT. G. BĂLAN, *Mecanica teoretică și aplicată;* LT. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE și LT. I. N. GEORGESCU-VAL. *Proiectilele automotoare; Gazeta Matematică*, volum jubilar; TH. MOREUX, *Pour comprendre l'Algèbre;* G. SUGOT, *Balistique intérieure théorique et tables numériques;* ION IONESCU, *Culegere de probleme Aritmetică*, vol. I.

4. In locul al patrulea a ieșit D-l BÂRZESCU I. VASILE, elev în clasa V-a a liceului militar „Gr. Makarovici", din Iași. D-sa a

prezentat lucrări *foarte bune* la *Algebră*, precum şi proba scrisă *foarte bună* la *Aritmetică*. I se acordă ca premiu volumele următoare: V. CRISTESCU, *Culegeri de Probleme de Trigonometrie*, p. III-a (Trigonometrie sferică), revăzută şi adăogită de G-L GH. LITEANU; TR. LALESCU, *Tratat de Geometrie analitică*, caietul I şi II; AL. STOENESCU, *Probleme de oscilaţii;* G. SUGOT, *Balistique intérieure théorique et Tables numériques.*

5. In al cincilea rând vin împreună D-nii DONŢU GH. GHEORGHE din clasa VIII-a a Liceului de Aplicaţie din Iaşi şi D-l COLUMBEANU D. PETRE din clasa VI-a a Colegiului Naţional „N. Filipescu" dln Predeal.

D-l DONŢU GH. GHEORGHE a prezentat o lucrare scrisă *bună* la *Mecanică* şi a dat răspunsuri precise la proba orală; asemenea a prezentat la *Geometria Analitică* ambele probe *bune.*

I se acordă ca premiu volumele următoare: *Elementele lui* EUCLID, vol. I, II şi III, traduse de D-l PROF. V. MARIAN, din limba greacă; *Gazeta Matematică*, volum jubilar; W. SIERPINSCHI, *Lecţiuni despre mulţimile analitice;* A. A. BELEŞ şi ŞT. C. BĂLAN, *Mecanică teoretică şi aplicată.*

D-l COLUMBEANU D. PETRE a arătat multă îndemânare la calculele trigonometrice, atât la proba scrisă, cât şi la cea orală şi o vedere clară în spaţiu, fiind singurul care a rezolvat problema a doua dela proba scrisă, la trigonometrie. D-sa a obţinut o notă *foarte bună* la *proba orală*, la *teoria numerelor.* I se acordă ca premiu volumele următoare: MAIOR M. BĂNULESCU şi CPT. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE, *Studiul reculului în construcţia unei guri de foc;* GH. BRATU, *Curs de Astronomie;* I. IONESCU, *Maxime şi Minime geometrice;* G. PAPELIER, *Precis de mécanique.*

Inafară de aceşti concurenţi premiaţi, merită să fie menţionaţi următorii candidaţi:

D-l VOLANSCHI A. DAN elev în clasa V-a a Colegiului Naţional „N. Filipescu" din Predeal pentru probele dela *Algebră.* I se acordă volumele următoare: LT. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE şi LT. A. I. STAN, *Avionul armă anticar?; Gazeta Matematică,* volum jubilar; TH. MOREUX, *Pour comprendre la Géométrie.*

D-l PAVICĂ A. VICTOR elev în clasa VI-a a liceului militar „Mihai Viteazul" din Timişoara pentru probele orale la *Trigonometrie* şi la *Teoria Numerelor.* I se acordă volumele

următoare: CPT. E. DRAGOMIRESCU-BUZNE, *Problema proiectilelor utilizate în tragerile dintre avioane în lumina noilor realizări tehnice; Gazeta Matematică*, volum jubilar; I. IONESCU, *Maxime şi Minime Geometrice.*

D-l POPA A. NICOLAE elev în clasa VI-a a liceului militar „D. A. Sturdza" din Craiova pentru probele la *Geometria în Spaţiu.* I se acordă volumele următoare: A. A. BELEŞ şi ŞT. G. BĂLAN, *Mecanica teoretică şi aplicată;* GH. BRATU, *Cinci conferinţe de Astronomie; Gazeta Matematică*, volum jubilar.

Incheind acest raport, observăm, că D-l DUMITRESCU F. DAN, clasificat în rândul întâi în acest an, a mai obţinut premiul întâi la concursul *Gazetei Matematice* din anul 1941; D-l POPESCU GH. MARIN, de asemeni clasificat în rândul întâi în acest an, a obţinut în anul 1941, premiul al treilea; D-l BÂRZESCU I. VASILE a fost menţionat la concursul din anul precedent.

Sperăm că încercarea făcută la acest concurs de noii candidaţi nereuşiţi să le folosească la Concursul din anul viitor spre a-i aduce în rândurile celor premiaţi.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE
O. N. ŢINO.

---

† PROFESORUL ANDREI GH. IOACHIMESCU
(1868—1943)

(Urmare dela pag. 342)

1. Activitatea ştiinţifică şi didactică a Prof. A. Gh. Ioachimescu

In 1896, A. GH. IOACHIMESCU a fost numit profesor de matematici la Şcoala de Telegraf şi Poştă şi conferenţiar la Cursul de Algebră Superioară la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti.

In 1897, A. GH. IOACHIMESCU suplineşte pe marele SPIRU HARET la catedra de Geometrie analitică la Şcoala de Poduri şi Şosele.

In 1908, A. GH. IOACHIMESCU este numit profesor de Mecanică Raţională la Şcoala de Poduri şi Şosele.

Menţionăm că această numire a întâmpinat, ca de obicei, piedecile puse de oficialităţi: aceste piedeci au fost însă înlăturate prin intervenţia personală a D-lui Profesor ION IONESCU.

Deschiderea cursului s'a făcut la 1 Decemvrie 1908 printr'o cuvântare în care Profesorul A. GH. IOACHIMESCU aducea cuvenitul omagiu fostului titular al catedrei Profesorul GH. KIRILOV.

După o activitate neîntreruptă de 29 de ani, în care zeci de serii de elevi au putut asculta şi admira prelegerile şi seminariile sale fără egal, de o perfecţie pedagogică neasemuită, simţindu-se obosit şi slăbit A. GH. IOACHIMESCU îşi înaintează demisia sa la 1 Noemvrie 1937.

La masa colegială dela 15 Decemvrie 1937 la care s'a sărbătorit Profesorul A. GH. IOACHIMESCU au asistat toţi cei ce l-au cunoscut şi iubit.

La această sărbătorire au luat parte ţinând şi cuvântări D-nii N. VASILESCU-KARPEN, DAVID EMANUEL, C. BUŞILĂ, D. POMPEIU, C. C. TEODORESCU, I. IONESCU, D. GHERMANI, GRIGORE VASILESCU, CRISTEA MATEESCU precum şi preşedintete Federaţiei Societăţilor elevilor Şcoalei Politechnice D-l M. OTETELEŞIANU.

In cadrul *Societăţii Gazeta Matematică* ANDREI GH. IOACHIMESCU, în calitate de membru fondator, lucrează neîntrerupt cu începere dela înfiinţarea Societăţii în 1895 şi până la sfârşitul vieţii sale.

Primul articol din primul număr al *Gazetei Matematice* din 15 Septemvrie 1895 este datorit lui A. GH. IOACHIMESCU. Titlul acestui articol este: *Suprafaţa şi volumul produs prin rotaţia unui cerc sau poligon regulat ce se învârteşte în jurul unei drepte oarecare din planul său.*

De atunci numele lui A. GH. IOACHIMESCU se găseşte aproape în fiecare număr al *Gazetei Matematice* semnând articole, note şi probleme de algebră şi mecanică.

Menţionăm că la apariţia primelor numere A. GH. IOACHIMESCU şi V. CRISTESCU făceau cu schimbul în mansarda tipografiei, învăţând pe lucrătorul MACHE cum să culeagă şi să corecteze expresiunile matematice.

Stâlp al Gazetei Matematice, ANDREI GH. IOACHIMESCU lasă *Societăţii G. M.* profund îndurerate amintirea neştearsă a chipului său şi rezultatele muncii sale desinteresată şi fără preget.

Enumerăm mai jos lucrările lui A. GH. IOACHIMESCU scoase prin intermediul *Soc. Gazeta Matematică*:

In 1901, *Culegere de Probleme de Aritmetică Geometrie, şi Trigonometrie* în colaborare cu D-nul I. IONESCU şi regretaţii GH. ŢIŢEICA şi V. CRISTESCU.

In 1904, *Culegere de Probleme de Algebră.* A doua ediţie a acestei culegeri a apărut în 1921 iar ediţia III revăzută şi adăogită de D-l TIBERIU POPOVICI în 1926.

In 1922, *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie analitică* în colaborare cu GH. ŢIŢEICA, Culegerea de Probleme de Mecanică a apărut în ediţia II în 1943 fiind revăzută şi adăogită de D-ra GABRIELA ŢIŢEICA.

In 1923, *Vocabularul Matematic* în colaborare cu D-nul I. IONESCU şi regretaţii GH. EM. FILIPESCU, TRAIAN LALESCU şi GH. ŢIŢEICA.

Inafara *Societăţii Gazeta Matematică*, elevii lui A. GH. IOACHIMESCU au scos numeroase ediţii litografiate ale Cursului de Mecanică predat la Şcoala Politechnică precum şi două volume cu, Probleme propuse de A. GH. IOACHIMESCU şi rezolvate de elevii Şcoalei.

Menţionăm în plus faptul că multe lucrări ale lui A. GH. IOACHIMESCU începute dar neterminate au rămas la moartea sa în manuscris.

2. Activitatea lui A. Gh. Ioachimescu în cadrul Instituţiilor de Stat

Cu începere din 1892 şi până la 1910 A. GH. IOACHIMESCU a activat la Regia Monopolurilor Statului fiind înaintat la 1 Noemvrie 1895 Subdirector al Manufacturii de tutun Belvedere iar la 29 Martie 1902 Director al aceleiaşi manufacturi.

La 29 Ianuarie 1903 A. GH. IOACHIMESCU este numit Subdirector general R. M. S. unde rămâne până în anul 1905 când revine la postul de Director al Manufacturii Belvedere.

In această calitate activează până la 1910 când părăseşte Serviciul de Stat.

In aceste funcţii A. GH. IOACHIMESCU a lucrat cu râvnă, cu dragoste de personal; el a adus multe perfecţionări ale instalaţiilor

şi metodelor de lucru ocupându-se în acelaşi timp cu opera de asistenţă socială a lucrătorilor şi funcţionarilor R. M. S.

3. Activitatea lui A. Gh. Ioachimescu pe teren economic şi social

După plecarea dela Regia Monopolurilor Statului, ANDREI IOACHIMESCU preia Direcţia Societăţii Comunale pentru construcţia de locuinţe ieftine atunci înfiinţată.

Ulterior în 1919 este numit în Consiliul de Administraţie al Casei Centrale a Cooperaţiei, apoi în Consiliul de Administraţie al Casei Autonome a Monopolurilor (fosta Regia Monopolurilor Statului) unde ajunge Preşedinte de Consiliu şi în Consiliul de Administraţie al Căilor Ferate.

De asemenea A. GH. IOACHIMESCU activează în cadrul Societăţilor Govora-Călimăneşti, Edilitatea etc. şi este fundator al Soc. Cartea Românească al cărei administrator-delegat a rămas până la sfârşitul vieţii.

In aceste multiple ocupaţiuni ANDREI GH. IOACHIMESCU a fost un îndrumător al iniţiativei româneşti în toate domeniile de activitate economică şi socială.

Colaborator al marelui român VINTILĂ BRĂTIANU, ANDREI IOACHIMESCU a fost un pioner în opera de industrializare a ţării, în opera de naţionalizare a întreprinderilor existente în opera de asistenţă socială.

4. Activitatea lui A. G. Ioachimescu ca ostaş al Armatei Ţării

A. GH. IOACHIMESCU primeşte tresa de sublocotenent în Reg. 1 Geniu la 15 Martie 1897.

Campania din 1913 o face în ţară ca ofiţer într'o Companie de Cale Ferată.

In războiul cel mare 1916—18 A. GH. IOACHIMESCU este mobilizat ca ofiţer de geniu şi ia parte la înaintarea în Transilvania într'un Regiment C. F. în cadrele armatei de nord sub comanda D-lui Mareşal PRESAN.

După retragerea din Transilvania, în timpul căreia reuşeşte să evacueze Depozitul Armatei sub focul inamic, A. GH. IOACHIMESCU este trecut la Marele Cartier General.

In timpul retragerii din Muntenia, A. GH. IOACHIMESCU rămâne printre ultimii la Buzău pentru a executa distrugeri şi a împiedeca înaintarea trupelor inamice.

In Aprilie 1917 a fost trimis la Odessa pentru a face aprovizionări de materiale pentru armată, iar în Iunie 1917 a fost trimis la Petrograd ca şef al Serviciului de Aprovizionări şi transporturi pendinte de Ministerul Muniţiilor din ţară.

Menţionăm că acest din urmă post a fost refuzat în 1916 de A. GH. IOACHIMESCU care cunoştea lipsa de bunavoinţă a autorităţilor ruseşti, dar fiind trimis din ordin ca militar în 1917 s'a dus pentru a-şi îndeplini datoria către patrie.

Inaltul său spirit patriotic, tenacitatea în muncă, şi inteligenţa sa extrem de rapidă şi pătrunzătoare rezultă din fiecare din acţiunile sale menţionate mai sus.

In sufletul său, în care dragostea de ţară ardea ca o flacără vie, regăsim energia şi spiritul de sacrificiu al străbunicului său IOACHIM suferind prigoana ungurilor pentru împlinirea dreptăţii româneşti.

De altfel, în toate zilele mari pentru Ţara noastră, la locuinţa sa personală din Strada Buzeşti 74, fâlfâia mândru în bătaia vântului scumpul drapel al Patrii.

* * *

Pentru complectarea figurii celui ce a fost A. GH. IOACHIMESCU, mai ales pentru cei ce nu l-au cunoscut, este necesară o descriere a sufletului său nobil, a simţirilor sale de o rară delicateţă.

In acest scop, redăm mai jos două extrase din carnetul său de însemnări zilnice precum şi două spicuiri din ultimele scrisori către fiul său D-l Ing. GH. IOACHIMESCU, Sublocotenent de rezervă concentrat şi aflat la Odessa.

„Petrograd 23.X 1917.... Eu în sens strict ar trebui să execut, socotesc însă că datoria mea este de a executa nu în mod automatic, dar în mod inteligent; ştiu că prin aceasta îmi asum o răspundere, dar pe vremurile acestea, cine nu are curajul răspunderii nu-şi face datoria ...“

„Stockholm 12.III 1918.... caut să lucrez cu toată ardoarea la refacerea Culegerii de Probleme de Algebră, dar lucrarea se resimte de starea mea sufletească; fac greşeli multe din distracţie.

. . . . . .

Scrisoarea din 3 Sept. 1942.

„Eri am primit două cărți poștale dela tine. Aceia în care spui că ai intrat în a 6-a lună de când ești la Odessa dar că moralul și sănatatea sunt bune, mi-a deșteptat multe amintiri dela celălalt război. Mă gândeam la cei de atunci: DIAMANDI, DRĂGĂNESCU, POPA BURCĂ, SIMU, GEORGESCU, LALU, LITEANU, ION *ordonanța etc., unii nu mai sunt, de alții nu mai știu nimic. Și atunci au fost greutăți dar s'a terminat cu bine, sunt convins că și acum va fi tot așa, din toate punctele de vedere.*

Sănătate și voie bună să fie...".

Scrisoarea din 2 Februarie 1943. (Ultima scrisoare).

...„Acum te aștept să vii și tu după cum mi-ai promis. Pe aci a început să miroasă a primăvară, eu cel puțin o simt că toate reacțiunile din corp au început să iasă la suprafață.

Ce va mai fi vom vedea, deocamdată văd aproape zilnic cum câte unul din contemporanii mei se duc: zilele trecute N. V. TEODORESCU, *azi* LAURENȚIU TEODORESCU *... ce să-i faci, așa e legea naturii".*

(Va urma) ALEXANDRU STOENESCU.

APLICAȚII ALE GEOMETRIEI LA DISCUȚIA ȘI SEPARAREA RĂDĂCINILOR UNEI ECUAȚII

Resumé. Pour séparer ou discuter les racines d'une équation $f(x) = 0$, on résout l'équation par rapport au paramètre variable s'il existe, ou par rapport à un coefficient convenablement choisi, $k = P(x)$. On construit la courbe $y = P(x)$ et l'on voit en combien de points est coupée par une parallèle à Ox, spécialement $y = k$. Les abscisses des points correspondent aux racines de l'équation $f(x) = 0$, et l'on trouve entre quels nombres sont comprises les racines, plus facilement et mieux qu'avec le théorème de ROLLE, car dans le tableau de la discussion entre aussi les racines de $P(x) = 0$ et non seulement celles de $P'(x) = 0$. Pour trouver le nombre des racines dans l'intervalle (a, b), on considère les parallèles à Ox avec les ordonnées comprises entre $k_a = P(a)$ et $k_b = P(b)$.

Se cunosc diferite metode pentru discuția și separarea rădăcinilor unei ecuații. De asemenea, se știe că pentru a vedea numărul rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ cuprinse în intervalul (a, b), se face substituția $y = \dfrac{x - a}{b - x}$ și se obține o ecuație $g(y) = 0$, cu

rădăcinile reale în acelaşi timp ca şi $f(x)=0$. Când $a<x<b$, atunci $y>0$, deci la rădăcini x cuprinse între a şi b corespund rădăcini pozitive y pentru $g(y)=0$, căreia i se poate aplica teorema lui DESCARTES. Dacă se ştie că $f(x)=0$ are toate rădăcinile reale se poate calcula exact numărul rădăcinilor x cuprinse între a şi b.

In cele ce urmează, rezolvăm ecuaţia $f(x)=0$ în raport cu parametrul variabil dacă există, sau în raport cu unul din coeficienţii ecuaţiei, ales potrivit, $k=P(x)$.

Construim curba $y=P(x)$ şi vedem în câte puncte o taie o paralelă cu Ox, şi în special $y=k$. Abscisele acestor puncte corespund rădăcinilor ecuaţiei $f(x)=0$ şi astfel se poate găsi între ce numere sunt cuprinse rădăcinile, uneori mai uşor şi mai bine decât cu teorema lui ROLLE, căci pe lânga rădăcinile derivatei $P'(x)$ mai intră şi valorile lui x pentru care $P(x)=0$. Pentru a vedea numărul rădăcinilor cuprinse între a şi b, considerăm paralelele la Ox cu ordonatele cuprinse între $k_a=P(a)$ şi $k_b=P(b)$.

Exemple. 1. *Să se discute ecuaţia* $x^3-x^2-x+\lambda=0$ (Examen de capacitate, 1943). Rezolvând în raport cu λ, $\lambda=-x^3+x^2+x$, curba $y=-x^3+x^2+x$ taie axa Ox (fig. 1) în punctele O, C, de abscise date de $-x^3+x^2+x=0$,

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad 0,\quad \frac{1-\sqrt{5}}{3}.$$

Derivata este

$$y'=-3x^2+2x+1=-3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		∞
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
			A		D		O		B		C		

O paralelă la Ox sub D, cu ordonata mai mică decât $-\frac{5}{27}$ a lui D taie curba într'un punct cu abscisa mai mare decât $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; deci pentru $\lambda<-\frac{5}{27}$ o rădăcină pozitivă mai mare ca $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

care cu teorema lui ROLLE s'ar fi ştiut numai că este mai mare ca 1. O paralelă cu ordonata $-\frac{5}{27}$ o taie în două puncte confundate şi altul; deci pentru $\lambda = -\frac{5}{27}$ o rădăcină dublă egală cu $-\frac{1}{3}$ şi alta mai mare ca $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. O paralelă între D şi Ox, cu ordonata între $-\frac{5}{27}$ şi O, taie curba în trei puncte; deci,

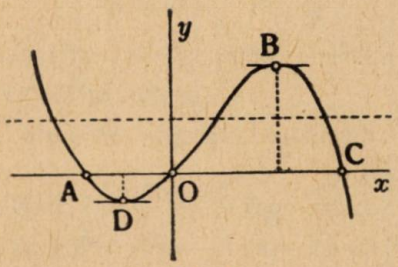


Fig. 1.

$-\frac{5}{17} < \lambda < 0$, trei rădăcini cuprinse în intervalele $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$. Când paralela este între Ox şi B, are ordonata între 0 şi 1, taie curba în trei puncte; deci $0 < \lambda < 1$, trei rădăcini, una mai mică decât $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, şi altele în intervalele $(0, 1)$, $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Pentru $\lambda = 1$ o rădăcină dublă egală cu 1 şi alta mai mică decât $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Când $\lambda > 1$, avem o rădăcină reală mai mică decât $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ [1].

$$\frac{m^2}{4} \leqq k \leqq 0, \quad -\frac{l^2}{4} \leqq 12a^4 - 4b^3 l \leqq 0,$$

$$\frac{3a^4}{l} \leqq b^3 \leqq \frac{3a^4}{l} + \frac{l^3}{16}.$$

1) Aşa a procedat D-l TH. ANGHELUŢĂ la un exemplu din Culegere de exerciţii şi probleme de Analiză, Teoria funcţiilor, Mecanică.

2. *Pentru construcția curbei* [1])

$$(1)\quad \begin{cases} x = \dfrac{r + a\cos\theta}{\cos^2\theta - m^2\sin^2\theta}\cos\theta, \\ y = -m^2\dfrac{r + a\cos\theta}{\cos^2\theta - m^2\sin^2\theta}\sin\theta, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi \end{cases}$$

trebuie să vedem semnele și valorile pentru care se anulează numărătorii expresiilor

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{rm^2 + 2am^2\cos\theta + r(1+m^2)\cos^2\theta}{(\cos^2\theta - m^2\sin^2\theta)^2}\sin\theta, \\ \dfrac{dy}{d\theta} = m\dfrac{-am^2 - (2+m^2)r\cos\theta - a(1-m^2)\cos^2\theta + r(1+m^2)\cos^3\theta}{(\cos^2\theta - m^2\sin^2\theta)^2}. \end{cases}$$

Trebuie să discutăm ecuațiile obținute egalând cu zero numărătorii din (2),

$$rm^2 + 2am^2\cos\theta + r(1+m^2)\cos^2\theta = 0,$$

$$-am^2 - (2+m^2)r\cos\theta - a(1-m^2)\cos^2\theta + r(1+m^2)\cos^3\theta = 0.$$

Insemnăm $\cos\theta = t$, rezolvând în raport cu parametrul $\dfrac{a}{r}$, obținem

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{r} = u_1(t), \qquad u_1(t) = -\dfrac{(1+m^2)t^2 + m^2}{2m^2 t}, \\ \dfrac{a}{r} = u_2(t), \qquad u_2(t) = t\,\dfrac{(1+m^2)t^2 - (2+m^2)}{(1-m^2)t^2 + m^2}, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{2rm^2 t}{(\cos^2\theta - m^2\sin^2\theta)^2}\left[\dfrac{a}{r} - u_1(t)\right], \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{rm^2}{(\cos^2\theta - m^2\sin^2\theta)^2}(1-m^2)t^2 + m^2]\left[\dfrac{a}{r} - u_2(t)\right]. \end{cases}$$

Rădăcinile $t = \cos\theta$ trebuie să fie cuprinse între -1 și $+1$. Limitele între care poate să varieze parametrul variabil $\dfrac{a}{r}$ se obțin înlocuind în (3) pe t cu ± 1, și avem

$$u_1(-1) = -1 + \frac{1}{2m^2}, \quad u_1(1) = -\left(1 + \frac{1}{2m^2}\right),$$

$$u_1(-1) = 1, \quad u_2(1) = -1.$$

1) Problema 5341, propusă de mine și a cărei soluție se publică la pag. 420 din acest număr.

Să construim curbele $u = u_1(t)$ și $u = u_2(t)$. Avem

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{m^2 - (1+m^2)\,t^2}{2m^2\,t},$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{[(1+m^2)\,t^2 - m^2]\,[(1-m^2)\,t^2 - (2+m^2)]}{[m^2 + (1-m^2)\,t^2]^2}.$$

Cum $|t| = \cos\theta < 1$, rădăcina $\frac{2+m^2}{1-m^2} > 2$ a lui $\frac{du_2}{dt}$ nu convine.

t	-1		$-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$		0		$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$		$+1$
$\frac{du_1}{dt}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{du_2}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
u_1	$1+\frac{1}{2m^2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	$\nearrow$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	$\searrow$	$-\left(1+\frac{1}{2m^2}\right)$
	A_1		K		B,C		S		B_1
u_2	1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	$\nearrow$	-1
	A_2		K		O		S		B_2

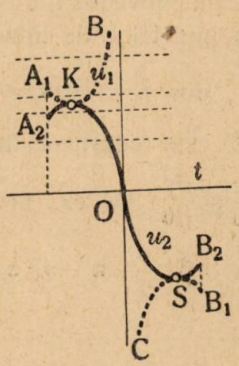


Fig. 2.

Se vede că o paralelă la Ot cuprinsă între O şi A_2, la depărtarea $u < 1$, taie curba u_2 într'un punct şi nu taie pe u_1. Paralelele cuprinse între A_2 şi K, pentru care $1 < u < \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$, taie curba u_2 în două puncte şi pe u_1 nu o taie. Paralelele cuprinse între K şi A_1, $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} < u < 1 + \frac{1}{2m^2}$, nu taie pe u_2 şi taie pe u_1 în două puncte. Paralelele dincolo de A_1, $u > 1 + \frac{1}{2m^2}$, taie numai curba u_1 într'un punct.

$\frac{dx}{d\theta}$ şi $\frac{dy}{d\theta}$ se anulează pentru valorile lui θ pentru care $u_1(t)$ şi $u_2(t)$ sunt egale cu $\frac{a}{r}$.

Deci dacă $\frac{a}{r} < 1$, $\frac{dx}{d\theta}$ n'are rădăcini, $\frac{dy}{d\theta}$ are una rădăcină

$1 < \frac{a}{r} < \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$, $\frac{dx}{d\theta}$ n'are rădăcini, $\frac{dy}{d\theta}$ are două rădăcini

$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} < \frac{a}{r} < 1 + \frac{1}{2m^2}$, $\frac{dx}{d\theta}$ are două rădăcini, $\frac{dy}{d\theta}$ n'are rădăcini

$\frac{a}{r} > 1$, $\frac{dx}{d\theta}$ are una rădăcină, $\frac{dy}{d\theta}$ n'are rădăcini.

Cu această metodă putem vedea între ce numere sunt cuprinse rădăcinile, după situaţia punctelor de intersecţie.

Punând $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{m}$, din $t_1 = \cos\theta_1 = -\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, rezultă că $\theta_1 = \pi - \beta$ şi că $\pi - \beta$ este cuprinsă între cele două rădăcini $\pi - \alpha$ şi $\pi - \gamma$ ale lui $\frac{dx}{d\theta}$ şi $\frac{dy}{d\theta}$. De ex., pentru $1 < \frac{a}{r} < \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$, ordinea rădăcinilor este $0, \beta, \frac{\pi}{2}, \pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma, \pi$.

N. ABRAMESCU.

ASUPRA UNEI MATRICI DIN CALCULUL VECTORIAL

1. Să considerăm o matrice dreptunghiulară de scalari:

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots\dots & a_{n-1\,n} \end{pmatrix}$$

cu $n-1$ linii şi n coloane ($n > 2$). Vom însemna cu D_k ($k=1,2,\dots,n$) determinantul format cu elementele matricei considerate în ordinea de mai sus, din care am eliminat coloana a_{ik} ($i = 1,2,\dots,n-1$).

Fie $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$, n versori între care există relaţiile lineare:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1\,1}\alpha_1 + a_{n-1\,2}\alpha_2 + \dots + a_{n-1\,n}\alpha_n = 0. \end{cases}$$

Eliminând între aceste relaţii versorii $\alpha_2, \alpha_3,\dots,\alpha_{n-1}$ după regulile obişnuite ce se aplică relaţiilor lineare între mărimi scalare, obţinem:

$$(3)\qquad D_n\alpha_1 = (-1)^{n-1} D_1 \alpha_n,$$

sau în general:

$$(3')\quad (-1)^{i-1} D_k \alpha_i = (-1)^{k-1} D_i \alpha_k, \quad (i,k=1,2,\dots,n;\ i\neq k).$$

Relaţia (3') ne spune că dacă unul din determinanţii D_k este diferit de zero atunci toţi aceşti determinanţi sunt diferiţi de zero. Căci dacă am presupune că unul dintre ei, D_i, ar fi nul, atunci relaţia corespunzătoare (3') ar fi imposibilă. Aşa dar:

Determinanţii D_k *sunt sau toţi nuli, sau toţi diferiţi de zero.*

In cazul când toţi ar fi diferiţi de zero, relaţia (3') ne arată că versorii α_i ($i = 1,2,\dots,n$) au toţi aceeaşi direcţie. Deducem:

Dacă versorii $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$ *au direcţii diferite, atunci toţi determinanţii* D_k ($k = 1,2,\dots,n$) *sunt nuli.*

2. Să considerăm acum numai $n-1$ relații din (1), s. ex. primele $n-2$:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0,\\ &a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n-2\,1}\alpha_1 + a_{n-2\,2}\alpha_2 + \ldots + a_{n-2\,n}\alpha_n = 0 \end{aligned}$$

și să eliminăm între ele $n-3$ dintre versorii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Vom obține astfel o relație lineară între ceilalți trei versori, să zicem $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k (i<j<k)$:

$$(5)\qquad (-1)^{i-1} D_{jk}^{n-1}\alpha_i + (-1)^{j-2} D_{ki}^{n-1}\alpha_j + (-1)^{k-3} D_{ij}^{n-1}\alpha_k = 0.$$

Am însemnat cu D_{rs}^{t} determinantul ce se obține din matricea considerată (1) lăsând la o parte linia de ordinul t precum și coloanele de ordinul r și s.

Se înțelege că dacă în locul sistemului (4) am considera sistemul ce ar rezulta din (2) prin omiterea rândului de ordinul l, relația (5) ar fi înlocuită cu alta mai generală:

$$(5')\qquad (-1)^{i-1} D_{jk}^{l}\alpha_i + (-1)^{j-2} D_{ki}^{l}\alpha_j + (-1)^{k-3} D_{ij}^{l}\alpha_k = 0,$$

unde i, j, k pot lua orice valori întregi $1, 2, \ldots, n, (i<j<k)$, iar l orice valoare întreagă $1, 2, \ldots, n-1$.

Vom numi *coplanari* versorii care sunt paraleli unui plan.

Cu această definiție deducem din (5') următoarea proprietate:

Dacă cei trei versori $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ nu sunt coplanari, atunci determinanții D_{jk}^{l}, D_{kl}^{l}, D_{ij}^{l} sunt nuli, oricare ar fi valoarea lui $l (= 1, 2, \ldots, n-1)$.

In cazul când $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ ar fi coplanari, nu e necesar ca acești determinanți să fie nuli. In adevăr, se știe că între versorii coplanari $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ există relația:

$$\alpha_k = m_i\alpha_i + m_j\alpha_j.$$

m_i și m_j sunt doi scalari având valorile:

$$m_i = \frac{\alpha_k \times \alpha_j}{\alpha_i \times \alpha_j}, \qquad m_j = \frac{\alpha_k \times \alpha_i}{\alpha_j \times \alpha_i}$$

($\alpha_r \times \alpha_s$ = produsul vectorial între α_r și α_s).

Rezultă:

Dacă cei trei versori α_i, α_j, α_k sunt coplanari, atunci determinanții D'_{jk}, D'_{ki}, D'_{ij} sunt proporționali respectivi cu numerele:

$$(-1)^{i-1} m_i \quad , \quad (-1)^{j-2} m_j \quad , \quad (-1)^{k-2}.$$

3. Proprietățile matricei (1) semnalate mai sus își găsesc ușor o explicație dacă în relațiile (2) se înlocuiesc versorii în funcție numai de doi dintre ei, în cazul când toți ar fi coplanari, sau în funcție numai de trei dintre ei, în cazul când versorii nu ar fi coplanari.

4. Să presupunem acum că cu ajutorul celor n versori $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de direcții diferite formăm un poligon P cu N laturi ($N \geqq n$), înțelegând prin aceasta că poligonul are m_1 laturi paralele cu versorul α_1, m_2 laturi paralele cu α_2 ș. a. m. d., m_n laturi paralele cu α_n, așa fel încât numerele întregi, pozitive $m_1, m_2, \ldots, m_n$ să satisfacă relația:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = N.$$

Vom însemna cu a_i suma algebrică a celor m_i laturi paralele cu versorul $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ afectând latura cu semnul plus sau cu semnul minus, după cum ea este de același sens sau de sens opus cu α_i.

In lungul fiecărei laturi a poligonului ne închipuim lucrând câte o forță. Suma celor N forțe astfel închipuite fie vectorul φ pe care-l vom numi: *rezultanta forțelor*. Vom avea așa dar

$$F_1\alpha_1 + F_2\alpha_2 + \ldots + F_n\alpha_n = \varphi,$$

unde am însemnat cu F_i scalarul reprezentând suma algebrică a forțelor lucrând în lungul laturilor paralele cu vectorul α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Dacă acum ne închipuim un al doilea sistem de forțe lucrând în lungul laturilor poligonului P, vom avea o a doua relație

$$G_1\alpha_1 + G_2\alpha_2 + \ldots + G_n\alpha_n = \psi.$$

Să considerăm $n - 1$ astfel de sisteme de forțe lucrând în lungul laturilor poligonului P. Vom obține astfel $n - 1$ relații:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &F_1\alpha_1 + F_2\alpha_2 + \ldots + F_n\alpha_n = \varphi, \\ &G_1\alpha_1 + G_2\alpha_2 + \ldots + G_n\alpha_n = \psi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 + \ldots + P_n\alpha_n = \pi, \end{aligned}$$

unde $\varphi, \psi, \ldots, \pi$ sunt cele $n-1$ rezultante respective. Vom demonstra acum următoarea proprietate:

Dacă vectorii $\varphi, \psi, \ldots, \pi$ *au aceeaşi direcţie atunci determinantul:*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ F_1 & F_2 \ldots F_n \\ G_1 & G_2 \ldots G_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1 & P_2 \ldots P_n \end{vmatrix}$$

este egal cu zero.

In adevăr, în cazul când vectorii $\varphi, \psi, \ldots, \pi$ au aceeaşi direcţie, ei se vor putea exprima în funcţiune de unul dintre ei, φ spre pildă, în felul următor:

$$\psi = m\varphi, \ldots, \pi = p\varphi$$

$m, \ldots, p$ fiind nişte scalari. Relaţiile (6) vor da naştere la următoarele $n-2$ relaţii:

$$(G_1 - mF_1)\alpha_1 + (G_2 - mF_2)\alpha_2 + \ldots + (G_n - mF_n)\alpha_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(P_1 - pF_1)\alpha_1 + (P_2 - pF_2)\alpha_2 + \ldots + (P_n - pF_n)\alpha_n = 0,$$

care împreună cu relaţia evidentă

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = 0$$

vor alcătui un sistem de $n-1$ relaţii de forma (2). Rezultă deci că toţi determinanţii de ordinul $n-1$ ce se pot forma cu elementele matricei

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots\ldots\ldots & a_n \\ G_1 - mF_1 & G_2 - mF_2 \ldots & G_n - mF_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ P_1 - pF_1 & P_2 - pF_2 \ldots & P_n - pF_n \end{pmatrix}$$

sunt nuli. Aşa dar, proprietatea anunţată este demonstrată, ceea ce se vede imediat dacă punem determinantul D sub forma:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \ldots\ldots\ldots & a_n \\ F_1 & F_2 \ldots\ldots\ldots & F_n \\ G_1 - m F_1 & G_2 - m F_2 \ldots\ldots & G_n - m F_n \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ P_1 - p F_1 & P_2 - p F_2 \ldots\ldots & P_n - p F_n \end{vmatrix}$$

şi dacă-l desvoltăm după elementele celei de a doua linie.

5. Proprietatea demonstrată la numărul precedent generalizează problema 5725 [1]) a cărei soluţie a fost dată în G. M., în numărul din Aprilie 1943 (vol. XLVIII, p. 379). In acea problemă, poligonul e un triunghiu având laturile a, b, c. In lungul laturilor triunghiului lucrează forţele de mărimi F_a, F_b, F_c şi de rezultantă F, precum şi forţele de mărimi P_a, P_b, P_c şi de rezultantă P. Vectorii P şi F având aceeaşi direcţie, se cere să se demonstreze că determinantul D corespunzător este nul.

Să-mi fie îngăduit a da o demonstraţie mai simplă acestei proprietăţi.

Fie m raportul între cele două forţe F şi P. Vom putea scrie:

$$\frac{a}{F_a - mP_a} = \frac{b}{F_b - mP_b} = \frac{c}{F_c - mP_c}.$$

deoarece rezultanta forţelor $F_a - mP_a$, $F_b - mP_b$, $F_c - mP_c$ din lungul laturilor triunghiului ABC îşi fac echilibru, adică ele pot alcătui un triunghiu asemenea cu ABC. Insemnând cu r valoarea comună a rapoartelor de mai sus şi cu r' mărimea $-mr$ vom avea:

$$a = rF_a + r'P_a \quad , \quad b = rF_b + r'P_b \quad , \quad c = rF_c + r'P_c .$$

Aşa dar, determinantul $\begin{vmatrix} a & F_a & P_a \end{vmatrix}$ trebuie să fie nul.

V. VÂLCOVICI.

---

1) Generalizarea acestei probleme formează şi obiectul unui articol al D-lui PROF. D. V. IONESCU, articol trimis în Decemvrie 1942 şi care se va publica în numărul din Iunie sau Iulie.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ

Membrii Comisiunii au cercetat activitatea din *Gazeta Matematică*, Anul XLVII, a corespondenţilor, elevi de liceu şi au constatat că niciunul din ei n'au publicat în volumul menţionat articole, note sau probleme propuse de Algebră.

Cercetând apoi activitatea acestor corespondenţi, ca rezolvitori de probleme de Algebră, Comisiunea s'a oprit asupra activităţii D-lui DRĂGHICESCU P. PAUL, elev, anul trecut, în clasa VIII-a a Liceului Gh. „Makarovici" din Iaşi. Domnia-sa este menţionat la soluţiile publicate a următoarelor şase probleme de Algebră: 5264 (p. 185); 5194 (p. 281); 5369 (p. 284); 5003 (p. 380); 5403 (426); 5174 (p. 526). De asemenea este trecut pe copertă cu următoarele 9 probleme de Algebră: 4458; 5419; 5599; 5381; 5575; 5626; 5600; 5649; 3513.

D-l PAUL DRĂGHICESCU a dat dovadă de mare sârguinţă şi de reale însuşiri pentru Algebră. La Concursul *Gazetei Matematice* a luat premiul întâi (p. 395). A obţinut următoarele premii: Premiul N. BOTEA (p. 212); Premiul de Aritmetică p. (319); Premiul ING. AL. ROŞU (p. 357); Premiul de Geometrie elementară G. ŢIŢEICA (p. 506).

Pentru aceste motive membrii Comisiunii pentru decernarea Premiului de Algebră sunt de părere să se acorde acest premiu Domnului DRĂGHICESCU PAUL.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ

D-nii: Prof. V. ALACI, Prof. TH. ANGHELUŢĂ şi Ing. AL. BUNESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea Generală din 18 Februarie 1943.

NOTE MATEMATICE

44. *Despre înălţimile unui triunghiu.* Fie triunghiul ABC înscris în cercul de centru O; A_m, B_m, C_m mijloacele laturilor; A', B', C' picioarele înălţimilor care întâlnesc cercul O în A",

B″, C″; H ortocentrul şi O_q centrul cercului lui EULER. Voim să punem în evidenţă proprietăţile care urmează.

1. O'_q fiind proiecţia lui O_q pe BC, avem în mărime şi în semn:

$$O_q O'_q = \frac{1}{2}(OA_m + HA') = \frac{1}{4}(AA' - A'A'') + \frac{1}{2}HA'$$

$$= \frac{1}{4}(AA' - HA') + \frac{1}{2}HA' = \frac{1}{4}(AA' + HA') = \frac{1}{4}AA''.$$

De aici rezultă că *în orice triunghiu, segmentele interceptate pe înălţimi de cercul circumscris sunt respectiv egale, în mărime şi în semn, cu de patru ori distanţa centrului cercului lui* EULER *la laturile corespunzătoare ale triunghiului.*

2. Din proprietatea precedentă se deduc următoarele două proprietăţi:

1°. *Pentru ca cercul circumscris unui triunghiu să fie tangent unei înălţimi, trebuie şi este suficient, ca centrul cercului lui* EULER *să fie pe latura corespunzătoare înălţimii considerate.*

2°. *Pentru ca un triunghiu* ABC *să aibă două înălţimi* BB', CC' *tangente cercului circumscris, trebuie şi este suficient, ca centrul cercului lui* EULER *să coincidă cu vârful* A.

In cazul acestui triunghiu particular, vârfurile A, B, C coincid cu trei vârfuri consecutive ale unui exagon înscris în cercul ABC.

V. THÉBAULT.

45. *Asupra problemei 5347, rezolvată la pag. 85* [1]).

1. Voi da o soluţiune care mi se pare mai clară.

Ştim că între n şi $2(n-1)$ există cel puţin un număr prim dacă avem $2n > 7$. Or, dacă p şi q sunt două numere prime consecutive, înseamnă că între p şi q nu va mai exista niciun alt număr prim, deci vom putea avea:

— sau: $p = n$ şi $q < 2(n-1)$

— sau: $p > n$ şi $q = 2(n-1)$.

---

1) Vezi erata dela pag. 440, Vol. XLVII asupra numărului de ordine al problemei.

In cazul problemei 5347, avem:

— în primul caz: $n^3 > 4(n-1)^2$, ceea ce pentru $n \geqslant 1$ este evidentă;

— în al doilea caz: aceeaşi neegalitate evidentă.

Cazurile excepţionale provin din condiţia $2n > 7$.

2. Voi încerca să extind problema, în care scop voi căuta pe x şi y pentru care avem:

$$p^x > q^y .$$

Raţionând ca mai sus, avem:

$$n^x > [2(n-1)]^y .$$

De unde rezultă că va trebui să avem:

$$\frac{x}{y} > \frac{\log.(n-1) + \log.2}{\log.n}.$$

Sau chiar:

$$\frac{x}{y} > \frac{\log.(p-1) + \log.2}{\log.p}.$$

Cum avem $2n > 7$ înseamnă că $p \geqslant 5$, deci:

$$\frac{x}{y} > 1{,}292\ldots$$

COMANDOR I. LINTEŞ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL « GAZETEI MATEMATICE » DIN ANUL 1943

CHESTIUNILE DATE LA PROBELE SCRISE DIN ZIUA DE 29 APRILIE 1943

(Timpul acordat: 3 ore pentru fiecare materie)

CLASA IV-a

Algebra. I. Ştiind că

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{şi} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'},$$

se cere să se găsească condiţia ca sumele $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$, $d + d'$ să formeze de asemeni o proporţie.

II. Un teren dreptunghiular are lățimea egală cu $\frac{5}{8}$ din lungime. Proprietarul terenului vinde o parte din el și-și păstrează o parcelă dreptunghiulară lungă de 30 m și lată cât $\frac{13}{15}$ din lățimea inițială. Cu suma încasată din vânzare cumpără 10.875 bucăți de titluri de rentă din împrumutul pentru înzestrarea armatei. Valoarea nominală a fiecărui titlu este de 1000 lei, iar cursul de cumpărare este de 72%. Se cere să se determine dimensiunile terenului dreptunghiular inițial.

III. Să se arate că dacă

$$x = a^2 - bc \quad , \quad y = b^2 - ca \quad , \quad z = c^2 - ab,$$

atunci

$$ax + by + cz = (x + y + z)(a + b + c),$$

Geometria în spațiu. I. Să se demonstreze că două drepte, fiecare din ele paralelă cu o a treia dreaptă nefăcând parte din planul primelor două, sunt paralele între ele.

II. Se consideră o piramidă oarecare $VA_1A_2A_3 \ldots A_n$ având aria bazei S, înălțimea H și volumul V. Un plan (P) paralel cu baza, dus la distanța d de vârf taie muchiile VA_1, VA_2, $VA_3, \ldots$, VA_n respectiv în M_1, M_2, $M_3, \ldots, M_n$. Fie M_1', M_2', $M_3', \ldots$, M_n' proiecțiunile acestor puncte pe planul bazei.

Se cere :

1°. Să se demonstreze că volumul prismei $M_1M_2M_3 \ldots M_n M_1'M_2'M_3' \ldots M_n'$ este

$$v = 3\left(\frac{d}{H}\right)^2 \left(1 - \frac{d}{H}\right) V.$$

2°. Să se demonstreze că aria totală a prismei considerate este

$$a_t = \left[\left(\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n}\right)\left(H - d\right) + 2\left(\frac{d}{H}\right) S\right] \frac{d}{H}.$$

3°. Să se aplice formulele precedente, calculându-se v și a_t în cazul când piramida este un tetraedru regulat de muchie a, iar (P) este dus pe la jumătatea înălțimii.

4°. Înălțimea piramidei înțeapă planul (P) în P_1 și baza în P_2. Ce suprafață descrie cercul mare, al sferei de diametru P_1P_2, paralel cu planul bazei, când (P) se deplasează paralel cu el însuși ?

CLASA V-a

Aritmetica. I. În ce an s'au născut persoanele care la anul vor avea vârsta egală cu suma cifrelor anului ?

II. Când diferența a două fracții este egală cu dublul sau triplul diferenței lor?

III. Numerele a și b fiind prime cu 11, în ce caz avem:

$$a^6 + 3 \cdot b^6 = \mathcal{M}11.$$

IV. Un aliaj de aur (cu aramă) are titlul de 0,7 și cântărește 3 kg. Ce greutate trebuiește *afinată* (operație de sporire a metalului nobil), pentru ca titlul să se ridice la 0,9?

Notă. Este suficient să se rezolve numai trei probleme, la alegere.

Algebra. I. Să se verifice egalitatea

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

II. Să se rezolve ecuația

$$2(a^3 + b^3)x^2 - 3x + a + b = 0,$$

știind că a și b sunt rădăcinile ecuației

$$y^2 - 5y + 12 = 0.$$

III. Se dă

$$A = 8x^3yz - 12x^4y - 4x^3y^2 - 10xy^3z + 15x^2y^3 + 5xy^4 + 2xyz^3 - 3x^2yz^2 - xy^2z^2.$$

Se pune

$$y = x^p \quad , \quad z = x^q$$

și se cere să se determine p și q așa în cât A să devină

$$B = 2x^{311} - x^{221} - 3x^{212} - 10x^{131} + 8x^{113} + 5x^{41} + 15x^{32} - 4x^{23} - 12x^{14}.$$

Să se verifice apoi că

$$B = (2x^{111} - x^{21} - 3x^{12})(x^{200} - 5x^{20} + 4x^2).$$

CLASA VI-a

Aritmetica. I. Cât de mare ar putea să fie numărul divizorilor lui $n!$, adică al unei factoriale date?

II. Care număr de trei cifre are un număr de divizori cât mai mare și un număr de numere prime cu el, și mai mici ca el, cât mai mic?

III. In ce caz numerele a și b satisfac relația:

$$[\sigma(a)]^{2\sigma(b)} - [\sigma(b)]^{2\sigma(a)} = \mathcal{M}(a \cdot b),$$

unde $\sigma(i)$ reprezintă suma numerelor prime cu i și mai mici de cât i.

IV. Să se arate că:

$$40!60! + 1 = \mathcal{M}101.$$

Notă. Este suficient să se rezolve numai trei probleme, la alegere.

Trigonometria. 1. Se dă un triunghiu oarecare ABC şi un punct interior P.

Să se arate, că între unghiurile A, B, C ale triunghiului dat şi unghiurile:

$$\alpha = PBC \quad , \quad \beta = PCA \quad , \quad \gamma = PAB,$$

avem relaţia:

$$(\cot\alpha - \cot B)\,(\cot\beta - \cot C)\,(\cot\gamma - \cot A) = \frac{1}{\sin A \sin B \sin C}$$

şi să se deducă apoi, că dacă $\alpha = \beta = \gamma = \omega$, avem:

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C.$$

2. Dacă α, β, γ sunt unghiurile sub care se văd diagonalele feţelor unui paralelipiped dreptunghiu din centrul său, iar m şi m', n şi n', p şi p' unghiurile sub care se văd laturile feţelor diferite din centrele lor respective, să se arate că avem relaţia:

$$\Sigma \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \Sigma \operatorname{tg}^2 \frac{m}{2} + \Sigma \operatorname{tg}^2 \frac{m'}{2}.$$

Geometria în spaţiu. Se consideră un con circular drept VAB. Un plan dus prin vârf taie suprafaţa laterală şi baza determinând o secţiune VMN în formă de triunghiu echilateral de latură a. Fiind cunoscut şi unghiul dela vârful conului, $\sphericalangle AVB = 2\alpha$, se cere:

1. Să se expună modul de construcţie al conului, datele fiind a, α. Între ce limite trebuie să fie cuprins α pentru ca să fie posibilă construcţia?

2. Considerând pe MN fix, ca mărime şi poziţie, iar pe α variabil, să se afle: 1°) locul geometric al vârfului V; 2°) locul geometric al unui punct P care împarte segmentul $\overline{VM}$ în raportul $\frac{\overline{MP}}{\overline{PV}} = k = C^t$; 3°) locul geometric al dreptei VM.

3. Fiind dat că raportul între aria totală şi aria laterală la conul considerat este $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+3)$, să se afle în funcţiune de a expresiunile ariilor laterală, totală şi a volumului conului VAB.

4. In ipoteza dela punctul precedent să se afle expresiunea ariei totale a fiecăruia dintre cele două solide determinate de conul VAB şi de planul de secţiune.

5. Să se afle expresiunile volumelor celor două solide dela punctul precedent.

CLASA VII-a

Algebra. Fiind dată funcţiunea

$$y = x^m (1 - x^n)^p,$$

în care m, n şi p sunt parametri reali, se cere să se studieze variaţia funcţiunii şi să se reprezinte curba reprezentativă pentru toate valorile posibile ale parametrilor m, n şi p.

Geometria descriptivă. Pe pagina a treia a coalei de hârtie se va executa următoarea epură:

Linia de pământ, paralelă cu marginile mici ale coalei şi la 150 $^{m}/_{m}$ de jos în sus. Se dă punctul A (100, 80, 100), dreapta D ale cărei urme sunt orizontal H (73, 36, 0), vertical V (136, 0, 107) şi planul PαP′ pentru care α (20, 0, 0), αP face 45° cu linia de pământ spre dreapta în jos, αP′ face un unghiu de 30° spre dreapta în sus. Numerele din paranteze înseamnă respectiv: primul distanţa liniei de ordine la punctul de origină; al doilea depărtarea şi al treilea cota.

Cotele sunt date în mm, iar origina este pe linia de pământ în marginea din stânga a foaiei de hârtie.

Se cere:

1°. Să se afle în adevărata mărime distanţa dela A la planul PαP′.

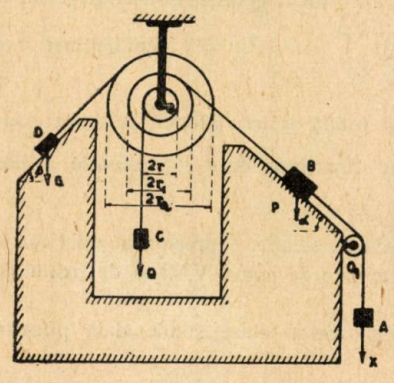
2°. Să se construiască dreapta de cea mai mare pantă a planului PαP′, care trece prin piciorul M al perpendicularei din A pe planul PαP′ şi să se determine unghiul pe care-l face planul PαP′ cu planul orizontal de proiecţie.

3°. O prizmă dreaptă triunghiulară are baza sa un triunghiu echilateral MNR situat în planul PαP′ şi având ca latură distanţa dela M la punctul N de intersecţie al planului PαP′ cu dreapta D; cel de-al treilea vârf al acestui triunghiu este luat în plan spre dreapta sensului NM. Înălţimea prizmei este egală cu distanţa dela A la planul PαP′.

Să se construiască această prizmă şi să i se puncteze muchiile nevăzute.

CLASA VIII-a

Mecanica. 1. Să se determine greutatea corpului A pentru *echilibrul* mecanismului din figură, compus din patru corpuri A, B, C, D (din care A şi C sunt prinse cu fire verticale, iar B şi D se reazimă pe linia de cea mai mare pantă a 2 plane înclinate sub unghiurile α, respectiv β faţă de orizontală), din sistemul O de trei roţi ce se rotesc solidar în jurul centrului comun O şi scripetele O_1.



Greutăţile corpurilor B, C, D sunt respectiv P, Q şi G.

Intreg mecanismul se va considera situat în acelaş plan vertical.

Frecările şi greutăţile roţilor şi scripetelui se vor neglija.

Să se determine tensiunile în fire, reacţiunea planelor înclinate şi reacţiunile în centrele O şi O_1.

2. Să se determine unghiul α, pe care-l face un plan înclinat AB cu orizontala, astfel încât o sanie lăsată să alunece fără iuţeală iniţială să ajungă în minimum de timp în B, străbătând o distanţă orizontală BC = a. Frecarea şi rezistenţa aerului se vor neglija. Pentru unghiul α astfel determinat să se găsească iuţeala cu care ajunge în B şi timpul în care parcurge distanţa AB.

Geometria analitică. 1. Se dă un cerc (O) de rază R, o dreaptă (D) şi o direcţie Δ neparalelă cu dreapta D. Proiectăm punctul M al cercului (O), paralel cu Δ, pe dreapta D în N şi unim punctul N cu M' simetricul lui M în raport cu centrul cercului (O). Fie P punctul care determină pe segmentul M'N raportul $\frac{\overline{PM'}}{\overline{PN}} = -k$ (k fiind un număr dat).

a) Să se găsească locul punctului P, când M se mişcă pe cercul (O).

b) Să se arate că locul este o conică cu centrul la distanţă finită.

c) Să se mute origina axelor de coordonate în centrul conicei; apoi să se determine unghiul de care trebuie rotit sistemul de axe de coordonate în jurul noului origine, pentru ca aceste axe să se suprapună axelor de simetrie ale locului.

d) Să se construiască conica descrisă de punctul P, construind *axele, focarele şi directoarele corespunzătoare*, opt puncte şi tangentele în aceste puncte.

(Pentru această construcţie pot fi luate valori numerice pentru datele problemei).

Notă. 1. Va fi examinat în prealabil cazul particular $k = 1$.

2. Se dă o elipsă (E), raportată la axele ei, un diametru MM' al ei şi două direcţii fixe neparalele Δ, Δ' în planul ei. Dreptele duse prin M şi M', respectiv paralele cu Δ şi Δ', determină un punct P.

a) Să se găsească locul punctului P, când M se mişcă pe elipsa (E).

b) Să se arate că locul punctului P este o conică (P) având centrul în centrul conicei date.

c) Să se determine natura conicei (P).

d) Să se determine unghiul de care trebuie să fie rotite axele de coordonate, pentru ca să se suprapună axelor conicei (P).

e) Cazuri particulare.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societăţii Politecnice din România. An. LVI. Nr. 11—12. Noemb.—Dec. 1942. Din lucrările Societăţii Politecnice. Luare în considerare de noi membri. Şt. G. Bălan: Galileo Galilei. C. C. Teodorescu: Prăbuşirea acoperişului cinematografului „Capitol" din Timişoara. N. Iliescu-Brânceni: Din istoria construcţiilor navale.

Revista Matematică din Timişoara. An. XXIII. Nr. 2. Dr. E. H. STERN: Carrés magiques avec certains nombres donnés à des places choisies.

Revista Matematica Hispano-Americana. Tome III, 1943, Nr. 1. A. GODEAUX: Asupra suprafeţelor de ordinul al patrulea. A. FRAILE: Despre geometria analitică. N. C. DUTARI: Asupra unor ansambluri.

România Aeriană. „România Aeriană": TRAIAN VUIA. AND. POPOVICI: Zburătorii noştri în Războiul Sfânt. AL. VLĂDICESCU: Ofensiva constructorilor de avioane. CODIN TEOHARIE: Raporturile româno-germane în domeniul aviaţiei de transport. I. ŢINTEA: Avionul fără coadă. L. POPESCU: Două decenii de aviaţie fascistă. I. PROFIR: Comandantul nostru de escadrilă, bravul căpitan Dumitru Mihalache. N. PĂVELOIU: Depunerea gheţii pe avion. ŞTEFANIA IUPCEANU: Femeile cerului. „România Aeriană": † N. VLĂSCEANU.

I. LINTEŞ: La balistique du bombardement aérien. (Extras).

I. LINTEŞ: Precizia, uzura şi viaţa armelor de foc. (Extras).

I. LINTEŞ: Problema stabilităţii şi maniabilităţii şi problema acrobaţiilor.

CERERI

319. Care sunt numirile instrumentelor cu care se trasează linii drepte de diverşi meseriaşi?

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

LEO KÖNIGSBERGER. *Carl Gustav Jacob Jacobi.* (Rede). Lipsca 1904. Donată de I. IONESCU, Inginer.

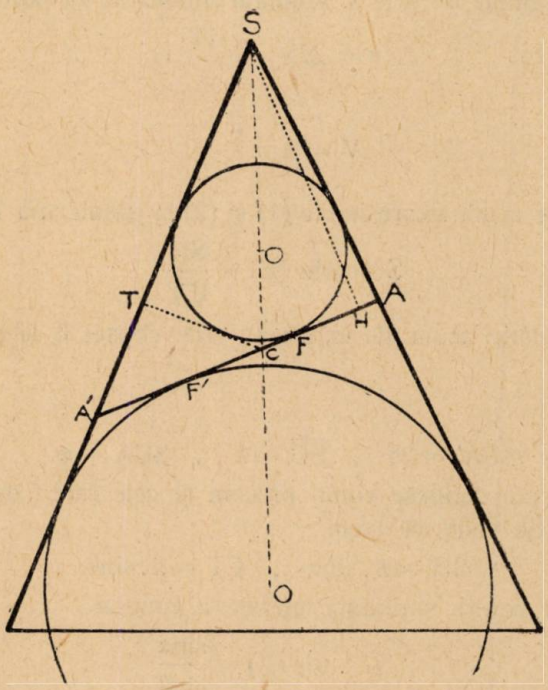
LEO KÖNIGSBERGER. *Carl Gustav Jacob Jacobi.* Festschrift. Lipsca 1904. Donată de I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3069. *Printr'un plan oarecare* P *se secţionează un con circular drept. Să se stabilească formule pentru exprimarea suprafeţelor celor două solide căpătate prin această secţionare.*

GRIGORE ZAPAN.

Să luăm ca plan al figurii un plan trecând prin axa SC al conului şi perpendicular pe planul secant P. Acest plan al figurii determină în con două generatoare SA şi SA' şi taie planul P după o dreaptă AA'.



După teorema lui DANDELIN, planul P determină în con o secţune conică care în cazul de faţă este de genul elipsă de axă mare AA'. Este vorba de aflat suprafaţa din con mărginită la această elipsă (E). Pentru aceasta voi întrebuinţa o metodă pe care o găsesc în *Exercices de Géométrie*, F. G. M., pag. 79.

Din vârful S al conului ducem pe planul P, perpendiculara SH. Volumul conului S cu baza elipsa (E) de secţiune va fi

$$(1) \qquad V = \text{arie}\,(E) \times \frac{SH}{3}.$$

Se mai poate evalua acest volum şi în felul următor:

Din punctul C de unde axul conului întâlneşte planul de secţiune P, să ducem perpendicularele CT pe generatoare. Aceste perpendiculare sunt egale între ele. Dacă descompunem acum suprafaţa (S) a conului în suprafeţe elementare s, în triunghiuri formate din două generatoare vecine ce sunt limitate la elipsa (E), atunci volumul conului limitat la elipsa (E) se poate considera ca limita sumei piramidelor triunghiulare cu vârful în c şi bazele acestor triunghiuri de arie s. Volumul conului se va exprima astfel:

$$v = \Sigma s \times \frac{CT}{3}$$

sau

$$(2) \qquad V = S \times \frac{CT}{3}$$

Egalăm acum expresiunile (1) şi (2) şi găsim aria laterală (S)

$$(3) \qquad S = \text{arie}\ (E) \times \frac{SH}{CT}.$$

Ne rămâne acum de exprimat aria elipsei E şi segmentele SE şi CT.

Fie

$$\widehat{ASA'} = 2\theta \quad , \quad \overline{SC} = h \quad , \quad \widehat{SCA} = \alpha$$

elementele care definesc conul precum şi cele care fixează poziţia planului P. Se vede că avem

$$SH = h \cdot \sin\alpha \quad , \quad CT = h \cdot \sin\theta$$

atunci avem pentru suprafaţa laterală a conului

$$(4) \qquad S = \text{arie}\,(E) \times \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}.$$

Să exprimăm acum suprafaţa elipsei E.

Din triunghiurile SCA, SCA' avem imediat:

$$AC = h \cdot \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha + \theta)} \quad , \quad A'C = h \cdot \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha - \theta)}.$$

Adunăm aceste relaţiuni şi avem axa mare a elipsei:

$$AA' = AC + A'C = \frac{2h \cdot \sin\alpha \cdot \cos\theta}{\sin(\alpha + \theta) \cdot \sin(\alpha - \theta)} \cdot \sin\theta.$$

Dacă considerăm acum cercul înscris şi exînscris unghiului S, punctele de tangenţă cu axa mare sunt F şi F' şi acestea sunt tocmai focarele elipsei. Segmentul FF', axa focală a elipsei are valoarea $FF' = SA' - SA$ (teorema lui DANDELIN).

Segmentele SA' şi SA se calculează din triunghiurile SCA şi SCA'. Avem:

$$SA = h\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \theta)} \quad , \quad SA' = h\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \theta)}.$$

Atunci vom avea

$$FF' = SA' - SA = \frac{2h \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha + \theta) \cdot \sin(\alpha - \theta)} \cdot \sin\theta.$$

Dacă notăm cu BB' axa mică a elipsei E, atunci avem

$$BB'^2 = AA'^2 - FF'^2 = \frac{4h^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^2\alpha\,(\cos^2\theta - \cos^2\alpha)}{\sin^2(\alpha + \theta) \cdot \sin^2(\alpha - \theta)}.$$

Dacă ţinem seama de identitatea

$$\cos^2\theta - \cos^3\alpha = \sin(\alpha + \theta) \cdot \sin(\alpha - \theta)$$

atunci avem

$$BB' = \frac{2h \cdot \sin\theta \cdot \sin\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \theta) \cdot \sin(\alpha - \theta)}}.$$

Suprafaţa elipsei E este deci

$$(E) = \pi \cdot \frac{AA'}{2} \cdot \frac{BB'}{2} = \pi \cdot h^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\theta \cdot \cos\theta}{\sqrt{\sin^3(\alpha + \theta) \cdot \sin^3(\alpha - \theta)}}.$$

Aria laterală a conului se va obţine purtând valoarea de mai sus în formula (4). Găsim rezultatul

$$S = \pi \cdot h^2 \cdot \frac{\sin^3\alpha \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{\sqrt{\sin^3(\alpha + \theta) \cdot \sin^3(\alpha - \theta)}}.$$

In sfârşit problema mai cere expresiunea suprafeţei solidului limitat la elipsa de secţiune E şi la baza conului circular. Dacă H

este înălţimea conului circular dat, atunci raza bazei şi generatoarea sunt respectiv

$$H \cdot \operatorname{tg}\theta \quad , \quad \frac{H}{\cos\theta},$$

iar suprafaţa laterală a conului este

$$S' = \pi \cdot H^2 \times \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

Diferenţa $S' - S$ exprimă acum suprafaţa laterală a solidului, cuprins între elipsa E şi baza conului circular, la care adăogând suprafaţa elipsei E şi a cercului de bază se găseşte suprafaţa totală a solidului din josul secţiunii.

Observare. Dacă notăm cu σ suprafaţa unui con circular de înălţime h, atunci suprafaţa conului cu baza secţiunea eliptică făcută printr'un plan P dus la distanţa h de vârf, este:

$$S = \sigma \cdot \frac{\sin^3\alpha \cdot \cos^3\theta}{\sqrt{\sin^3(\alpha+\theta) \cdot \sin^3(\alpha-\theta)}}.$$

I. St. Teodorescu
Profesor, Ploeşti.

Notă. Soluţia trebuie complectată şi pentru planurile care dau secţiuni parabolice sau hiperbolice.

G-l Gh. B.

PROBLEMA 3802. *Care sunt patratele* dmszu *în care* ms *şi* zu *sunt patrate.*

V. C. Popescu.

Dacă considerăm că 00 este patrat perfect de 2 cifre, atunci *ms* şi *zu* se găsesc printre următoarele numere, terminaţii de patrate perfecte:

$$00;\ 01;\ 04;\ 09;\ 16;\ 25;\ 36;\ 49;\ 64 \text{ sau } 81. \qquad (1)$$

In aceste condiţiuni, dacă N^2 este patratul căutat, avem:

$$10000 < N^2 = dmszu < 98181$$

$$\therefore\ 100 \leqslant N < 314. \qquad (2)$$

Luăm pe rând, pentru *zu*, pe fiecare din valorile şirului (1). Să considerăm de exemplu:

$zu = 04$. Cifra s fiind terminaţie de patrate perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Conform tabloului dela pag. 368, *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII, toate aceste valori sunt acceptabile.

Fie $s = 0$ atunci N^2 se termină în 004, iar N este de forma $500n \pm 2$, conform aceluiaşi tablou citat, deci

$$N = 500n \pm 2.$$

Dar între limitele (2) nu este niciun număr de această formă. La acelaşi rezultat se ajunge pentru $s = 1$, 5 şi 6. Pentru $s = 4$ găsim

$$N = 500n \pm 102$$

care pentru $n = 0$ dă

$$N = 102 \quad \therefore \quad N^2 = 102^2 = 10404$$

soluţie a problemei.

Procedăm la fel pentru toate valorile şirului (1), inclusiv 00 şi găsim următoarele 14 soluţii:

$100^2 = 10000$; $102^2 = 10404$; $108^2 = 11664$; $142^2 = 20164$;
$143^2 = 20449$; $147^2 = 21609$; $150^2 = 22500$; $158^2 = 24964$;
$191^2 = 36481$; $200^2 = 40000$; $201^2 = 40401$; $204^2 = 41616$;
$209^2 = 43681$; $245^2 = 60025$; $250^2 = 62500$; $294^2 = 86436$;
$300^2 = 90000$; $306^2 = 93636$.

Se observă că între aceste soluţii sunt unele în care *d*, *ms* şi *zu* sunt patrate perfecte.

S'au primit soluţii bune dela D-nii: N. ALDEA, I. ALIMAN, V. I. ALIMAN, G. A. APOSTOLESCU, I. APOSTOLESCU, A. BIDOIANU, GH. P. BOERESCU, I. C. BOIAN, D. V. BOLGAR, MIRCEA N. CONSTANTINESCU, M. D. CREŢU, VL. I. CRIVĂŢ, GH. M. DECULESCU, I. P. GHEORGHIU, A. D. GHIŢESCU, CR. M. GRECU, CPT. E. ST. IACOB, ENE G. MILEA, M. D. MOŢOC, D. ST. MISCHINEA, D. H. NICOLAU, GH. M. PĂUN, I. G. POPA, D. POPESCU, N. N. RADOVEANU, N. GR. RENTEA, C. N. RUSU, D. ŞERBAN-ULMENI, CR. I. ŞTEFĂNESCU, M. I. UNGUREANU, M. VELEA, T. VELICESCU, GH. N. VOICU, I. C. VOICU, N. O. ZAHARIA şi GH. O. ZAMFIRESCU.

Toţi aceşti rezolvitori au trimis soluţiile în anii 1929 şi 1930, adică înainte de apariţia tabloului din Vol. XXXVII, anul 1931/2, aşa că au întrebuinţat alte metode de încercări.

Folosim prilejul de a recomanda corespondenţilor să se ocupe şi cu problemele vechi, dintre care unele sunt destul de accesibile puterilor elevilor de liceu. Numerele problemelor ale căror soluţii încă n'au fost publicate se găsesc în tabla de materii a ultimului volum.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5341. *Un cerc* (C) *de rază* r *are centrul* C *pe bisectoarea unghiului drept* AOB. *O tangentă variabilă la cercul* (C) *taie pe* OA *şi* OB *în* D *şi* E.

Să se afle locul descris de mijlocul lui DE.

N. ABRAMESCU.

Să luăm ca axă Ox bisectoarea unghiului AOB oarecare, îndreptată, astfel ca OA şi OB să facă cu Ox unghiuri mai mici ca 90^0. Fie $C(a, 0)$, $a > 0$, centrul cercului şi $y = \pm mx$, $m > 0$, ecuaţiile dreptelor OA şi OB. Un punct (x_1, y_1) al cercului

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

are coordonatele $x_1 = a + r\cos\theta$, $y_1 = r\sin\theta$. Tangenta în (x_1, y_2) taie pe OA şi OB în punctele E şi F, şi coordonatele mijlocului lui DE sunt *)

$$(1) \quad x = \frac{r + a\cos\theta}{\cos^2\theta - m^2\sin^2\theta}\cos\theta\ ,\ y = -\,m^2\,\frac{r + a\cos\theta}{\cos^2\theta - m^2\sin^2\theta}\sin\theta.$$

De unde

$$x\cos\theta + y\sin\theta = r + a\cos\theta\ ,\ \frac{y}{x} = -\,m^2\,\mathrm{tg}\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{rm^2x}{m^2x^2 - y^2 - m^2ax}\ ,\quad \sin\theta = -\,\frac{ry}{m^2x^2 - y^2 - m^2ax}.$$

Inlocuind în $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, ecuaţia locului este

$$(2) \qquad r^2m^4x^2 + r^2y^2 = (m^2x^2 - y^2 - m^2ax)^2,$$

şi reprezintă o cuartică simetrică faţă de bisectoarea unghiului AOB.

Inlocuind pe $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, avem ecuaţia în coordonate polare (ρ, ω)

$$(3) \qquad \rho = \frac{m^2\,a\cos\omega \pm \sqrt{\sin^2\omega + m^4\cos^2\omega}}{m^2\cos^2\omega - \sin^2\omega}.$$

*) Pentru construcţia curbei (1) a se vedea şi exemplul 2 publicat la pag. 398 din acest număr, în corpul articolului D-lui N. ABRAMESCU.

Insemnând cu ρ_1, ρ_2 valorile lui ρ corespunzătoare semnelor $+$ şi $-$, se vede că $\rho_1(\pi - \omega) = -\rho_2(\omega)$, aşa că ρ_1 şi ρ_2 reprezintă aceeaşi curbă. E destul să luăm semnul $+$.

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{rm^2 + 2am^2\cos\theta + r(1+m^2)\cos^2\theta}{(\cos^2\theta - m^2\sin^2\theta)^2}\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -m^2\frac{am^2 + r(2+m^2)\cos\theta + a(1-m^2)\cos^2\theta - r(1+m^2)\cos^3\theta}{(\cos^2\theta - m^2\sin^2\theta)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m^2}{\sin\theta}\frac{am^2 + r(2+m^2)\cos\theta + a(1-m^2)\cos^2\theta - r(1+m^2)\cos^3\theta}{rm^2 + 2am^2\cos\theta + r(1+m^2)\cos^2\theta}.$$

E destul să luăm $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ şi apoi simetrica faţă de Ox.

Pentru *asimptote*, care corespund valorilor lui θ care anulează numitorii din (1), să punem

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{m}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Avem

$$\lim_{\theta \to \beta}\frac{y}{x} = -m, \quad \lim_{\theta \to \beta}(y + mx) = \lim m\frac{r + a\cos\theta}{\cos\theta + m\sin\theta}$$

$$\frac{r\sqrt{1+m^2} + am}{2}.$$

$$\lim_{\theta \to \pi - \beta}\frac{y}{x} = m, \quad \lim(y - mx) = \frac{r\sqrt{1+m^2} - am}{2}.$$

Asimptotele corespunzătoare sunt

$$y_1 = -mx + \frac{r\sqrt{1+m^2} + am}{2}, \quad y_2 = mx + \frac{r\sqrt{1+m^2} - am}{2}.$$

Pentru *construcţia curbei*, trebuie să vedem valorile care anulează pe $\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}$ şi semnele lor. Punând $\cos\theta = t$, şi anulând numărătorii lui $\frac{dx}{dy}$ şi $\frac{dy}{d\theta}$, obţinem

$$u_1(t) = \frac{a}{r}, \quad u_1(t) = t\frac{(1+m^2)t^2 + m^2}{2m^2t};$$

$$u_2(t) = \frac{a}{r}, \quad u_2(t) = t\frac{(1+m^2)t^2 - (2+m^2)}{(1-m^2)t^2 + m^2}.$$

Avem

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{m^2 - (1+m^2)\,t^2}{2m^2t^2},$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{[(1+m^2)\,t^2 - m^2]\,[(1-m^2)\,t^2 + 2 + m^2]}{[m^2 + (1-m^2)\,t^2]^2}.$$

Cum $|t| = |\cos\theta| \leqslant 1$, rădăcina $\frac{2+m^2}{-1+m^2}$ a lui $\frac{du_2}{dt}$ fiind mai mare ca 2, nu convine. Tabloul alăturat dă variaţia funcţiilor $u_1(t)$ şi $u_2(t)$.

t	-1		$-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$		0		$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$		1
$\frac{du_1}{dt}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{du_2}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
u_1	$1+\frac{1}{2m^2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	$\nearrow$	$\frac{\infty}{-\infty}$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	$\searrow$	$-\left(1+\frac{1}{2m^2}\right)$
u_2	1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	$\nearrow$	-1

Dar $\frac{dx}{d\theta}$ şi $\frac{dy}{d\theta}$ se anulează pentru valorile lui θ pentru care $u_1(t)$ şi $u_2(t)$ sunt egale cu $\frac{a}{r}$. Din figurile corespunzătoare curbelor $u = u_1(t)$, $u = u_2(t)$, se vede că o paralelă cu Ot la o depărtare u mai mică decât 1 taie curba u_2 într'un punct şi nu taie pe u_1, pentru $1 < u < \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$, paralela la Ot taie curba u_2 în două puncte şi pe u_1 nu o taie.

Dacă $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} < u < 1 + \frac{1}{2m^2}$, paralela la Ot nu mai taie pe u_2 şi taie curba $u_1(t)$ în două puncte. Pentru $u > 1 + \frac{1}{2m^2}$, paralela taie numai pe u_1 într'un punct.

Deci, dacă $\frac{a}{r} < 1$, $\frac{dx}{d\theta}$ n'are nicio rădăcină, iar $\frac{dy}{d\theta}$ are una rădăcină;

$1 < \frac{a}{r} < \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$, $\frac{dx}{d\theta}$ nicio rădăcină, $\frac{dy}{d\theta}$ două rădăcini;

$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} < \frac{a}{r} < 1 + \frac{1}{2m^2}$, $\frac{dx}{d\theta}$ are două rădăcini, $\frac{dy}{d\theta}$ nicio rădăcină.

Cum pentru $t = \cos\theta = -\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ avem $\theta = \pi - \beta$, rezultă că $\pi - \beta$ este cuprins între cele două rădăcini ale lui $\frac{dx}{d\theta}$ și $\frac{dy}{d\theta}$.

1. $\frac{a}{r} < 1$.

θ	0		β		$\frac{\pi}{2}$		$\pi - \alpha$		$\pi - \beta$		π
$\frac{dx}{d\theta}$		+		+		+		+		+	
x	$r+a$	↗	$\frac{+\infty}{-\infty}$	↗	0	↗	$x(\pi-\alpha)$	↗	$\frac{+\infty}{-\infty}$	↗	$-r+a$
$\frac{dy}{d\theta}$		−		−		−	0	+		+	
y	0	↘	$\frac{-\infty}{+\infty}$	↘	r	↘	$y(\pi-\alpha)$	↘	$\frac{+\infty}{-\infty}$	↗	0
$\frac{dy}{dx}$	∞										∞
Puncte	L		S_1, S_2		M		I		T_1, T_2		G

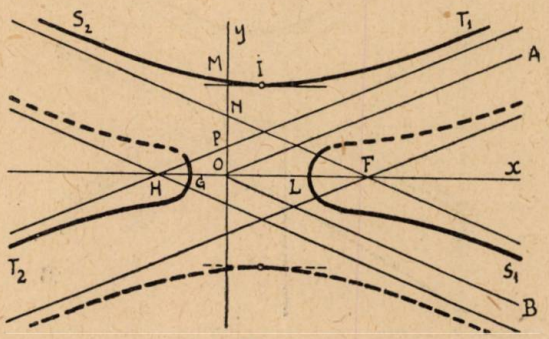


Fig. 1.

Obținem curba întreagă luând simetrica, trasă punctat, în raport cu Ox.

2. $1 < \frac{a}{r} < \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$.

θ	0	β	$\frac{\pi}{2}$	$\pi-\alpha$	$\pi-\beta$	$\pi-\gamma$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0		$+$				0
r	$r+a$ ↗	$\frac{+\infty}{-\infty}$ ↗	0 ↗	$x(\pi-\alpha)$ ↗	$\frac{+\infty}{-\infty}$ ↗	$x(\pi-\gamma)$	$a-r$
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$		0 $+$	$+$	0	$-$
y	0 ↘	$\frac{-\infty}{\infty}$ ↘	r ↘	$y(\pi-\alpha)$ ↗	$\frac{+\infty}{-\infty}$ ↗	$y(\pi-\gamma)$ ↘	0
$\frac{dy}{dx}$	∞			0		0	∞
Puncte	L	S_1, S_2	M	I	T_1, T_2	U	G

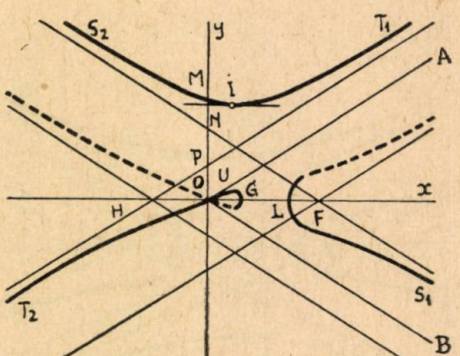


Fig. 2.

Tangentele în origine au coeficentul unghiular

$$\pm m^2 \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1}.$$

In cazul nostru $m^2 \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1} < m$, căci aceasta conduce la $\frac{a}{r} < \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$.

3. $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} < \frac{a}{r} < 1 + \frac{1}{2m^2}$.

θ	0	β	$\frac{\pi}{2}$	$\pi-\alpha$	$\pi-\beta$	$\pi-\gamma$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0 $+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$ 0	$+$
x	$r+a \nearrow \frac{+\infty}{-\infty}$	$\nearrow 0$	$\nearrow x(\pi-\alpha) \searrow \frac{-\infty}{\infty}$			$\searrow x(\pi-\gamma) \nearrow$	r
$\frac{dy}{d\theta}$			$-$		$-$		
y	$0 \searrow \frac{-\infty}{\infty}$	$\searrow r \searrow y(\pi-\alpha) \searrow \frac{-\infty}{\infty}$				$\searrow y(\pi-\gamma) \searrow$	0
$\frac{dy}{dx}$	∞			∞		∞	∞
Puncte	L	S_1, S_2	M	Q	T_1, T_2	S	G

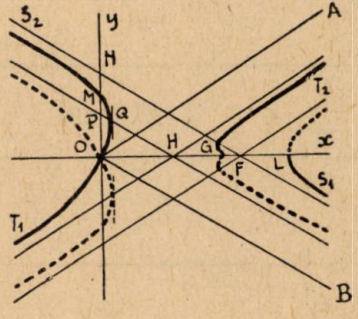


Fig. 3.

4. $\frac{a}{r} > 1 + \frac{1}{2m^2}$, avem curba din figura 5.

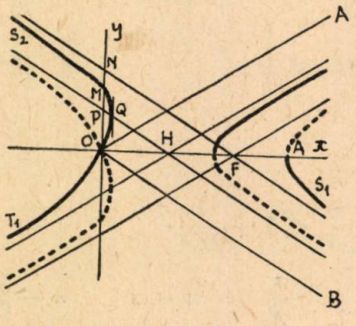


Fig. 4.

Să considerăm câteva cazuri particulare.

5. $a = r$.

θ	0	β	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - \alpha$	$\pi - \beta$	π
$\frac{dx}{d\theta}$			$+$			
x	$2r$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	0	$x(\pi-\alpha)$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	$-$	0	$+$	
y	$0 \searrow$	$\frac{-\infty}{\infty} \searrow$	$r \searrow$	$y(\pi-\alpha) \nearrow$	$\frac{+\infty}{-\infty} \nearrow$	0
$\frac{dy}{dx}$	∞		0			0
Puncte	L	S_1, S_2		M	T_1, T_2	0

6. $\frac{a}{r} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$. Ecuaţia locului se scrie

$$(y^2 - m^2x^2)\,(y^2 - m^2x^2 + 2mr\sqrt{1+m^2}\,x - r^2) = 0.$$

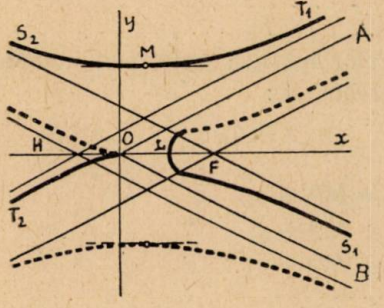


Fig. 5.

Locul este o iperbolă cu centrul în C şi asimptotele OA şi OB.

7, Când unghiul $AOB = \frac{\pi}{2}$, $OC = 2\pi$, avem $m = 1$, $a = 2r$ şi avem cazul 4, $\frac{a}{r} > 1 + \frac{1}{2m^2}$.

Soluţia a fost dată de D-l D. RIPIANU. D-sa a studiat sistematic poziţia curbei faţă de asimptote şi diferitele cazuri (în total de 53) de aşezare a punctelor unde curba taie axele de coordonate. D-l P. DRĂGHICESCU a luat ca axe Ox, Oy laturile unghiului drept AOB.

N. A.

PROBLEMA 5605. *Unui număr oarecare i se adună cifrele şi se obţine alt număr; acestuia i se adună asemenea cifrele şi se obţine alt număr, şi tot aşa mai departe până se obţine un număr de o singură cifră.*

Prin ce regulă s'ar putea obţine această cifră, cu minimum de calcule?

Regula s'ar putea extinde la numere scrise într'un sistem numeric cu o bază oarecare B?

COMANDOR I. LINTEŞ.

Fie N un număr oarecare de n cifre şi fie:

s_1 suma cifrelor lui N, adică un număr de n_1 cifre.

s_2 „ „ „ s_1, „ „ „ „ n_2 „

s_3 „ „ „ s_2, „ „ „ „ n_3 „

. . . . . .

. . . . . .

s_k suma cifrelor lui s_{k-1}, adică un număr de o singură cifră.

Atunci observăm că:

$$n > n_1 > n_2 > \ldots > 1.$$

Apoi:

$$N = M9 + s_1$$
$$s_1 = M9 + s_2$$
$$s_2 = M9 + s_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$s_{k-1} = M9 + s_k \quad \text{unde} \quad 0 \leqslant s_k \leqslant 9.$$

Prin urmare vom avea:

$$N = M9 + s_k.$$

Şi în acest caz regula este următoarea:

Luăm cifrele lui N *şi le grupăm astfel încât să obţinem fie 9 fie multipli de nouă şi le eliminăm, iar ultima grupă o împărţim cu 9 şi restul va reprezenta tocmai cifra căutată (adică cifra s_k).*

Exemplu numeric: N = 1943 1944. Eliminăm imediat pe cei doi 9, ne rămân cifrele: $\underbrace{1431}_{\text{I}}\,\underbrace{44}_{\text{II}}$, unde eliminăm prima grupă de patru cifre, adică: 1431 căci suma lor este 9 şi ne rămâne 44 care are suma 8, adică 8 va fi cifra căutată.

In cazul unui număr scris în sistemul de numeraţie cu baza B, atunci în locul lui 9 va fi introdus (B — 1) şi deci vom avea:

$$0 \leqslant s_k \leqslant B - 1.$$

Regula deci va fi aceeaşi, numai că în locul lui 9 intervine (B — 1).

Observaţii. 1. Domnii MIRCEA BÂRZESCU, V. CIUMAŞU, MARCEL COTARIU, D. GH. VASILIU şi RADU VOINEA au arătat că cifra este restul diviziunii lui N prin 9 sau prin (B — 1). Operaţiunea este însă mai grea, căci avem o împărţire în loc de adunare.

2. Celelalte soluţiuni primite aveau la bază numai încercări.

I. L.

PROBLEMA 5703. *Să se rezolve sistemul:*

$$x^2 = ay \quad , \quad y^2 = bz \quad , \quad z^2 = cx.$$

I. IONESCU.

I-a. *Soluție* dată de D-l MARCEL D. COTARIU (Brăila).

Sistemul se poate scrie:

$$cx = z^2 \quad , \quad b^2z^2 = y^4 \quad , \quad a^4y^4 = x^8$$

de unde se deduce

$$a^4b^2cxy^4z^2 = x^8y^4z^2$$

care dă

$$x^7 = a^4b^2c,$$

de unde

$$x = \sqrt[7]{a^4b^2c}.$$

In mod analog se găsește

$$y = \sqrt[7]{ab^4c^2} \text{ și } z = \sqrt[7]{a^2bc^4}.$$

II-a. *Soluție* dată pe D-nii: P. P. DRĂGHICESCU, DAN T. DUMITRESCU, OCTAV C. GHEORGHIU.

Inmulțind ecuațiile date se găsește $xyz = abc$ cu ajutorul căruia se găsește

$$x = \sqrt[7]{a^4b^2c} \ , \ y = \sqrt[7]{ab^4c^2} \ , \ z = \sqrt[7]{a^2bc^4}.$$

III-a. *Soluție* dată de D-l M. I. CONSTANTINESCU.

Din ecuațiile date scoatem

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = bz \text{ sau } \frac{x^4}{a^2} = bz,$$

de unde

$$z = \frac{x^4}{a^2b} \ ; \quad \left(\frac{x^4}{a^2b}\right)^2 = c \, . \, x \text{ sau } x^8 = a^4b^2cx$$

de unde

$$x = \sqrt[7]{a^3b^2c}.$$

In mod analog se găsește y și z.

Soluții analoage cu soluția III-a au dat D-nii: P. F. IONESCU, CONSTANTIN I. STAICU, TR. I. CHIȚULESCU (Student Arhitect), GH. GH. DONȚU, FL. STELIAN, E. N. WEGENER, P. DANIFELD, A. H. CUBAT, D. GH. VASILIU, D. NACHE, M. BÂRZESCU, PANDELE VASILESCU, P. C. DIACONESCU, N. ZARELI, C. C. TINCU.

D-nii CĂP. E. ȘT. IACOB, R. P. VOINEA și N. L. PITIȘ au rezolvat problema cu ajutorul teoriei lui MOIVRE.

Soluțiile nule au fost eliminate ca fiind evidente.

EXERCIŢII

21. Să se rezolve ecuaţia

$$a(x^6+1)+bx(x^4+1)+cx^2(x^2+1)=0.$$

CPT. E. ŞT. IACOB.

R. Ecuaţia este reciprocă; ea se mai scrie

$$a\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+b\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+c\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

care prin transformarea

$$x+\frac{1}{x}=y$$

devine

$$ay^3+by^2+(c-3a)y-2b-0$$

o ecuaţie de gradul al treilea complectă. Prin transformrea

$$y=z-\frac{b}{3a}$$

această ecuaţie se reduce la ecuaţia clasică de gradul III, fără termen de gradul II·

PROBLEME PROPUSE

5788. Valoarea unităţii de lungime de măsură în Moldova era stânjenul care era împărţit în 8 palme, palma în 8 palmace şi palmacul în 8 linii.

Un loc de 1250 stânjeni patraţi de formă dreptunghiulară, avea dimensiunile de 9×32. Care este lungimea totală a împrejmuirii lui în măsuri moldoveneşti?

Care ar fi valoarea actuală a terenului acela dacă azi s'ar vinde cu 12.000 lei hectarul?

Stânjenul moldovenesc are lungimea de 2,23 metri.

I. IONESCU.

5789. Să se determine numerele zecimale, supraunitare, ale căror parte zecimală este egală cu numărătorul uneia din fracţiile ordinare echivalente.

Exemplu: $97{,}65625 = \frac{65625}{672}$.

I. B. FLORESCU.

5790. Să se găsească numărul n astfel încât să avem:

$$P_{12}(35) = P_n(35) \cdot P_{12-n}(35) \cdot R,$$

unde $P_x(y)$ reprezintă produsul numerelor prime cu y din şirul natural al numerelor până la x, iar R un număr întreg.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5791. Să se demonstreze că determinantul

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 2ac^2 - 1 & bc^2 & b^2c^2 - 2a^2c^2 + 2a \\ bc^2 & 2ac^2 - 2 & abc^2 - 2b \\ b^2c^2 - 2a^2c^2 + 2a & abc^2 - 2b & 2a^3c^2 \end{vmatrix}$$

este *nul*, oricare ar fi a, b, c.

G-L GH. BUICLIU.

5792. Dându-se ecuaţia

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - a = 0,$$

să se determine a astfel ca să avem relaţia:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & a \\ x_1 & a & x_3 \\ a & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

şi să se rezolve. Generalizare.

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

5793. Să se demonstreze că dreapta lui GAUSS, a patrulaterului format de laturile unui triunghiu şi o dreaptă SIMSON a triunghiului, este perpendiculară pe această dreaptă SIMSON şi că în acelaşi timp este şi dreaptă SIMSON a triunghiului median al triunghiului iniţial.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

5794. Fie M un punct în planul unei elipse de centru O, cu un focar în F şi P intersecţia razei OM cu dreapta dusă prin F antiparalelă polarei lui M, în raport cu axa mare a elipsei. Să se arate, că, dacă M este arbitrar în plan, P descrie iperbola de axă transversă OF şi cu axa netransversă de lungime $\frac{bc}{a}$.

Să se studieze cazul, când plecăm dela celelalte conice.

N. N. MIHĂILEANU.

5795. Se consideră un triunghiu (T) înscris într'o conică (C) şi circumscrisă alteia (C'). Se ştie că vârfurile acestui triunghiu şi vârfurile triunghiului conjugat comun conicelor (C) şi (C') sunt şase puncte pe aceeaşi conică (γ).

Să se demonstreze că triunghiul ce are ca vârfuri punctele de contact ale laturilor triunghiului (T) cu conica (C') este conjugat, în raport cu conica (γ). ȘERBAN GHEORGHIU.

5796. O transversală variabilă taie laturile AB, AC ale unui triunghiu fix ABC în punctele D, E astfel ca $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \text{const.}$ Se cere locul proiecției unui punct fix P din plan pe transversala DE.

Caz particular, problema 1911. M. GHERMĂNESCU.

5797. Să se demonstreze: 1°. Cercurile osculatoare în A, B, C elipsei lui STEINER circumscrisă triunghiului ABC trec prin punctul lui STEINER.

2°. Razele celor trei cercuri osculatoare sunt date de

$$\frac{\rho_a}{a^3} = \frac{\rho_b}{b^3} = \frac{\rho_c}{c^3} = \frac{1}{4S}.$$

3°. Suprafața triunghiului format de centrele celor trei cercuri, este:

$$\Omega = \frac{3}{4} S (\operatorname{cotg}^2 \omega - 3),$$

unde ω e unghiul lui BROCARD.

4°. Lungimile normalelor în A, B, C la elipsa lui STEINER verifică relația:

$$\sum \frac{a}{n_a} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) = 0.$$

ION C. VASILIU.

5798. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 a + \sin^2 (a + x) + \sin^2 (a + 2x) + \sin^2 (a + 3x) = 2.$$

G. D. SIMIONESCU.

5799. Să se integreze sistemul

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \lambda u \ , \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \mu u \ , \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \nu u,$$

unde λ, μ, ν sunt constante, $u(x, y, z)$ fiind necunoscuta.

Să se studieze și integrarea sistemului

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda v + f(x, y) \ , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \mu \nu + g(x, y),$$

unde $v(x, y)$ e necunoscuta, λ și μ două constante, iar f și g două funcții date. Să se generalizeze. G. CĂLUGĂREANU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andreescu M. (5722, 32); *Andrei Gh. A.* (5754, 60); *Bârzescu M.* (5657, 775, 76); *Blaha N.* (A); *Cârstoiu Gh. N.* (5698, 760); *Ciumaşu Viorel* (5657); *Columbeanu D. P.* (5703, 60, 73, 75); *Constantinescu Gh. Vintilă* (5692); *Damian Şt.* (5698); *Donţu G. G.* (5580, 760); *Drăghicescu P. P.* (5157, 276, 339, 94, 546, 62, 70, 71, 87, 88, 618, 70, 708, 16, 39, 53, 60, 62, 63, 65, 67, 68, 71, 75, 78, 82, 86, E, N, P); *Gheorghiu C. Octav* (5760); *Gongu I. R.* (5575); *Huideş V. Al.* (5575); *Iacob Şt. E.* Căp. (4634, 5618, 38, 754); *Ieşan Şt. Al.* (5765); *Iliescu C. C.* (5598, 606, 70, 717, 60); *Ionescu F. Petre* (5760); *Jurist Gh. Vlad* (5530, 45, 67, 602, 11, 12, 18, 31, 32, 38, 49, 59, 74, 79, 92, 98, 703, 07, 54, 60, 62); *Mahrenholz I.* (5712, 60); *Moessner A.* (N); *Nache D.* (5775, 76); *Nicolae M. G.* (5606, 10, 49, 92, 94, 753, 65); *Pârvan D. Ion* (5760); *Popescu I. Ad.* (5760); *Roşu N.* (5580, 760); *Sancu M. Ion* (5760); *Stoenescu D. Mirel* (5535, 760); *Thébault V.* (N, P); *Tofan C. A.* (5775); *Turculeţ T.* (5659, 775); *Vasilescu-Stabu D. M.* (4560); *Vasiliu Gh. D.* (5618, 57, 92); *Volanschi A. D.* (5644, 49); *Vrânceanu Gh. Gh.* (5764); *Wegener N. E.* (5760).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 18.068

BIBLIOTECA CENTRALĂ SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1943

SUMARUL

1. † Profesorul Andrei Gh. Ioachimescu (urmare şi sfârşit) . . . . . *Alexandru Stoenescu.*
2. Sisteme de vectori cu rezultante generale paralele cu o dreaptă sau cu un plan . *D. V. Ionescu.*
3. Raport asupra premiului „V. Cristescu". *Comisiunea pentru premii.*
4. Premiul „Lt.-Col. G. A. Tănăsescu" . . *Delegaţia Societăţii.*
5. Note matematice: 46 — 49.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 320.
8. Diverse.
9. Chestiuni de examen.
10. Probleme rezolvate: 4034, 5254, 5399, 5476, 5566, 5605, 5631, 5644, 5692, 5722, 5761, 5762.
11. Exerciţii: 22.
12. Probleme propuse: 5800 — 5811.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 93, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **8**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

† PROFESORUL ANDREI GH. IOACHIMESCU
(1868—1943)

(Urmare dela pag. 395)

Moartea Profesorului A. GH. IOACHIMESCU a îndurerat adânc pe toţi cei ce l-au cunoscut, iar pentru *Societatea Gazeta Matematică*, a fost o lovitură grea.

Membrii *Gazetei Matematice*, din toate colţurile ţării au adus cu acest prilej memoriei lui A. GH. IOACHIMESCU omagiul plin de pietate al sufletului lor.

Redăm mai jos textul telegramelor primite de *Gazeta Matematică* dela profesorii *Universităţii* şi ai *Şcoalei Politehnice din Timişoara* cu ocazia morţii Prof. A. GH. IOACHIMESCU:

„*Profesorii de Matematici ai Universităţii din Cluj provizoriu la Timişoara, formaţi la şcoala minunată a Gazetei Matematice, al cărei fondator şi îndrumător venerat era* A. GH. IOACHIMESCU, *sunt foarte întristaţi de pierderea marelui patriot şi ilustrului profesor şi vă roagă să primiţi pentru Gazetă şi să transmiteţi familiei îndoliate expresiunea adâncei noastre îndurerări.* ABRAMESCU, ANGHELUŢĂ, CĂLUGĂREANU, D. V. IONESCU, C. IACOB, SERGESCU".

„*Profesorii Politehnicei din Timişoara, membri ai Gazetei deplâng pierderea marelui profesor şi a acelui fondator al Gazetei Matematice care a fost* ANDREI IOACHIMESCU *şi roagă a se transmite familiei sincere condoleanţe.* ALACI, GHERMĂNESCU, ŢINO".

* * *

Slujba înmormântării Profesorului A. GH. IOACHIMESCU s'a oficiat la Biserica *Sf. Nicolae* din strada *Buzeşti*, în prezenţa îndureratului său fiu, a rudelor îndoliate, a reprezentanţilor tuturor ramurilor de activitate din ţară, a membrilor Soc. *Gazeta Matematică* şi a unei delegaţii de elevi ai *Şcoalei Politehnice din Bucureşti.*

Pe catafalcul ridicat în mijlocul bisericii, înconjurat de coroane şi jerbe de flori, în lumina tremurătoare a făcliilor de ceară, trupul încremenit al celui ce a fost A. GH. IOACHIMESCU poartă pe piept o sfântă icoană ce-l va însoţi în călătoria cea fără de întoarcere.

Printre florile multe, câteva buchete de ghiocei aduse de o mână pioasă reamintesc sosirea primăverii.

In fum de tămâie şi smirnă, se citesc rugăciuni pentru cel plecat dintre noi.

Şi spre figura de ceară a lui A. GH. IOACHIMESCU, ochii înlăcrămaţi ai fiecăruia dintre cei prezenţi privesc şi îşi iau un ultim bun rămas.

La sfârşitul sfintei slujbe s'au rostit cuvântările pe care le redăm în ordinea lor cronologică.

Cuvântarea D-lui Profesor DIONISIE GHERMANI Decanul Facultăţii de Construcţii a *Politehnicei din Bucureşti:*

Intristată Adunare,

Mi-a revenit mie durerea de a rosti cuvântul de despărţire al Politehnicei din Bucureşti şi al colegilor dela această instituţie, pe care timp de 3 decenii ANDREI IOACHIMESCU *a ilustrat-o cu inteligenţa sa vie şi cultura lui aleasă, şi a slujit-o statornic cu devotament şi pasiune.*

Numele său va rămâne veşnic legat de desvoltarea vechei Şcoli naţionale de Poduri şi Şosele şi actuală Politehnică, unde învăţământul fundamental al Mecanicei, profesat de acest necontestat maestru, a format structura spiritului ingineresc a atâtor generaţii.

Expunerea sa clară şi insufleţită, raţionamentul strâns şi convingător, metoda lui excelentă şi o artă fără pereche de pedagog, alcătuiau fondul acestui învăţământ al Mecanicei raţionale, pe care ANDREI IOACHIMESCU, *distins inginer şi totodată emerit matematician îl împărtăşea elevilor, captivaţi de farmecul prelegerilor sale.*

Dela retragerea sa dela Şcoală, atunci când, după propria lui mărturisire, slăbirea sănătăţii începuse să-i micşoreze puterile necesare unei impecabiie slujiri a catedrei, vacanţa produsă aşteaptă încă un demn inlocuitor.

Dar înafară de calităţile didactice ale lui ANDREI IOACHIMESCU, *el ştia să câştige şi inimile studenţilor.*

Spiritul său obiectiv de dreptate şi dragostea tineretului studios, stăruie multă vreme şi dincolo de băncile şcoalei.

Elevii lui pentru care cursul său de Mecanică era o desfătare spirituală, apreciau deopotrivă și însușirile sufetești ale acestui dascăl de factură clasică.

La rândul lor și profesorii dela Politehnică stimau și prețuiau cu deosebire pe ANDREI IOACHIMESCU, *care nu numai că împrumuta Școalei prestigiul complexei sale personalități, dar era și bun coleg și un neprețuit prieten.*

Să-mi fie însă îngăduit să ating și celelalte laturi, ce mi-a fost dat să le cunosc, ale activității multiple a lui ANDREI IOACHIMESCU.

Inafară de Școală el a fost unul din cei mai de seamă colaboratori ai marelui patriot VINTILĂ BRĂTIANU, *în acțiunea susținută pe care acesta o ducea pentru stimularea iniațiativei românești, în toate domeniile tehnice, industriale, economice și sociale și pentru naționalizarea marilor întreprinderi, care aproape exclusiv erau în mâna străinilor.*

Experiența lui și rarele lui calități de organizator și administrator, verificate atât în Comitetul de Direcție al Școalei cât și la Direcția Regiei Monopolurilor, au fost larg folosite în acea epocă de creație. N'a fost întreprindere românească ca Soc. de locuințe ieftine, Soc. Govora Călimănești, Cartea Românească, Edilitatea, în care ANDREI IOACHIMESCU *să nu fi fost unul din principalii fondatori sau însuflețitori, și căreia să nu-i fi imprimat pecetea spiritului său ager și impulsul neobositei sale hărnicii.*

De aceea când se va scrie cândva istoria acelei epoce de renaștere a spiritului românesc de întreprindere, în care munca și priceperea inginerului s'a arătat fecundă, meritul de inițiator și promotor al acestei mișcări va cinsti și numele lui ANDREI IOACHIMESCU, *alături de aureola lui de Profesor.*

Dar viața sa deosebit de activă și rodnică, care într'o continuă frământare s'a scurs între catedră și posturile lui de comandă, a trebuit să fie în ultimul timp confinată în odaia lui de suferință, care n'a încetat de a fi și odaia lui de lucru.

Căci nici în zilele sale de lungă suferință ANDREI IOACHIMESCU *n'a încetat de a-și desăvârși opera didactică, publicând cursul său drept încoronare a carierei de profesor, și n'a încetat de a purta grijă dragilor sale instituții, în care stăruie și acum o fărâmă din sufletul și din truda lui de realizator.*

Iată de ce atât Politehnica cât şi toate aceste întreprinderi româneşti îi vor păstra neştearsă recunoştinţa şi amintirea, iar noi care l-am cunoscut de aproape l-am preţuit şi l-am iubit, cu inimă îndurerată ne despărţim de ceea ce a fost fiinţa lui trupească.

Fie-i ţărâna uşoară!

Cuvântarea D-lui Profesor I. SIMIONESCU, *Preşedintele Academiei Române:*

Intristată asistenţă,

Moartea este firescul sfârşit al vieţii, lege neînfrântă a naturii care nu poate fi ocolită. Nu durerea pentru cel dispărut să ne învăluie prea adânc, cât să ne rămâie drept mângâiere şi îndemn faptele lui din viaţă. Prin ele se păstrează vie amintirea celui dus dintre noi; continuă a trăi printre noi servindu-ne adesea drept călăuză. Mort cu adevărat nu e decât acela care n'a înţeles rostul vieţii irosind-o fără a lăsa semne de trecerea lui pe pământul ţării.

IOACHIMESCU *n'a făcut parte dintre aceştia. De aceea numele lui va dăinui prin tot ce a săvârşit în viaţă.*

Ori unde a fost chemat să-şi îndeplinească o datorie, a muncit, condus de un atât de înalt îndemn etic, încât l-a făcut să fie cinstit de ori cine l-a cunoscut mai în deaproape.

Numeroşii săi elevi dela Şcoala de poduri nu se poate să fi rămas neinfluenţaţi de spiritul ordinei şi al disciplinei sufleteşti prin care le impunea profesorul lor de mecanică; neîntârziat cu o minută dela lecţii, le făcea atractive prin simplitate şi limpedea expunere a problemelor celor mai aride.

Celor care colaborau cu el la operele sociale şi economice le impunea spiritul de dreptate ce-l călăuzea, înţelegerea nevoilor celor oropsiţi, ca şi munca neprecupeţită ce o punea în serviciul îndatoririlor sale.

Om drept, bun, dar mai presus iubitor de ţară, nu s'ar fi abătut dela drumul cinstei şi al muncii orice s'ar fi întâmplat. Pe lângă toate era o minte ageră, clară, care ştia uşor să prindă liniile principale de conducere, în cele mai încurcate probleme.

Acestor însuşiri rar întâlnite la acelaşi om, Cartea Românească, în numele căreia am dureroasa însărcinare a rosti aceste cuvinte de rămas bun, datoreşte solida-i întemeinicire şi progresu-i sănătos în scurtă vreme nici de 25 ani de viaţă. Cu blândeţă dar cu hotărîtă judecată, cu pricepere şi fin discernământ, activ dela întemeierea ei, IOACHIMESCU *a ştiut să o îndrume cu încredere şi preciziune.*

Prin darul său înnăscut de organizare şi prevedere ca un cârmaci abil a ocolit piedecile ivite. Ii vom rămânea recunoscători de tot ce a săvârşit cu râvnă, pricepere şi mai ales tragere de inimă pentru a consolida şi desvolta Societatea industrială şi în deosebi culturală, Cartea Românească.

In viaţa ei numele şi munca desfăşurată de IOACHIMESCU *vor rămâne drept îndemn şi far pentru toţi cei care o vor conduce în toate vremurile.*

Cât de alese sentimente îl lega de opera-i de înfăptuire se poate deduce şi din gestul săvârşit în ultimii ani, contribuind din ceea ce i se cuvenea pentru munca lui cu peste jumătate de milion de lei la înstărirea Aşezământului înfiinţat de Societate, sub îndemnul său, pentru ajutorarea numerosului personal de toate categoriile care îi vor păstra o veşnică recunoştinţă.

Suferinţele grele îndurate în ultimii ani de viaţă s'au încheiat. Le-a suportat cu resemnare, fără ca ele să-l împiedece până la ultima clipă să continue a fi activ, fie măcar prin sfatul său întotdeauna înţelept, şi chibzuit. Suferinţa nu i-a întunecat mulţumirea de a fi fost folositor neamului din care făcea parte şi la care ţinea cu toată dragostea şi devotamentul unui muncitor harnic şi bun român.

Cuvântarea D-lui Profesor N. VASILESCU-KARPEN fostul *Rector al Politehnicei din Bucureşti.*

In calitate de contemporan şi fost coleg al lui ANDREI IOACHIMESCU, *îmi revine dureroasa sarcină de a exprima, în numele Consiliului Soc. Politehnice, adâncul regret resimţit de întregul Consiliu în urma pierderei unuia dintre cei mai preţuiţi şi iubiţi membri ai săi.*

ANDREI IOACHIMESCU *a fost Vice-Preşedinte al Soc. Polit.; făcea parte din această Societate încă din 1894, iar în ultimii 42 de ani a fost neîntrerupt membru în Consiliu.*

ANDREI IOACHIMESCU *întrunea, cum foarte rar se întâmplă, calităţile omului de ştiinţă exactă cu un real simţ al realităţilor, la care se adăoga alesele însuşiri sufleteşti ale omului integru în toată puterea cuvântului.*

Şi în Consiliul Soc. Polit., ca şi în alte Consilii de Administraţie din care făcea parte, ca şi în Consiliul Şcoalei Polit., ANDREI IOACHIMESCU *îşi înfăţişa părerile cu modestie şi măsură, cu o vădită sinceritate, nelipsite de o desăvârşită bună cuviinţă. De aceea sfaturile sale înţelepte erau mai totdeauna urmate, iar lipsa lui* ANDREI IOACHIMESCU *va fi adânc simţită în toate cercurile în care şi-a desfăşurat o devotată şi folositoare activitate.*

Cuvântarea D-lui ŞTEFAN MIHĂESCU, Preşedintele Asociaţiei Generale a Inginerilor din România şi Preşedinte al Casei Autonome a Monopolurilor Statului:

Intristată Asistenţă!

In numele Asociaţiei Generale a Inginerilor din România aduc ultimul salut colegial, aceluia, care a ridicat pe înalte culmi numele de inginer; iar ca preşedinte ai Casei Autonome a Monopolurilor, aduc ultimul salut, din partea zecilor de mii de funcţionari şi muncitori, care au avut în ANDREI IOACHIMESCU *un şef respectat, dar şi mult iubit.*

ANDREI IOACHIMESCU *a avut o activitate excepţional de bogată şi complexă. A fost un matematician strălucit, dar şi un popularizator al matemàticilor şi ştiinţelor; a fost profesor admirat şi adorat de studenţi, la Universitate şi la Politehnică; a fost şef de mari întreprinderi industriale, în frunte cu R. M. S.; a fost pionier pe teren social, fiind primul Director al primei Societăţi de locuinţe populare din România.*

Alţi prieteni au vorbit şi vor mai vorbi despre IOACHIMESCU: *profesorul, matematicianul, constructorul de locuinţe pentru populaţia sărmană, răspânditorul de cultură în masele largi ale şcolarilor şi poporului românesc.*

Să-mi îngăduiţi, să arăt, pe scurt, ce a fost ANDREI IOACHIMESCU *pentru R. M. S. şi pentru Corpul Inginerilor.*

El şi-a început cariera de inginer în 1892 la R. M. S., unde a lucrat cu talent, cu râvnă, cu cinste, cu dragoste de

personal, până ce a ajuns la cea mai înaltă demnitate a Regiei: Președinte al Consiliului de Administrație.

Ca subdirector și apoi director la cea mai importantă manufactură a noastră, Manufactura Belvedere, în care lucrează aproape 3.000 de suflete, el a adus serioase perfecționări instalațiilor și metodelor de lucru, precum și un mare avânt operei sociale și de asistență a lucrătorilor și funcționarilor. A încununat această operă prin construirea a unor frumoase și sănătoase cartiere de locuințe, pentru funcționari și muncitori.

Pentru corpul Inginerilor, IOACHIMESCU *va rămâne o mândrie și o pildă, pe care ne vom sili s'o urmăm cu vrednicie.*

El nu s'a mulțumit să înalțe profesiunea și numele de inginer, numai prin exemplul nobil de muncă, desinteresare și inteligentă competență, dar el s'a preocupat de progresul profesiunii noastre, activând intens și devotat în organizațiunile noastre profesionale.

In toată variata, complexa și bogata sa activitate, IOACHIMESCU *aducea pe lângă prestigiu, și competență, o afabilitate și o delicatețe, care-l făceau respectat nu cu teamă, ci cu admirație și iubire.*

ANDREI IOACHIMESCU *împrăștia în juru-i avânt la lucru, bună dispoziție și devotament.*

Corpul Inginerilor și personalul Regiei Monopolurilor, îți vor păstra, scumpe și iubite coleg, șef și maestru, neștearsă amintire.

Dormi în pace!

Cuvântarea citită în numele *Casei Centrale a Cooperațiilor:*

Cu inginerul ANDREI IOACHIMESCU *țara pierde nu numai pe un valoros om de știință care a ilustrat timp îndelungat învățământul nostru superior, nu numai pe diriguitorul iscusit al atâtor întreprinderi românești de ordin cultural, social și economic. Ea pierde și pe unul din vrednicii Conducători ai mișcării noastre cooperative din epoca ce a urmat războiului nostru de întregire. Grație însușirilor sale complexe, inimii sale generoase și puterii de muncă unice,* IOACHIMESCU *a luat parte peste 10 ani la îndrumarea acestei mișcări. Când la începutul anului 1919, regretatul* I. G. DUCA *a transformat structura Casei Centrale a Cooperației pentru a da putința mișcării cooperative*

să treacă mai adânc dela operaţiunile simple de bancă şi dela cele de exploatări agricole, la activităţi mai desvoltate industriale şi comerciale prin înfiinţarea Centralei Cooperativelor, datorită temeinicei sale pregătiri tehnice, Profesorul IOACHIMESCU *al fost găsit ca foarte indicat ca să fie numit de Ministerul Industriei şi Comerţului în Consiliul de Administraţie al nouei Centrale. In acest Consiliu, în mod neîntrerupt, timp de peste 10 ani, el a pus cu o inegalabilă râvnă. in serviciul Cooperaţiei, toate resursele marei sale competinţe tehnice şi financiare.*

Cooperativele de exploatare forestieră şi fabricaţie a cherestelei, Cooperativele miniere cele de industrializarea fructelor, de exploatare a bălţilor şi comercializarea peştelui, Cooperativele de meseriaşi ca şi cele de librărie şi tipografie, s'au folosit în deosebi de îndrumările pe care Profesorul IOACHIMESCU *era gata să le pună în serviciul ţării sale. Convins de rolul eminent pe care cooperaţia trebuie să-l aibă în sănătoasa desvoltare a vieţii statului nostru,* ANDREI IOACHIMESCU *a înţeles de minune care era partea de sarcină ce-i revenea în acea epocă frământată a mişcării noastre Cooperative. Războiu purtat vitejeşte de fiii ţării ne aducea îndeplinirea năzuinţelor noastre milenare. Dar el punea probleme noi sociale pe care numai simpla împroprietărire nu le rezolva. Şi chiar împroprietărirea venea în sprijinul numai al populaţiunii de câmp. Trebuia organizată şi pusă în valoare munca celor dela câmp şi celor dela deal şi munte, celor dela sate şi celor dela oraşe. Cu aceste gânduri venea adânc regretatul nostru colaborator, la conducerea mişcării noastre Cooperative şi de ele a fost purtat în tot timpul rodnicei sale activităţi la această conducere.*

Pentru binele făcut, Cooperaţia îi va purta o inalterabilă recunoştinţă.

Cuvântarea D-lui Profesor AL. PANTAZI din partea Societăţii *Gazeta Matematică:*

In rândurile celor ce-au venit să-şi arate doliul lor pentru acel care a fost profesorul ANDREI IOACHIMESCU *— Gazeta Matematică — se aşază ca un tovarăş credincios — de care, timp de 48 ani neîntrerupţi, el nu s'a despărţit niciodată.*

Fondator al ei — stâlp cum i s'a spus întotdeauna, — Profesorul ANDREI IOACHIMESCU *a dăruit învăţământului mate-*

maticilor elementare — căruia s'a destinat « Gazeta Matematică » — neobosita lui activitate, cu adevărată dragoste părintească.

Culegerile de probleme de Algebră, Teoria ecuaţiilor şi Mecanică ; sunt printre alte creaţii ale rodnicei sale productivităţi în aceste directive, monumente care-i vor păstra nemuritoare amintire.

In numele generaţiilor de matematicieni cari din tinereţe i-au urmat învăţătura, precum şi a celor care vor mai avea încă să înveţe dela el, — « Gazeta Matematică », se înclină cu durere în faţa rămăşiţelor pământeşti ale profesorului ANDREI IOACHIMESCU, *cu pioasa rugăminte: să le fie ţărâna uşoară!*

La sfârşitul cuvântărilor, cu inimile strânse cei prezenţi asistă la înfiorătoarea operaţie a plumbuirii sicriului.

Apoi, cu ochii în lacrimi, se aduce celui ce a fost A. GH. IOACHIMESCU ultimul salut, în timp ce corpul său este urcat în dricul-automobil şi transportat spre a fi înhumat în cimitirul *Viişoara* din *Ploeşti.*

Inchei acest necrolog cu exprimarea credinţei că *moartea omului mare ca şi moartea eroului sunt numai aparenţe, suflul lor de geniu sau de sacrificiu continuând să dăinuiască în veacuri şi să călăuzească paşii şovăitori ai celor care vor să-i urmeze.*

ALEXANDRU STOENESCU.

SISTEME DE VECTORI CU REZULTANTE GENERALE PARALELE CU O DREAPTĂ SAU CU UN PLAN

1. D-ra GABRIELA ŢIŢEICA [1]) a dat următorul rezultat interesant:

Dacă pe laturile $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ale unui triunghiu ABC se consideră două sisteme de vectori S şi S', având ca direcţii laturile BC, CA, AB ale triunghiului şi ca mărimi măsurate în

1) GABRIELA ŢIŢEICA, Problema Nr. 5725. *Gazeta Matematică* 1942, vol. 48, pag. 144.

sensul acestor laturi V_a, V_b, V_c şi V'_a, V'_b, V'_c, condiţia ca rezultantele generale ale acestor sisteme să fie paralele este ca

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ V_a & V_b & V_c \\ V'_a & V'_b & V'_c \end{vmatrix} = 0.$$

Iată o demonstraţie a acestui rezultat, care ne va conduce la câteva extensiuni [1]).

In planul ABC, să luăm axele Ox, Oy paralele cu laturile $\vec{BC}$ şi $\vec{CA}$ ale triunghiului. Formăm linia poligonală OMNP relativă la sistemul de vectori S, astfel ca vectorul $\vec{OM}$ să fie echipolent cu vectorul $\vec{V_a}$, apoi $\vec{MN}$ să fie echipolent cu $\vec{V_b}$ şi în fine $\vec{NP}$ echipolent cu $\vec{V_c}$. Formăm de asemenea linia poligonală OM'N'P' relativă la sistemul de vectori S'. Rezultantele generale ale celor două sisteme de vectori sunt $\vec{OP}$ şi $\vec{OP'}$. Condiţia ca aceste două rezultante să fie paralele, este ca punctele O, P şi P' să fie colineare.

Să notăm cu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vectori unitari plasaţi pe axele $\vec{BC}$, $\vec{CA}$, $\vec{AB}$. Din relaţia

$$a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = 0,$$

deducem că

$$\vec{k} = -\frac{a}{c}\vec{i} - \frac{b}{c}\vec{j}.$$

Avem

$$\vec{OP} = V_a\vec{i} + V_b\vec{j} + V_c\vec{k}$$

$$\vec{OP'} = V'_a\vec{i} + V'_b\vec{j} + V'_c\vec{k},$$

sau:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \vec{OP} &= \left(V_a - \frac{a}{c}V_c\right)\vec{i} + \left(V_b - \frac{b}{c}V_c\right)\vec{j} \\ \vec{OP'} &= \left(V'_a - \frac{a}{c}V'_c\right)\vec{i} + \left(V'_b - \frac{b}{c}V'_c\right)\vec{j}. \end{aligned}$$

1) A se vedea şi articolul D-lui V. VÂLCOVICI dela pag. 401, Nr. precedent.

Coeficienții lui $\vec{i}$ și $\vec{j}$ din aceste formule, sunt componentele vectorilor $\vec{OP}$ și $\vec{OP'}$ pe axele Ox și Oy. Condiția ca punctele O, P, P′ să fie coliniare este ca

$$\begin{vmatrix} V_a - \frac{a}{c} V_c & V_b - \frac{b}{c} V_c \\ V'_a - \frac{a}{c} V'_c & V'_b - \frac{b}{c} V'_c \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ cV_a - aV_c & cV_b - bV_c & V_c \\ cV'_a - aV'_c & cV'_b - bV'_c & V'_c \end{vmatrix} = 0.$$

Inmulțind elementele coloanei a treia cu a, apoi cu b și adunând la elementele coloanei 1-a și la a 2-a, se obține

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ V_a & V_b & V_c \\ V'_a & V'_b & V'_c \end{vmatrix} = 0$$

adică condiția (1).

2. Să observăm că punctul O este extremitatea liniei poligonalei analoage cu OMNP, și care este construită pentru sistemul de vectori $\vec{BC}$, $\vec{CA}$, $\vec{AB}$.

Problema D-rei ȚIȚEICA revine la a cerceta când extremitățile liniilor poligonale relative la sistemele de vectori S, S′ și $\vec{BC}$, $\vec{CA}$, $\vec{AB}$ sunt coliniare.

Ca o extensiune a problemei D-rei ȚIȚEICA, putem considera pe laturile triunghiului ABC, trei sisteme de vectori S, S′, S″ așa cum s'a explicat la Nr. 1, și să căutăm condiția ca extremitățile liniilor poligonale OMNP, OM′N′P′, OM″N″P″ relative la aceste sisteme, *punctele* P, P′, P″ *să fie coliniare.*

Procedând ca la Nr. 1, avem

$$\vec{OP} = \left(V_a - \frac{a}{c} V_c\right)\vec{i} + \left(V_b - \frac{b}{c} V_c\right)\vec{j}$$

$$\vec{OP'} = \left(V'_a - \frac{a}{c} V'_c\right)\vec{i} + \left(V'_b - \frac{b}{c} V'_c\right)\vec{j}$$

$$\vec{OP''} = \left(V''_a - \frac{a}{c} V''_c\right)\vec{i} + \left(V''_b - \frac{b}{c} V''_c\right)\vec{j}.$$

Condiţia ca punctele P, P′, P″ să fie colineare este ca

$$\begin{vmatrix} V_a - \frac{a}{c}V_c & V_b - \frac{b}{c}V_c & 1 \\ V'_a - \frac{a}{c}V'_c & V'_b - \frac{b}{c}V'_c & 1 \\ V''_a - \frac{a}{c}V''_c & V''_b - \frac{b}{c}V''_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ cV_a - aV_c & cV_b - bV_c & V_c & 1 \\ cV'_a - aV'_c & cV'_b - bV'_c & V'_c & 1 \\ cV''_a - aV''_c & cV''_b - bV''_c & V''_c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Inmulţind elementele coloanei a treia cu a, apoi cu b şi adunând la elementele coloanei a 1-a şi la a 2-a, se obţine

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ V_a & V_b & V_c & 1 \\ V'_a & V'_b & V'_c & 1 \\ V''_a & V''_b & V''_c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aceasta este condiţia ca extremităţile liniilor poligonale OMNP, OM′N′P′, OM″N″P″ relative la cele trei sisteme de vectori S, S′ şi S″ să fie colineare.

Condiţia (3) cuprinde condiţia (2), căci dacă se ia $V''_a = a$, $V''_b = b$, $V''_c = c$, determinantul (3) se reduce la determinantul (2).

3. Problema D-rei ŢIŢEICA se generalizează în spaţiu. Să considerăm un patrulater *strâmb* ale cărui laturi AB, BC, CD, DA au lungimile a, b, c, d şi un sistem de vectori S, format din 4 vectori având ca direcţii laturile $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ ale patrulaterului şi ca mărimi măsurate în sensul acestor laturi V_a, V_b, V_c, V_d. Fie S′ şi S″ alte două sisteme de vectori, analoage sistemului S şi V'_a, V'_b, V'_c, V'_d ; V''_a, V''_b, V''_c, V''_d mărimile analoage cu V_a, V_b, V_c, V_d.

Să demonstrăm că condiția ca rezultantele generale ale acestor trei sisteme de vectori să fie paralele cu un plan, este ca

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ V_a & V_b & V_c & V_d \\ V'_a & V'_b & V'_c & V'_d \\ V''_a & V''_b & V''_c & V''_d \end{vmatrix} = 0.$$

Intr'adevăr printr'un punct O, să ducem axele Ox, Oy, Oz, paralele cu vectorii $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$. Aceste axe formează un triedru deoarece patrulaterul ABCD este strâmb. Să formăm linia poligonală OMNPQ, astfel ca $\vec{OM} = \vec{V}_a$, $\vec{MN} = \vec{V}_b$, $\vec{NP} = \vec{V}_c$, $\vec{PQ} = \vec{V}_d$. Formăm de asemenea liniile poligonale OM'N'P'Q', OM''N''P''Q'' analoage liniei poligonale OMNPQ.

Condiția ca rezultantele generale ale sistemelor S, S', S'' să fie paralele cu un plan, este ca punctele O, Q, Q', Q'' să fie în același plan.

Pe laturile $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$ ale patrulaterului strâmb ABCD, să luăm vectorii unitari $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{l}$. Din relația

$$a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} + d\vec{l} = 0,$$

rezultă că

$$\vec{l} = -\frac{a}{d}\vec{i} - \frac{b}{d}\vec{j} - \frac{c}{d}\vec{k}.$$

Avem

$$\vec{OQ} = V_a\vec{i} + V_b\vec{j} + V_c\vec{k} + V_d\vec{l}$$

$$\vec{OQ'} = V'_a\vec{i} + \ldots.$$

$$\vec{OQ''} = V''_a\vec{i} + \ldots.$$

sau

$$\vec{OQ} = \left(V_a - \frac{a}{d}V_d\right)\vec{i} + \left(V_b - \frac{b}{d}V_d\right)\vec{j} + \left(V_c - \frac{c}{d}V_d\right)\vec{k}$$

$$\vec{OQ'} = \left(V'_a - \frac{a}{d}V'_d\right)\vec{i} + \ldots.$$

$$\vec{OQ''} = \left(V''_a - \frac{a}{d}V''_d\right)\vec{i} + \ldots.$$

Coeficienţii lui $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ din aceste formule sunt componentele vectorilor $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OQ'}$, $\overrightarrow{OQ''}$ pe axele Ox, Oy, Oz. Condiţia ca punctele O, Q, Q', Q'' să fie în acelaşi plan este

$$\begin{vmatrix} V_a - \frac{a}{d} V_d & V_b - \frac{b}{d} V_d & V_c - \frac{c}{d} V_d \\ V'_a - \frac{a}{d} V'_d & V_b - \frac{b}{d} V'_d & V'_c - \frac{c}{d} V'_d \\ V''_a - \frac{a}{d} V''_d & V_b - \frac{b}{d} V''_d & V''_c - \frac{c}{d} V''_d \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ dV_a - aV_d & dV_b - bV_d & dV_c - cV_d & V_d \\ dV'_a - aV'_d & dV'_b - bV'_d & dV'_c - cV'_d & V'_d \\ dV''_a - aV''_d & dV''_b - bV''_d & dV''_c - cV''_d & V''_d \end{vmatrix} = 0.$$

Inmulţind elementele ultimei coloane cu a, b, c şi adunând apoi la elementele coloanei 1-a, a 2-a, a 3-a, vom obţine

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ V_a & V_b & V_c & V_d \\ V'_a & V'_b & V'_c & V'_d \\ V''_a & V''_b & V''_c & V''_d \end{vmatrix} = 0.$$

adică tocmai formula (4).

Aceasta este condiţia ca rezultantele generale ale sistemelor de vectori S, S', S'' să fie paralele cu un plan.

4. Să observăm că O este extremitatea liniei poligonale care se construieşte pentru a afla rezultanta sistemului de vectori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

Problema precedentă revine la a cerceta când extremităţile liniilor poligonale construite pentru a avea rezultantele generale ale sistemelor de vectori S, S', S'' şi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ sunt colineare.

Putem considera patru sisteme de vectori S, S′, S″, S‴ analoage cu cele definite la Nr. 3 şi liniile poligonale OMNPQ, OM′N′P′Q′, OM″N″P″Q″, OM‴N‴P‴Q‴ construite pentru a determina rezultantele generale ale acestor sisteme. Să căutăm condiţia ca extremităţile acestor linii poligonale Q, Q′, Q″ Q‴ să fie în acelaşi plan.

Procedând ca la Nr. 3, avem

$$\overrightarrow{OQ} = \left(V_a - \frac{a}{d}V_d\right)\vec{i} + \left(V_b - \frac{b}{d}V_d\right)\vec{j} + \left(V_c - \frac{c}{d}V_d\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \left(V'_a - \frac{a}{d}V'_d\right)\vec{i} + \ldots.$$

$$\overrightarrow{OQ''} = \left(V''_a - \frac{a}{d}V''_d\right)\vec{i} + \ldots.$$

$$\overrightarrow{OQ'''} = \left(V'''_a - \frac{a}{d}V''_d\right)\vec{i} + \ldots.$$

Condiţia ca punctele Q, Q′, Q″, Q‴ să fie în acelaşi plan este

$$\begin{vmatrix} V_a - \frac{a}{d}V_d & V_b - \frac{b}{d}V_d & V_c - \frac{c}{d}V_d & 1 \\ V'_a - \frac{a}{d}V'_d & V'_b - \frac{b}{d}V'_d & V'_c - \frac{c}{d}V'_d & 1 \\ V''_a - \frac{a}{d}V''_d & V''_b - \frac{b}{d}V''_d & V''_c - \frac{c}{d}V''_d & 1 \\ V'''_a - \frac{a}{d}V'''_d & V'''_b - \frac{b}{d}V'''_d & V'''_c - \frac{c}{d}V'''_d & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ dV_a - aV_d & dV_b - bV_d & dV_c - cV_d & V_d & 1 \\ dV'_a - aV'_d & dV'_b - bV'_d & dV'_c - cV'_d & V'_d & 1 \\ dV''_a - aV''_d & dV''_b - bV''_d & dV''_c - cV''_d & V''_d & 1 \\ dV'''_a - aV'''_d & dV'''_b - bV'''_d & dV'''_c - cV'''_d & V'''_d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ V_a & V_b & V_c & V_d & 1 \\ V'_a & V'_b & V'_c & V'_d & 1 \\ V''_a & V''_b & V''_c & V''_d & 1 \\ V'''_a & V'''_b & V'''_c & V''_d & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Condiția aceasta generalizează condiția (4). Intr'adevăr, când $V'''_a = a$, $V''_b = b$, $V'''_c = c$, $V''_d = d$, determinantul (5) se reduce la determinantul (4).

D. V. IONESCU
Profesor la Facultatea de Științe
din Cluj—Timișoara.

RAPORT
ASUPRA PREMIULUI „VASILE CRISTESCU"

Subsemnații, membrii în Comisiunea pentru acordarea premiului « VASILE CRISTESCU » — de trigonometrie — pe acest an, cercetând ultimul volum al *Gazetei Matematice* și având în vedere condițiile premiului publicate în Nr. 1 al *Gazetei Matematice*, nu am găsit nici o lucrare (articol, notă, problemă propusă sau rezolvare de problemă) de trigonometrie care să determine acordarea premiului în acest an.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI
„VASILE CRISTESCU"

Prof. C. IONESCU-BUJOR, Prof. AL. NICULESCU
și Prof. AL. PANTAZI.

Acest raport s'a citit și aprobat în Adunarea Generală din 18 Februarie 1943.

PREMIUL „LT.-COL. G. A. TĂNĂSESCU"

Regulamentul acestui fond prevede a se da anual cărți primului reușit la concursul *Gazeta Matematică*.

In anul acesta se acordă ca premiu din fondul premiului « LT.-COL. G. A. TĂNĂSESCU » câte un volum *Gazeta Matematică*. Volum jubilar D-lor POPESCU GH. MARIN și DUMITRESCU F. DAN, care au fost clasificați în rândul întâi la concursul din anul acesta.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

NOTE MATEMATICE

46. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Când N_9 începe cu 1 am găsit următoarele 73 soluţii:

N_9	N	N_9	N
102 576 384	0 923 187 456	143 260 785	1 289 347 065
102 683 754	0 924 153 786	143 267 085	1 289 403 765
102 731 865	0 924 613 785	143 820 675	1 294 386 075
102 763 485	0 924 871 365	143 856 207	1 294 705 863
102 853 746	0 925 683 714	145 328 076	1 307 952 684
103 528 476	0 931 756 284	152 064 378	1 368 579 402
103 574 286	0 932 168 574	152 078 436	1 368 705 924
103 874 625	0 934 871 625	152 874 360	1 375 869 240
104 285 736	0 938 571 624	153 284 760	1 379 562 840
104 683 752	0 942 153 768	154 032 786	1 386 295 074
104 857 362	0 943 716 258	154 738 620	1 392 647 580
105 374 628	0 948 371 652	156 432 807	1 407 895 263
105 742 638	0 951 683 742	158 782 640	1 428 593 760
105 762 483	0 951 862 347	163 248 750	1 469 238 750
105 823 764	0 952 413 876	164 532 807	1 480 795 263
105 846 372	0 952 617 348	165 327 804	1 487 950 236
106 275 348	0 956 478 132	165 328 470	1 487 956 230
106 375 824	0 957 382 416	165 480 723	1 489 326 507
106 425 738	0 957 831 642	165 837 420	1 492 536 780
106 523 847	0 958 714 623	165 842 307	1 492 580 763
106 527 348	0 958 746 132	165 872 304	1 492 850 736
107 253 486	0 965 281 374	167 520 438	1 507 683 942
107 482 365	0 967 341 285	170 327 564	1 572 948 076
107 634 825	0 968 713 425	174 265 830	1 568 392 470
108 264 735	0 974 382 615	174 325 608	1 568 930 472
108 357 426	0 975 216 834	174 325 860	1 568 932 740
108 425 736	0 975 831 624	174 356 082	1 569 204 738
108 534 726	0 976 812 534	175 832 640	1 582 493 760
108 537 246	0 976 835 214	176 230 548	1 586 074 932
120 633 547	1 085 746 923	176 254 830	1 586 293 470
120 754 836	1 086 793 524	176 582 304	1 589 240 736
140 532 867	1 264 795 803	178 604 325	1 607 438 925
140 783 265	1 267 049 385	180 432 675	1 623 894 075

1) Urmare la Nota 23 de la pag. 211, Vol. XLVIII.

N_9	N	N_9	N
180 564 327	1 625 078 943	182 654 730	1 643 892 570
180 564 372	1 625 079 348	183 264 750	1 649 382 750
180 645 327	1 625 807 943	187 450 326	1 687 052 934
182 306 547	1 640 758 923		

G-L GH. BUICLIU.

47. *Biblioteca Gazetei Matematice, Nr. II. Culegere de probleme de Algebră*, (Teoria Ecuaţiilor), întocmită de A. G. IOACHIMESCU. Bucureşti 1904.

In Necrologul lui A. G. IOACHIMESCU, publicat de D-l AL. STOENESCU în Nr. trecut al *Gazetei Matematice* la pag. 392, s'a omis a se anunţa printre publicaţiile lui la *Gazeta Matematică*, cartea cu titlul de mai sus. Cartea avea 82 pagini. Ea complecta Vol. I din *Culegerea de probleme de Algebră* a lui A. G. IOACHIMESCU. La ediţia următoare a acesteia i s'a încorporat şi Nr. 2 al *Bibliotecei*, întru cât în programul Liceelor reale se introdusese şi *Teoria Ecuaţiilor* în învăţământul liceal şi de aceea Nr. II a dispărut din Colecţia *Gazetei Matematice*.

Am pus această notă spre a complecta omisiunea semnalată în enumerarea operelor lui A. G. IOACHIMESCU.

I. IONESCU.

48. *Asupra unei probleme de limită.* In *Gazeta Matematică*, Vol. XLVI, pag. 209, problema Nr. 5097 s'a stabilit egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\ldots\,(2n)}\right]^2 = \frac{1}{\pi e}.$$

Voi stabili în mod mai elementar această relaţie, fără a face uz de formula lui STIRLING. Demonstraţia este bazată pe acelaşi principiu ca în *Nota Nr. 11, G. M., Vol. XLVII, pag. 132*, acolo însă s'a strecurat o greşală care atinge valabilitatea raţionamentului.

Soluţia 1-a. Considerăm seria cu termenul general

$$u_n = (n!)\left[\frac{1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)}{2\,.\,4\,\ldots\ldots\,(2n)}\right]^{2n}.$$

Avem egalitatea

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$$

dacă limita din partea întâia există, limita părţii a doua există totdeauna şi este aceea cerută de problemă. Găsim

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left[\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots\ldots(2n)}\right]^2(2n+1)\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}}.$$

Având în vedere formula lui WALLIS [1])

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots\ldots(2n)}\right]^2(2n+1)=\frac{2}{\pi},$$

deducem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{\pi e}.$$

Astfel relaţia este dovedită.

Soluţia 2-a. Se ştie că dacă $\lim E=a$, atunci $1/\lim E=1/a$. Aplicând această proprietate expresiunii date, avem

$$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{\left[\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots\ldots(2n)}\right]^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{2\cdot 4\ldots\ldots(2n)}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}\right]^2}{(n!)^{\frac{1}{n}}}.$$

Observând că $b_n=(n!)^{\frac{1}{n}}<b_{n+1}$ şi aplicând teorema lui CESÀRO, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{2\cdot 4\ldots\ldots 2n}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}\right]^2}{(n!)^{\frac{1}{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{2\cdot 4\ldots\ldots(2n)}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}\right]^2-\left[\frac{2\cdot 4\ldots(2n-2)}{1\cdot 3\ldots(2n-3)}\right]^2}{(n!)^{\frac{1}{n}}-[(n-1)!]^{\frac{1}{n-1}}}.$$

---

1) TH. ANGHELUŢĂ. Exerciţii şi Probleme, pag. 19, Ex. 110.

Având în vedere formula (1) şi că limita unui cât este egală cu câtul limitelor, când această limită din urmă este $\neq 0$, deducem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{2\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(2n)}{1\,.\,3\,.\,.\,.\,(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n+1}\left[2n+1-\frac{(2n+1)(2n-1)^2}{2n\,.\,2n}\right]}{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{2\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(2n)}{1\,.\,3\,.\,.\,.\,(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{8n^2+2n-1}{4n^2}}{\frac{n!}{n^n}:\frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}} =$$

$$\frac{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(2n)}{1\,.\,3\,.\,.\,.\,(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+2n-1}{2n^2}}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n:\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{8}{4}}{\frac{1}{e}} = \pi e.$$

S'a ajuns la acelaşi rezultat.

I. I. STAMATE.

49. *Asupra problemei 4553.*

In soluţia dată problemei 4553 la pag. 352 Vol. XLI şi în nota matematică Nr. 31 dela pag. 302, Vol. XLII, s'a rezolvat problema pentru p şi q reali, rămânând a se rezolva şi cazul imaginar.

In enunţ se cerea să se rezolve ecuaţia

$$x^2 + ax + b = 0$$

ştiind că a şi b sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 + px + q = 0.$$

Am văzut în *Nota matematică Nr. 31* că avem următoarele condiţii generale:

$$p^2 + (4 \mp \sqrt{p^2-4q})\,.\,p - 2q \mp 4\sqrt{p^2-4q} \geqslant 0.$$

Dacă vom înlocui însă:

$$p = \alpha_1 + \beta\,.\,i \quad \text{şi} \quad \sqrt{p^2-4q} = \alpha_2 + \beta\,.\,i$$

care ne dă:

$$q = \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta i).$$

Atunci avem o parte reală, care va trebui să fie mai mare sau cel puţin egală cu zero şi o parte imaginară, care ar trebui să fie nulă, adică:

— In cazul semnului *minus:*

$$1)\quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 8(\alpha_1 - \alpha_2) - 2\alpha_1\alpha_2 \geqslant 0 \\ \beta = \text{oarecare.} \end{cases}$$

— In cazul semnului *plus:*

$$2)\quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 8(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 - 2\beta^2 \geqslant 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Prima condiţie ne dă:

$$\alpha_1 > (4 - \alpha_2)\cdot\left[1 + \sqrt{1 - \frac{8\alpha_2}{(4-\alpha_2)^2}}\right]$$

sau

$$\alpha_1 < (4 - \alpha_2)\cdot\left[1 - \sqrt{1 - \frac{8\alpha_2}{(4-\alpha_2)^2}}\right]$$

ştiind însă că partea de sub radical trebuie să fie reală, adică:

$$\alpha_2 \geqslant 14{,}9282\ldots. \text{ sau } \alpha_2 \leqslant 1{,}0718\ldots.$$

Ceea ce ne dă:

$$\alpha_1 > 2{,}9282 \text{ sau } \alpha_1 < -10{,}9282.$$

A doua condiţie ne dă:

$$\beta^2 + 4 \leqslant 0$$

care este imposibilă.

Aşa dar vom avea:

$$p = 2{,}9282\ldots. + \beta\,.\,i + k_1$$

sau

$$p = -10{,}9282\ldots. + \beta\,.\,i - k_1.$$

Iar:

$$4q = (2{,}9282 + k_1 + \beta i)^2 - (14{,}9282 + k_2 + \beta\,.\,i)^2$$

sau

$$4q = (-199282 - k_1 + \beta i)^2 - (1{,}0718 - k_2 + \beta i)^3.$$

Unde k_1 şi k_2 sunt două constante pozitive, iar β având o valoare oarecare.

Cu aceasta problema *4553* poate fi socotită complect rezolvată.

COMANDOR I. LINTEŞ.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societăţii Politecnice. Anul LVII. Ianuarie 1943. Lista membrilor. Bucureşti 1943.

Bullettin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Tome XXIV. No. 10. Bucureşti 1942. Problèmes clasiques de ballistique à la lumière des possibilités actuelles de résolution. Bucureşti 1942.

Societatea politecnică. Statutele şi Regulamentul. Bucureşti 1942.

Idem. Darea de seamă pe anul 1942. Bucureşti 1943.

Revista noastră. Liceul de fete „Elena Cuza". Anul II. Nr. 3. Decemvrie 1943. Craiova.

I. I. CHIŢULESCU. Culegere de probleme de geometrie descriptivă. Partea I. Bucureşti 1942. Preţul 300 lei.

N. ABRAMESCU. *Lecţiuni de geometrie.* 106 pag. Timişoara 1943.

D-l profesor N. ABRAMESCU face de mulţi ani la Universitatea din Cluj un curs complimentar de geometrie, graţie căruia se racordează învăţământul matematic din licee cu cel din universităţi. Acest curs e deosebit de preţios căci priveşte matematica elementară dintr'un punct de vedere mai înalt şi deci dă studenţilor şi viitorilor profesori secundari o perspectivă mai amplă a materiei ce vor avea de predat. De aceea, cursul complimentar de geometrie al D-lui N. ABRAMESCU se încadrează foarte bine alături de cursurile sale — atât de cunoscute şi apreciate — de *Geometrie Analitică* şi de *Geometrie Infinitezimală*, contribuind la pregătirea profesorilor secundari. Acum în refugiu la Timişoara, D-l Prof. N. ABRAMESCU a hotărît să publice acest curs de geometrie pură, cu toate greutăţile datorite împrejurărilor.

Volumul apare sub auspiciile Universităţii din Cluj. El conţine următoarele capitole: Studiul transformărilor elementare. Omotetia, asemănarea. Diviziuni şi fascicule armonice. Transformarea prin polare reciproce. Biraportul. Noţiuni de geometria triunghiului. Involuţia. Inversiunea. Studiul geometric direct al conicelor. Unghiuri poliedrice şi poliedre. Deplasarea elicoidală. Triunghiuri sferice. Proiecţia stereografică. Noţiuni de geometria proiectivă.

O experienţă de peste treizeci de ani de autor de manuale didactice secundare şi universitare, face ca D-l N. ABRAMESCU să fie un maestru în prezentarea materialului, aşa încât cartea sa se poate citi uşor, cu plăcere şi cu folos, de oricine doreşte o bună iniţiere în geometrie.

P. SERGESCU.

CERERI

320. S'a publicat undeva vre o biografie a lui D. PATRICIU, fost profesor la Şcoala Comercială din Bucureşti?

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

GASTON TARRY. Propriétés fondamentales des angles de la géométrie modulaire. Lille 1904.

Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

WILHELM WIRTINGER AUS WIEN. Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung. Viena 1904.

Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREŞTI

Facultatea de Chimie Industrială

Examenul de admitere în anul I. Octomvrie 1942. Lucrare scrisă

Aritmetica şi algebra. I. Dacă numerele

$$\frac{1}{b+c}\ ,\ \frac{1}{c+a}\ ,\ \frac{1}{a+b}$$

sunt în progresie aritmetică, să se arate că şi numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică.

II. Dacă numerele

$$\frac{1}{b-a}\ ,\ \frac{1}{2b}\ ,\ \frac{1}{b-c}$$

sunt în progresie aritmetică, să se arate că numerele a, b, c sunt în progresie geometrică.

III. Se consideră toate numerele care sunt divizibile cu 7 şi sunt cuprinse între 100 şi 1000. Să se calculeze suma lor.

IV. Se dau 2 numere pozitive $a < b$ şi se înseamnă

$$A = \frac{a+b}{2}\ ,\ G = \sqrt{ab}\ ,\ H = \frac{2ab}{a+b}\ .$$

Să se stabilească inegalităţile

$$H < G < A\ ;\ G - H < A - G$$

$$A - G < \frac{(b-a)^2}{8a}\ ;\ A - H < \frac{(b-a)^2}{4ac}\ .$$

V. Se consideră ecuaţia

$$(p-2)\cos 2x + 2(p^2-3)\sin x - 3p - 2 = 0$$

în care p este un parametrn.

1°. Să se verifice că dacă $2p = -3$, ecuaţia are rădăcinile reale şi să se calculeze x în acest caz.

2°. Să se studieze realitatea rădăcinilor pentru celelalte valori ale lui p.

VI. Am 1,820 m înălţime şi soarele îmi proiectează umbra înainte pe direcţia de mers.

Când merg pe drumul orizontal, umbra mea măsoară 3,152 m; când urc o rampă, umbra măsoară 2,228 m, iar când cobor o pantă, umbra măsoară 6,088 m. Să se calculeze înclinările pe orizont ale rampei şi ale pantei.

Geometria plană. Se dă un segment de dreaptă AB. Prin extremităţile A şi B ale acestui segment se duc perpendicularele AX şi BY pe dreapta AB.

1°. Prin punctul I mijlocul segmentului AB se duce o dreaptă oarecare, care taie dreapta AX în P şi dreapta BY în N.

Să se arate că triunghiurile API şi BNI sunt egale.

2°. Prin punctul I se duce perpendiculara pe dreapta PN, perpendiculară care taie dreapta AX în punctul M.

Să se arate că triunghiul MNP este isoscel.

3°. Să se arate că MN = AM + BN.

4°. L fiind punctul de pe MN astfel ca

$$LM = AM \quad \text{şi} \quad LN = BN,$$

să se arate că triunghiul ALB este dreptunghic în L.

5°. Să se arate că oricare ar fi punctul M pe AX, dreapta MN este tangentă la un cerc fix.

Geometria în spaţiu. Un vas are forma unui con circular drept, cu axul vertical, cu vârful în jos. Raza cercului de bază a conului este R, înălţimea conului este H.

1°. In acest vas se toarnă o cantitate de apă egală cu V_1.

Să se determine înălţimea H_1 până la care se ridică apa.

2°. Se presupune că în vas se află apă până la o înălţime H_1 şi se introduce în vas o sferă de rază r, care rămâne complet acoperită de apă.

Se cere cu cât s'a ridicat nivelul apei prin introducerea sferei.

Să se determine această creştere în cazul particular când vasul are forma corespunzătoare relaţiei

$$R = H,$$

iar raza sferei este:

$$r = \frac{H_1}{2}.$$

3°. Să se determine în cazul particular dela punctul 2:

$$\left(R = H \quad , \quad r = \frac{H_1}{2}\right),$$

care este suprafaţa udată de apă.

4°. Să se determine, care este volumul cel mai mic de apă, ce trebuie să existe în vas, pentru ca sfera să fie complet acoperită de apă, în cazul particular R = H.

5°. Aceeaşi întrebare dela punctul 4, pentru cazul general.

Notă. Se va da câte o notă pentru fiecare din cele două probleme (Geometria plană şi Geometria în spaţiu).

Fizică. 1°. Care sunt legile pendulului simplu şi cum cu ajutorul lui putem determina intensitatea gravitaţiei. Cum variază intensitatea gravitaţiei pe suprafaţa pământului.

2°. Să se deseneze, fără a se descrie, cum e construit un spectroscop şi cum se dispersează lungimile de undă din o rază solară.

Chimie. 1°. Să se descrie pe scurt elementele ce constituiesc argila.

2°. Despre cauciuc.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4034. *O bancă dă 6 % la sumele ce i se depun spre fructificare, însă dobânzile nu le adaogă la capital decât la 1 ale lunii care urmează lunii în care se face depunerea şi ia 15 % la orice sumă împrumutată dela bancă, dobânzile fiind socotite din ziua în care se face împrumutul.*

Dobânzile cuvenite depunătorilor nu se adună la capital, iar cele datorite băncii nu se scad din capital decât la finele anului sau la lichidarea contului.

In aceste condiţiuni o persoană a depus în cursul anului 1939 la acea bancă 175 000 lei la 3 Ianuarie, apoi 6500 lei la 25 Ianuarie, a luat dela bancă 9000 lei la 16 Februarie, a depus 6000 lei la 26 Februarie, a luat 30 000 lei la 13 Martie, a depus 3000 lei la 29 Martie şi alţi 12 000 lei la 16 Aprilie.

Care este situaţia contului pe ziua de 1 Iunie?

I. IONESCU.

Trebuie mai întâi să ne dăm seama dacă deponentul s'a împrumutat realmente dela bancă sau numai şi-a retras sume din depunerile ce făcuse mai înainte. Pentru aceasta să calculăm ce

sume sunt depuse la bancă la diferitele epoce date în enunțul problemei. Avem:

La 3 Ianuarie: depuneri . . . . . 175 000 lei
La 25 Ianuarie: încă 6 500 lei, total . . . . . 181 500 „
La 16 Februarie ia 9 000 lei; rămâne . . . . . 172 500 „
La 26 Februarie depune 6 000 lei; și are . . . . . 178 500 „
La 13 Martie ia 30 000 lei; rămâne . . . . . 148 500 „
La 29 Martie depune 3 000 lei; și are . . . . . 151 500 „
La 16 Aprilie depune 12 000 lei; și are . . . . . 163 500 „

De aci se vede că deponentul nu este niciodată dator băncii și nu are de ce plăti 15% la sumele ridicate ci își ridică din sumele depuse mai înainte. La calculul dobânzilor se va ține seama de situația reală a depunerilor conform tabloului de mai sus. Tabloul ce urmează arată timpul pentru care se va calcula dobânzile, numărul zilelor și dobânda cuvenită în condițiunile enunțului:

Capital	Durata depunerii	Zile	Dobânda
181 500	1 Februarie — 15 Februarie. . . .	15 . .	453,75 lei
172 500	16 Februarie — 28 Februarie	13 . .	373,75 „
178 500	1 Martie — 12 Martie	12 . .	357,00 „
148 500	13 Martie — 31 Martie	19 . .	470,25 „
151 500	1 Aprilie — 30 Aprilie	30 . .	757,50 „
163 500	1 Mai — 31 Mai	31 . .	844,75 „
		Total . . .	3257,00 lei.

Adunând aceste dobânzi la sumele depuse de 163 500 lei găsim că pe 1 Iunie banca datorează clientului său 166 757 lei.

Soluția cu interpretarea aceasta a enunțului a fost dată de D-l MARIUS MARGULIUS (fost elev la Liceul Spiru Haret, din București). Alte soluții au fost date de D-nii AL. STOICA, M. PROCOPIESCU, ION CURCHI (Chișinău); V. DUMITRAȘCU (Roman).

PROBLEMA 5254. *Fie pe o conică un punct* M_0. *Din* M_0 *se duce un cerc osculator la conică în* M_1, *analog din* M_1 *un cerc osculator în* M_2 *și din* M_2 *un cerc osculator în* M_3. *Dacă* M_0, M_1, M_2, M_3 *sunt conciclice, atunci cercul osculator la conică în* M_0 *trece prin* M_3.

AD. GHEORGHIU.

Soluție. Fie θ_i argumentul punctului M_i pe conică, în reprezentare parametrică în funcțiune de anomalia excentrică pentru conicele cu centru. Se știe că dintr'un punct M_0 de pe conică se duce un singur cerc osculator la conică într'un punct M_1 al cărui argument e dat de:

$$\theta_0 + 3\theta_1 = 0.$$

Analog ducând din M_1 cercul osculator la conică în M_2, avem:

$$\theta_1 + 3\theta_2 = 0$$

și ducând din M_2 cercul osculator la conică în M_3, avem:

$$\theta_2 + 3\theta_3 = 0.$$

Adunând aceste relațiuni obținem:

$$\theta_0 + 4\theta_1 + 4\theta_2 + 3\theta_3 = 0 \qquad (1)$$

și observăm că dacă punctele M_0, M_1, M_2 și M_3 sunt conciclice și avem deci relația:

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \qquad (2)$$

prin scăderea relației (1) din relația (2) înmulțită cu 4 obținem:

$$3\theta_0 + \theta_3 = 0$$

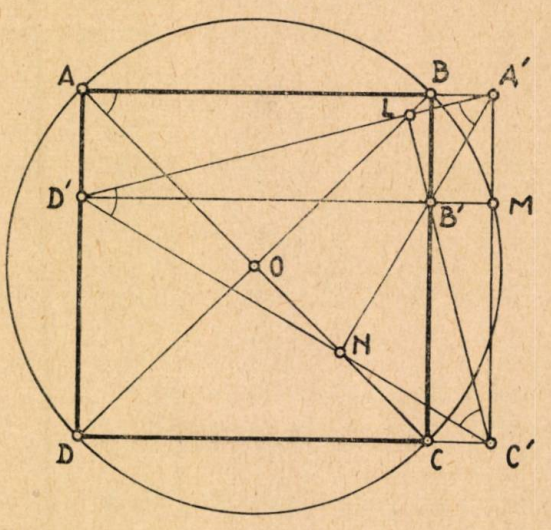
ceea ce arată că cercul osculator în M_0 trece prin M_3.

Observație. Problema generală a fost tratată de D-l Prof. MIRON NICOLESCU în articolul *« O problemă elementară de închidere în legătură cu cercurile osculatoare la o elipsă »* în revista *Pozitiva*, anul I, Nr. 6—7 din 10 Martie 1941, două luni după ce a apărut problema propusă 5254 în *Gazeta Matematică*.

PROBLEMA 5399. *Fie* ABCD *un patrat și* M *un punct pe cercul circumscris lui. Prin* M *se duc paralele la laturile patratului, pe care le întâlnesc în* A′, B′, C′, D′. *Dreptele* A′D′ *și* D′C′ *fac între ele un unghiu de* 45°. *Fie* L, N *intersecțiile* (A′D′, B′C′) *și* (A′B′, D′C′). *Să se arate că* LN *este egal cu raza cercului* ABCD.

OTILIA GEORGESCU ROEGEN.

Soluția 1-a. Alegem notațiile astfel ca M să fie pe arcul BC, A′ pe latura AB, B′ pe BC,...



Din cauza simetriei avem:

$$\sphericalangle A'D'C' = \sphericalangle AMD = \frac{1}{2}\text{măs. arc. } AD = 45^0$$

$$\sphericalangle D'A'B' = \sphericalangle AMB = \frac{1}{2}\text{măs. arc. } AB = 45^0$$

$$\therefore \quad \sphericalangle D'NA' = 90^0.$$

La fel arată că C′L $\perp$ A′D. LN este așa dar latura patratului înscris în cercul de diametru D′B′.

Cum însă acest cerc este egal cu cercul înscris în patratul ABCD, urmează cu LN este egal cu raza cercului ABMCD.

Soluția 2-a. Dreapta B′C′ este dreapta lui SIMSON a punctului M în raport cu triunghiul BCD; la fel A′D′ este dreapta lui SIMSON a lui M față de ABD. L este prin urmare piciorul perpendicularei din M pe BD.

La fel N este piciorul perpendicularei din M pe AC. Fie O centrul cercului ABMC. In dreptunghiul OLMN se vede imediat că LN=OM.

1°. La această problemă foarte simplă nu s'a primit nicio soluţie satisfăcătoare prin geometrie.

2°. Au rezolvat problema pe căi analoage soluţiei 1-a, dar făcând uz de trigonometrie, D-nii: H. M. BODNĂRESCU (Şcoala Politehnică, Bucureşti); PAUL P. DRĂGHICESCU (Liceul Militar, Iaşi); C. D. EFTIMIE (Elev-Inginer, Bucureşti); RADU V. MARTAC (Student-Inginer, Bucureşti); CONST. PANTELIMON (Şc. de Ofiţeri A. c. A., Bucureşti); M. D POPA (Şc. de Ofiţeri Artilerie, Bucureşti); MARIN GH. POPESCU (Liceul I. C. Brătianu, Piteşti); MIREL D. STOENESCU (Şc. de Ofiţeri Aviaţie).

3°. A rezolvat problema prin geometrie analitică, D-l OCTAV C. GHEORGHIU (Liceul Internat, Iaşi).

4°. Au rezolvat problema geometriceşte, însă pe o cale anevoioasă, D-nii: CORNEL IONESCU şi BARBU I. FRIEDMAN-CÂMPINA (Bucureşti).

PROBLEMA 5476. *Se consideră cercul de rază* a *cu centrul în originea axelor de coordonate dreptunghiulare* Ox, Oy. *Pe tangenta în* A(*a*, *o*) *la cerc se ia un punct variabil* M *prin care se duce a doua tangentă la cerc, care întâlneşte axa* Oy *în* N. *Când* M *variază, punctul* P *de întâlnire al diagonalelor trapezului* OANM *descrie o curbă* Γ.

Prin A *se duce o secantă variabilă care întâlneşte curba* Γ *în două puncte* P′ *şi* P″. *Să se demonstreze:*

1°. *Că dreptele* OP′, OP″ *sunt egal înclinate pe bisectoarea unghiului* xOy.

2°. *Că locul geometric al mijlocului lui* P′P″, *când secanta dusă prin* A *variază, este curba simetrică a curbei* Γ *faţă de dreapta* $2x = a$.

D. V. IONESCU.

Să notăm cu θ unghiul MO*x* şi $\operatorname{tg}\theta = u$. A doua tangentă la cerc dusă prin punctul M atinge cercul în punctul R de coordonate

$$x = a\cos 2\theta = a\frac{1-u^2}{1+u^2}\quad,\quad y = a\sin 2\theta = \frac{2au}{1+u^2}.$$

Ecuaţia tangentei în R la cerc este

$$(1-u^2)\,x + 2uy = a\,(1+u^2),$$

de unde se deduce că ordonata lui N este

$$y_N = \frac{a\,(1+u^2)}{2u}.$$

Punctul P se găseşte la intersecţia dreptelor AN, OM ale căror ecuaţiuni sunt:

$$\begin{cases} x + \dfrac{2u}{1+u^2} y = a \\ y = ux. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem de ecuaţii în raport cu x şi y se găseşte că coordonatele lui P sunt:

$$\text{P} . \begin{cases} x = a \dfrac{1+u^2}{1+3u^2} \\ y = a \dfrac{u(1+u^2)}{1+3u^2}. \end{cases}$$

Ecuaţiile acestea sunt ecuaţiile parametrice ale curbei Γ, parametrul u luând toate valorile dela $-\infty$ la $+\infty$.

1. Ecuaţia unei drepte care trece prin A este

$$y = \lambda (x - a)$$

unde λ este un parametru oarecare.

Pentru a găsi intersecţia dreptei cu curba Γ, vom înlocui x şi y în funcţie de parametrul u. Suprimând factorul u, avem ecuaţia care dă valorile u' şi u'' corespunzătoare punctelor P' şi P"

$$u^2 + 2\lambda u + 1 = 0.$$

Deoarece $u'u'' = 1$, cele două drepte OP' şi OP" sunt egal înclinate pe bisectoarea unghiului xOy.

2. Fie Q mijlocul lui P'P". Abscisa lui Q este

$$X = \frac{x' + x''}{2} = \frac{a}{2}\left(\frac{1+u'^2}{1+3u'^2} + \frac{1+u''^2}{1+3u''^2}\right)$$

adică

$$X = \frac{a}{2} \frac{2 + 4(u'^2 + u''^2) + 6u'^2 u''^2}{1 + 3(u'^2 + u''^2) + 9u'^2 u''^2}.$$

Din ecuaţia de gradul II în u, se scoate

$$u' u'' = 1$$

$$u'^2 + u''^2 = 4\lambda^2 - 2,$$

de unde se deduce că:

$$X = a\frac{1+2(4\lambda^2-2)+3}{1+3(4\lambda^2-2)+9}$$

adică

$$X = a\frac{2\lambda^2}{1+3\lambda^2}.$$

Cota Y a punctului Q se găseşte din formula

$$Y = \frac{y'+y''}{2} = \lambda\left(\frac{x'+x''}{2} - a\right) = \lambda(X-a)$$

adică

$$Y = -a\frac{\lambda(1+\lambda^2)}{1+3\lambda^2}.$$

Prin urmare coordonatele lui Q sunt

$$X = a\frac{2\lambda^2}{1+3\lambda^2}, \quad Y = -a\frac{\lambda(1+\lambda^2)}{1+3\lambda^2}.$$

Să notăm cu Q_1 simetricul acestui punct în raport cu dreapta $x = \frac{a}{2}$. Din relaţia

$$X + X_1 = a$$

$$Y = Y_1$$

se scoate coordonatele lui Q_1, adică

$$Q_1 \cdot \begin{cases} X_1 = a\dfrac{1+\lambda^2}{1+3\lambda^2} \\ Y_1 = -a\dfrac{\lambda(1+\lambda^2)}{1+3\lambda^2}. \end{cases}$$

Punctul Q_1 este identic cu punctul P_1 care corespunde la parametrul $u = -\lambda$.

Deci locul geometric al punctului Q este simetrica curbei Γ în raport cu dreapta $x = \frac{a}{2}$.

Au rezolvat problema D-nii: OCTAV C. GHEORGHIU (Liceul Internat, Iaşi); C. BAKONYI (bacalaureat, Timişoara); IOAN A. BADEA (bacalaureat, Braşov); P. P. DRĂGHICESCU, (Liceul Militar, Iaşi); Elev Plotonier CONST. PANTELIMON (Şcoala ofiţeri artilerie antiaeriană, Bucureşti).

PROBLEMA 5566. *Să se pună expresia trigonometrică*

$$E \equiv \frac{9\cos\left(a+\frac{9}{2}b\right)-23\cos\left(a+\frac{7}{2}b\right)+16\cos\left(a+\frac{5}{2}b\right)-2\cos a\cos\frac{b}{2}}{8\sin^3\frac{b}{2}}$$

sub forma:

$$E \equiv A\sin(a+b)+B\sin(a+2b)+C\sin(a+3b)$$

determinându-se coeficienții A, B, C.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluție dată de D-nii: ADRIAN I. POPESCU (elev-inginer Timișoara), P. P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iași), CONST. C. ILIESCU, VLAD GH. JURIST, MIRCEA ROȘU BUZESCU (elevi Coleg. Naț. „N. Filipescu"), A. H. CUBAT (Iași) și D-TRU GH. VASILIU (lic. mil. Iași).

Să ne ocupăm de numărător. Acesta se mai poate scrie:

$$N \equiv 9\left[\cos\left(a+\frac{9}{2}b\right)-\cos\left(a+\frac{7}{2}b\right)\right]-14\left[\cos\left(a+\frac{7}{2}b\right)-\right.$$

$$\left.-\cos\left(a+\frac{5}{2}b\right)\right]+2\left[\cos\left(a+\frac{5}{2}b\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}b\right)\right]+$$

$$+2\left[\cos\left(a+\frac{3}{2}b\right)-\cos\left(a+\frac{b}{2}\right)\right]+\cos\left(a+\frac{b}{2}\right)-\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)\cdot$$

$$\equiv -18\sin(a+4b)\sin\frac{b}{2}+28\sin(a+3b)\sin\frac{b}{2}-$$

$$-4\sin(a+2b)\sin\frac{b}{2}-4\sin(a+b)\sin\frac{b}{2}-2\sin a\sin\frac{b}{2}$$

$$\equiv 2\sin\frac{b}{2}[-9\sin(a+4b)+14\sin(a+3b)-2\sin(a+2b)-$$

$$-2\sin(a+b)-\sin a].$$

Se procedează la fel cu expresia din paranteză, care se mai poate scrie:

$$-9[\sin(a+4b)-\sin(a+3b)]+5[\sin(a+3b)-\sin(a+2b)]+$$
$$+3[\sin(a+2b)-\sin(a+b)]+[\sin(a+b)-\sin a]$$
$$\equiv -18\cos\left(a+\frac{7}{2}b\right)\sin\frac{b}{2}+10\cos\left(a+\frac{5}{2}b\right)\sin\frac{b}{2}+$$
$$+6\cos\left(a+\frac{3}{2}b\right)\sin\frac{b}{2}+2\cos\left(a+\frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2}\cdot$$
$$\equiv 2\sin\frac{b}{2}\left[-9\cos\left(a+\frac{7}{2}b\right)+5\cos\left(a+\frac{5}{2}b\right)+\right.$$
$$\left.+3\cos\left(a+\frac{3}{2}b\right)+\cos\left(a+\frac{b}{2}\right)\right].$$

Inlocuind, căpătăm pentru numărător:

$$(1)\quad N\equiv 4\sin^2\frac{b}{2}\left[-9\cos\left(a+\frac{7}{2}b\right)+5\cos\left(a+\frac{5}{2}b\right)+\right.$$
$$\left.+3\cos\left(a+\frac{3}{2}b\right)+\cos\left(a+\frac{b}{2}\right)\right]$$

Procedăm la fel cu paranteza de aci şi o punem sub forma:

$$-9\left[\cos\left(a+\frac{7}{2}b\right)-\cos\left(a+\frac{5}{2}b\right)\right]-4\left[\cos\left(a+\frac{5}{2}b\right)-\right.$$
$$\left.-\cos\left(a+\frac{3}{2}b\right)\right]-\left[\cos\left(a+\frac{3}{2}b\right)-\cos\left(a+\frac{b}{2}\right)\right]$$
$$\equiv 2\sin\frac{b}{2}[9\sin(a+3b)+4\sin(a+2b)+\sin(a+b)]$$

care dusă în (1) ne dă:

$$(2)\quad N\equiv 8\sin^3\frac{b}{2}[\sin(a+b)+4\sin(a+2b)+9\sin(a+3b)].$$

Ducând această valoare a numărătorului în enunţ se observă imediat că fracţia se simplifică. Deducem

$$A=1\ ;\ B=4\ :\ C=9.$$

Observaţiuni. 1°. Pornind dela ideea că cele două expresii din enunţ pot fi socotite ca cele două părţi ale unei identităţi, se pot determina întâi coeficienţii A, B, C, dând lui a şi b valori particulare, astfel încât căpătăm 3 ecuaţii.

De ex. pentru $a = 0$ şi $b = \frac{\pi}{3}$ avem: $A+B=5$; pentru $a=0$ şi $b=\frac{\pi}{2}$ avem: $A - C = -8$; iar pentru $b = \pi$, $A - B + C = 6$. Odată găsiţi A, B şi C se poate *verifica* indentitatea.

2°. Printre rezolvitorii anunţaţi pe copertă au fost unii care nici nu s'au ostenit să copieze *enunţul problemei* din revistă ci l-au luat — ca şi soluţia — dela un coleg. *Gazeta Matematică* ţine să dea elevilor, înafară de îndrumarea ştiinţifică, şi o educaţie sănătoasă, deaceea nu încurajază astfel de procedee şi nu publică numele celor ce le practică.

PROBLEMA 5605. *Unui număr oarecare i se adună cifrele şi se obţine alt număr; acestuia i se adună asemenea cifrele şi se obţine alt număr, şi tot aşa mai departe până se obţine un număr de o singură cifră.*

Prin ce regulă s'ar putea obţine această cifră, cu minimum de calcule?

Regula s'ar putea extinde la numere scrise într'un sistem numeric cu o bază oarecare B?

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: M. BÂRZESCU, V. CIUMAŞU, M. D. COTARIU, A. H. CUBAT, G. GH. DONŢU, D. GH. VASILIU şi R. P. VOINEA.

Fie $N = abc\ldots$ numărul oarecare şi fie:

$$N_1 = a + b + c + \ldots = a_1\, b_1\, c_1 \ldots$$

numărul obţinut adunând cifrele lui N;

$$N_2 = a_1 + b_1 + c_1 + \ldots = a_2\, b_2\, c_2 \ldots$$

numărul obţinut adunând cifrele lui N_1; şi aşa mai departe până ce obţinem un număr N_n de o singură cifră.

Observăm însă că:

$$N = M9 + N_1 \quad \text{unde} \quad N_1 < N$$

$$N_1 = M9 + N_2 \quad \text{„} \quad N_2 < N_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N_{n-1} = M9 + N_n \quad \text{„} \quad N_n < 9$$

Deoarece un număr este divizibil cu 9 dacă suma cifrelor lui este divizibilă cu 9.

Adunând egalităţile şi simplificând, obţinem:

$$N = M9 + N_n.$$

Prin urmare regula cerută poate fi enunţată astfel:

Pentru a obţine cu minimum de calcule cifra N_n, *se vor elimina deodată, din numărul* N *cifrele* 9 *sau cifrele a căror sumă este* 9 *sau* M9, *iar cifra rămasă vor fi chiar* N_n. Un astfel de calcul se poate face mintal, la prima vedere a unui număr.

In cazul unui număr scris într'un sistem numeric de bază B, avem analog:

$$N = M(B-1) + N_1 \quad \text{unde} \quad N_1 < N$$
$$N_1 = M(B-1) + N_2 \quad „ \quad N_2 < N_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N_{n-1} = M(B-1) + N_n \quad „ \quad N_n < B-1.$$

Ceea ce prin adunare şi simplificare ne dă:

$$N = M(B-1) + N_n.$$

Regula va fi deci aceeaşi, însă faţă de (B — 1).

PROBLEMA 5631. *Să se găsească un patrat perfect de şase cifre astfel că, suprimându-i prima cifră, să rămână un cub perfect.*

M. GHERMĂNESCU.

Fie P^2 şi N^3 patratul şi cubul căutate, iar a prima cifră a primului; avem

$$(1) \qquad P^2 = N^3 + 10^5 a,$$

$$(2) \qquad 21 < N < 46 \ , \ 317 < P < 999.$$

Să punem

$$(3) \qquad P = 10p + u \ , \ N = 10n + v;$$

neegalităţile (2) arată că

$$(4) \qquad n = 2, 3, 4 \ ; \ p = 31, \ldots 99.$$

Cifrele cu care se termină un patrat şi deci cubul căutat, fiind 0, 1, 4, 5, 6, 9, le vom examina pe rând.

1°. P^2 *şi* N^3 *se termină cu* 0. In acest caz $u = v = 0$, (1) devine, cu (3),

$$p^2 = 10n^3 + 10^3 a,$$

care cere $n = 10m$, exclus după (4).

2^0. P^2 *şi* N^3 *se termină cu* 1. Putem avea $u = v = 1$ sau $u = 9$, $v = 1$.

I. In cazul $u = v = 1$, (1) devine, cu (3),

$$(10p + 1)^2 = (10n + 1)^3 + 10^5 a$$

sau

$$(1') \qquad 10p^2 + 2p = 10^2 n^3 + 3 \cdot 10n^2 + 3n + 10^4 a,$$

care cere $2p - 3n = 10m$.

Dacă $n = 2$, trebuie $p = 5q + 3$, iar (1') devine

$$(5q + 3)^2 + q = 10 \cdot 2^3 + 12 + 10^3 a,$$

care cere $(5q + 3)^2 + q = 10k$. Insă $5q + 3$ şi q sunt de paritate diferită, astfel că primul membru al egalităţii precedente fiind impar, egalitatea este imposibilă.

Dacă $n = 3$, $2p - 3n = 10m$ devine $2p - 9 = 10m$, egalitate iarăşi imposibilă căci primul membru este impar.

Dacă $n = 4$, avem $2(p - 6) = 10m$, $p = 5q + 1$, iar (1') devine

$$(5q + 1)^2 + q - 1 = 10 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 10^3 a,$$

care cere $(5q + 1)^2 + q + 1 = 10m$; cum, după (4), $q = 6, 7, . 19$, condiţia precedentă este verificată pentru $q = 8$, 13, 18, deci

$$N = 41,\ 411,\ 661 \text{ sau } 911$$

care dă soluţia

$$P^2 = 411^2 = 168921 \quad , \quad N^3 = 41^3 = 68921.$$

II. In cazul $u = 9$, $v = 1$, (1) devine, cu (3),

$$(10p + 9)^2 = (10n + 1)^3 + 10^5 a$$

sau

$$(1'') \qquad 10p^2 + 18p + 8 = 10^2 n^3 + 3 \cdot 10n^2 + 3n + 10^4 a$$

care cere $3(p + 1 - n) = M5$, deci $p + 1 - n = 5q$.

Dacă $n = 2$, $p = 5q + 1$, avem

$$8p + 8 - 3n = 40q + 10 = 10m,$$

iar (1'') devine

$$(5q + 1)^2 + 5q + 1 + 4q + 1 = 10 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 10^3 a,$$

care cere $(5q + 1)^2 + 9q = 10m$, egalitate imposibilă căci primul membru este mereu impar.

Dacă $n = 3$, $p = 5q + 2$, $8p + 8 - 3n = 5(8q + 3)$, inacceptabil, căci este impar.

Dacă $n = 4$, $p = 5q + 3$, $8p + 8 - 3n = 20(2q + 1)$, iar (1″) devine

$$(5q + 3)^2 + 9q + 5 = 10 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 10^3 a,$$

care cere $q = 5r + 1$. Cum, după (4), avem $q = 6, 7, \ldots 19$, rezultă $q = 6, 11, 16$, deci

$$N = 41 \quad , \quad P = 339, 589, 839,$$

care nu dau soluţie.

In acelaşi mod se examinează şi celelalte cazuri, ajungându-se la concluzia că singura soluţie a problemei este

$$N = 41 \quad , \quad P = 411 \quad \text{cu} \quad 411^2 = 168921 \quad 41^3 = 68921.$$

Dacă se presupune că a poate fi şi nul, atunci $N^3 = P^2 = M^6$, deci şi soluţiile *formale*

$$125^2 = 015625 \quad , \quad 25^2 = 15625$$

$$216^2 = 046655 \quad , \quad 36^3 = 46656.$$

Notă. 1°. Soluţii în care raţionamentul ocupă un loc apreciabil au dat D-nii: C. C. ILIESCU, VLAD JURIST şi CLAUDIU SENI.

2°. D-nii: AUREL H. CUBAT, GH. GH. DONŢU şi OCT C. GHEORGHIU au folosit terminaţiile de două cifre ale patratelor, D-l P. P. DRĂGHICESCU pe cele de trei cifre, iar D-l CĂP. IACOB ST. EUGEN pe cele de patru cifre (G. M., v. 35, p. 134). D-l MARCEL COTARIU a folosit tablele de patrate.

3°. D-l P. P. DRĂGHICESCU este singurul care a dat şi soluţiile formale.

M. G.

PROBLEMA 5644. *Să se construiască triunghiul* ABC *căruia i se cunoaşte lungimea bisectoarei* AA′ *şi a segmentelor* BA′, CA′ *determinate de această bisectoare pe latura* BC.

N. GAIU.

Se construieşte conjugatul armonic A″ al lui A′ faţă de B şi C. Se ştie că A″ este piciorul bisectoarei exterioare a unghiului BAC. Intersecţia cercului de diametru A′A″ cu cercul de centru A′ şi rază AA′ dă poziţia punctului A. Vom avea două puncte A, simetrice faţă de BC, deci problema are două soluţii egale, afară de cazul când lungimea AA′ dată, este mai mare decât segmentul A′A″, caz în care nu avem nicio soluţie.

Pentru discuţie presupunem $A'B < A'C$ şi notăm

$$\frac{A'C}{A'B} = k \quad \therefore \quad \frac{A'B + A'C}{A'B} = \frac{a}{A'B} = k + 1$$

$$\therefore \quad A'B = \frac{a}{k+1}.$$

La fel se găseşte

$$A''B = \frac{a}{k-1}.$$

Din aceste egalităţi deducem

$$A'B + A''B = A'A'' = \frac{2ak}{k-1}.$$

Deci condiţia de posibilitate a problemei este

$$AA' < 2\frac{ak}{k-1}.$$

Bune soluţii analoage au dat D-nii: M. ANDREESCU, A. ANDREI, M. BÂRZESCU, MIRCEA BUZESCU, FL. D. CĂRUNTU, G. GH. DONŢU, P. R. DRĂGHICESCU, C. D. EFTIMIE, N. GANEA, O. C. GHEORGHIU, C. C. ILIESCU, ŞT. MIHĂIEŞCU, ALDEA V. MINEA, D. NACHE, N. N. POPA, M. GH. POPESCU, GH. T. PUCHIU, I. I. PURICĂ, CL. SENI, MIREL D. STOENESCU, T. TURCULEŢ, D. GH. VASILIU, R. P. VOINEA şi E. N. WEGENER.

D-nii: A. H. CUBAT şi E. N. WEGENER au dat bune soluţii algebrice.

D-l C. C. ILIESCU a dat şi o soluţie prin trigonometrie.

D-nii: M. BUZESCU şi C. C. ILIESCU au dat construcţiile geometrice complecte pentru construirea punctului A''.

PROBLEMA 5692. *Care este numărul numerelor prime cu* 200 *şi mai mici ca el, care în acelaşi timp sunt prime şi cu* 231 ?

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţia I-a dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (Şcoala Ofiţeri Geniu).

Problema se reduce la căutarea numărului numerelor prime cu 2, 3, 5, 7, 11 şi mai mici ca 200, adică a numărului numerelor prime absolut mai mici ca 200, deoarece $\sqrt{200} < 11$.

Utilizând o tabelă de numere prime absolute, găsim în total 47 numere prime absolute, din care reducând pe cele cinci de mai sus, ne rămân 42 *numere.*

Soluția II-a dată de D-nii: EM. CONSTANTINESCU (Liceul Șincai, București) și G. GH. DONȚU (Liceul Aplicație, Iași).

Observăm că indicatorul lui 200 este:

$$\varphi(200) = 2^3 . 5^2 . \left(1 - \frac{1}{2}\right) . \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 80.$$

Din aceste 80 de numere eliminăm numerele divizibile cu: 3, 7 sau 11 și rămân 42 numere.

Soluția III-a. Utilizând nota 13 din G. M., XLVIII, adică formula indicatorilor subordonați:

$$I_N(M . N) = N - \Sigma E\left(\frac{N}{a'}\right) + \Sigma E\left(\frac{N}{a' . b'}\right) - \Sigma E\left(\frac{N}{a' . b' . c'}\right) + \ldots$$

unde a', b', c',... sunt factori primi ai produsului M . N, avem în cazul problemei: $M = 231 = 3 . 7 . 11$ și $N = 200 = 2^3 . 5^2$.

Prin urmare:

$$I_{200}(231 . 200) = 200 - \left[E\left(\frac{200}{2}\right) + E\left(\frac{200}{3}\right) + E\left(\frac{200}{5}\right) + E\left(\frac{200}{7}\right) + E\left(\frac{200}{11}\right)\right] + \left[E\left(\frac{200}{2.3}\right) + E\left(\frac{200}{2.5}\right) + E\left(\frac{200}{2.7}\right) + E\left(\frac{200}{2.11}\right) + E\left(\frac{200}{3.5}\right) + E\left(\frac{200}{3.7}\right) + E\left(\frac{200}{3.11}\right) + E\left(\frac{200}{5.7}\right) + E\left(\frac{200}{5.11}\right) + E\left(\frac{200}{7.11}\right)\right] - \left[E\left(\frac{200}{2.3.5}\right) + E\left(\frac{200}{2.3.7}\right) + E\left(\frac{200}{2.3.11}\right) + E\left(\frac{200}{2.5.7}\right) + E\left(\frac{200}{2.7.11}\right) + E\left(\frac{200}{2.7.11}\right) + E\left(\frac{200}{3.5.7}\right) + E\left(\frac{200}{3.5.11}\right) + E\left(\frac{200}{3.7.11}\right) + E\left(\frac{200}{5.7.11}\right)\right]$$

$$= 200 - [100 + 66 + 44 + 28 + 18] + [33 + 20 + 14 + 9 + 13 + 9 + 6 + 5 + 3 + 2] - [6 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0] = 200 - [256] + [114] - [16] = 42.$$

Au rezolvat problema: 1°. GH. CUBAT prin încercări.

2°. D-nii M. BÂRZESCU și M. GH. POPESCU cu ajutorul indicatorilor dând toate soluțiile.

3°. D-nii P. COLUMBEANU și A. TOFAN, prin încercări.

4°. D-l O. EM. GHEORGHIU a găsit 46 soluții în loc de 42, iar D-l M. I. PĂTRĂSCIOIU 47 soluții.

PROBLEMA 5722. *Să se găsească locul vârfului* B *al unui triunghiu* ABC *dreptunghic în* A *ştiind că vârful* C *şi piciorul bisectoarei* BB′ *sunt fixe.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie geometrică, dată de D-nii: D. GH. VASILIU, M. BÂRZESCU (Liceul militar, Iaşi), M. S. PĂTRĂSCIOIU (Liceul Buzău) şi M. D. COTARIU (Brăila).

Perpendiculara în B′ pe AC taie ipotenuza BC în E. Observăm că

$$\sphericalangle BB'E = \sphericalangle B'BA = \sphericalangle B'BE$$

primele două ca alterne interne, ultimele două prin construcţie.

Rezultă

$$\overline{EB} = \overline{EB'}$$

ceea ce arată că B descrie o strofoidă cu polul în C, punctul dublu în B′ şi cu asimptota paralelă cu AB.

Soluţie analitică, dată de D-nii: G. GH. DONŢU (Liceul de Aplicaţie, Iaşi); OCT. C. GHEORGHIU (Liceul Internat, Iaşi); M. C. MANOLACHE (Student inginer, Bucureşti); M. D. COTARIU (Brăila); B. BEREANU (Elev particular, clasa VIII-a, Bucureşti); E. N. WEGENER (Bucureşti); A. H. CUBAT (Elev particular, clasa VIII-a, Iaşi); DAN A. CORBARU, MIREL D. STOENESCU (Bucureşti) şi P. P. DRĂGHICESCU.

Raportăm figura la AC ca axă de x şi perpendiculara în C pe AC ca axă de y. Notăm

$$\sphericalangle BCA = 2\alpha$$

şi observăm că avem

$$\sphericalangle BB'A = \alpha + \frac{\pi}{4}.$$

Cu acestea ecuaţiile dreptelor CB şi B′B sunt respectiv

$$(CB) \qquad y = x \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} x \qquad (1)$$

$$(B'B) \qquad y = (x - a)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = (x - a)\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

Eliminând pe tgα între (1) şi (2) găsim că locul cerut este strofoida dreaptă de ecuaţie

$$y = \pm (x - a) \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

unde

$$a = \overline{CB'}.$$

Luând origina în B' ecuaţia capătă forma clasică

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$$

Notă. 1°. Se găseşte tot o strofoidă dacă B' este piciorul bisectoarei exterioare.

2°. In cazul când se dau vârful C şi piciorul bisectoarei BB' al unui triunghiu *oarecare*, iar latura AB păstrează o direcţie dată, atunci vârful B descrie o strofoidă oblică, ceea ce se demonstrează geometric identic ca la prima din soluţiile precedente.

3°. Problema aceasta derivă din problema pe care am propus-o cu Nr. 4919 şi care s'a rezolvat în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIII, pag. 606. In problema 4919 ceream construcţia triunghiului ABC când se cunosc punctele C, B' şi lungimea bisectoarei BB'.

PROBLEMA 5761. *Un avion zburând orizontal, pe un timp liniştit, cu iuţeala constantă de 400* $^{km}/_{oră}$, *străbate distanţele* AB *şi* AC (AB $\perp$ AC) *respectiv în 120 minute şi 90 minute. Pe un vânt constant, acelaşi avion în aceleaşi condiţii de zbor străbate distanţele* AB *şi* AC *în 150 minute şi 80 minute.*

Să se determine iuţeala şi direcţia vântului.

ALEXANDRU STOENESCU.

Distanţele AB şi AC au respectiv lungimile:

$$AB = 400\ ^{km}/_{oră} \times \frac{120}{60}\ \text{ore} = 800\ \text{km}.$$

$$AC = 400 \times \frac{90}{60} = 600\ \text{km}.$$

Iuţelile v_1 şi v_2 ale avionul în timpul *acţiunii* vântului respectiv *după direcţiile* AB şi AC sunt:

$$v_1 = \frac{800\ \text{km}}{\frac{150}{60}\ \text{ore}} = 320\ ^{km}/_{oră} \quad ; \quad v_2 = \frac{600}{\frac{80}{60}} = 450\ ^{km}/_{oră}.$$

A) *Soluție geometrică.*

Notând cu:

$v_r = 400\ ^{km}/_{oră}$ = *iuțeala avionului în orice direcție în atmosferă liniștită;*

v_t = *iuțeala constantă în mărime, direcțiune și sens a vântului;*

α = unghiul vectorului ce reprezintă *iuțeala vântului* cu direcția AB;

β = unghiul *axei avionului* cu AB, pentru ca avionul în mișcarea sa *să se poată menține cu toată acțiunea vântului pe direcția* AB;

γ = unghiul *axei avionului* cu AC, pentruca avionul în mișcarea sa *să se poată menține cu toată acțiunea vântului pe direcția* AC;

și ținând seama că *iuțeala în mișcarea absolută* a avionului ($\vec{v_1}$ respectiv $\vec{v_2}$) este egală cu suma geometrică a iuțelii în *mișcarea relativă* ($\vec{v_r}$) și a iuțelii în *mișcarea de târîre* ($\vec{v_t}$ iuțeala vântului), avem:

$$\vec{v_1} = \vec{v_r} + \vec{v_t}$$ (și fig. 1 *triunghiul vectorial* MM_1M_2)

$$\vec{v_2} = \vec{v_r} + \vec{v_t}$$ (pe fig. 1 *triunghiul vectorial* NN_1N_2).

Dacă combinăm cele două triunghiuri MM_1M_2 și NN_1N_2 astfel încât vectorul echipolent $v_t = M_1M_2 = N_1N_2$ *să se suprapună*, se obține fig. 2.

Pe baza acestei figuri, rezultă următoarea construcție grafică:

Se iau la o scară anumită $MR = v_1$ și perpendicular pe MR, $NR = v_2$. Din M și N ca centre cu raze egale cu $v_r = 400\ ^{km}/_{oră}$ se duc două cercuri care se întretaie în P.

Vectorul $\vec{PR}$ reprezintă în *mărime, direcție* și *sens iuțeala vântului.* Unghiurile necunoscute α, β, γ se deduc imediat din figură.

B) *Soluție analitică.*

Păstrând notațiile din soluția geometrică prin proiectarea pe direcțiile AB și AC ale celor două contururi triunghiulare MM_1M_2

şi NN_1N_2 obţinem următorul sistem de patru ecuaţiuni cu patru necunoscute (v, α, β, γ):

$$400\cos\beta = 320 + v\cos\alpha \quad (1)$$

$$400\sin\beta = v\sin\alpha \quad (2)$$

$$400\cos\gamma = 450 - v\sin\alpha \quad (3)$$

$$400\sin\gamma = v\cos\alpha. \quad (4)$$

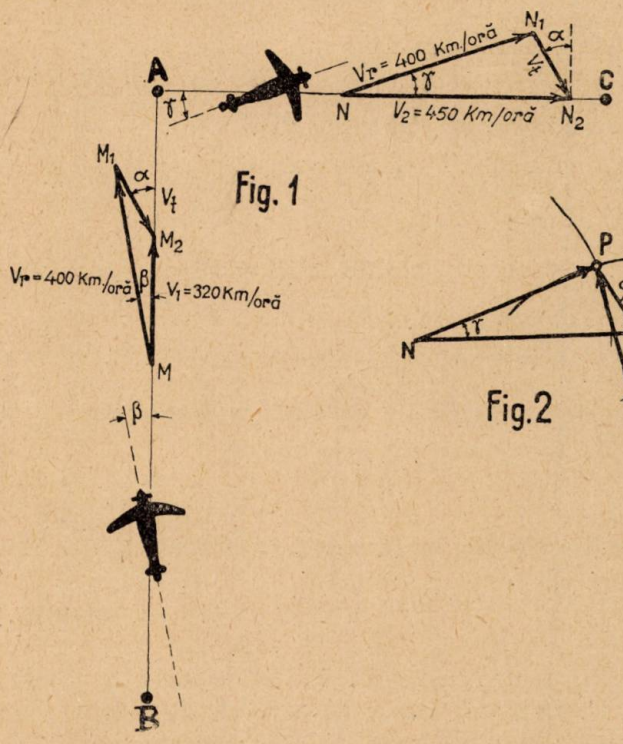


Fig. 1

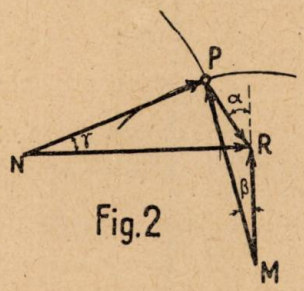


Fig. 2

Prin ridicări la patrat şi adunare, din (1) şi (2) respectiv (3) şi (4) găsim:

$$v^2 + 640\,v\cos\alpha = 160.000 - 102.400 = 57600$$

$$v^2 - 900\,v\sin\alpha + 42.500 = 0.$$

De unde:

$$\cos\alpha = \frac{57600 - v^2}{640\,v} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{42500 + v^2}{900\,v} \quad (5)$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \left(\frac{57600 - v^2}{640\,v}\right)^2 + \left(\frac{42500 + v^2}{900\,v}\right)^2 = 1$$

Efectuând ridicările la patrat, simplificând şi grupând obţinem ecuaţiunea bipatrată în v:

$$v^4 - 320.000v^2 + 2.810.122.000 = 0. \qquad (6)$$

Având în vedere că $v > 0$, iar întru cât $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ din (5) rezultă $v^2 < 57600$ singura rădăcină a ecuaţiei (6) corespunzătoare problemei este:

$$v = + \sqrt{160.000 - \sqrt{(160.000)^2 - 2.810.122.000}} \cong 95{,}1 \ ^{km}/_{oră}.$$

Introducând această valoare în (5):

$$\cos\alpha \cong 0{,}79780 \ ; \ \sin\alpha \cong 0{,}60213 \ ; \ \alpha \cong 37^0 2'.$$

Din (2) şi (4):

$$\sin\beta \cong 0{,}143156 \ ; \ \beta = 8^0 14'$$

$$\sin\gamma \cong 0{,}189698 \ ; \ \gamma = 10^0 56'$$

La această problemă s'a primit o soluţie bună dela Domnul VICTOR C. PĂUNESCU, elev la Liceul „Titu Maiorescu" din Bucureşti.

D-sa neglijând unghiurile β şi γ obţine valorile apropiate:

$$v \cong 94{,}3 \ ^{km}/_{oră} \quad \alpha \cong 32^0$$

AL. ST.

PROBLEMA 5762. *Se cere un patrat scris cu trei cifre sau cu cinci cifre de aceeaşi paritate.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU, JURIST GH. VLAD şi C. C. ILIESCU (Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal); E. N. WEGENER (Bucureşti); M. D. COTARIU (Brăila).

Ultimele două cifre ale unui patrat n^2 nu pot fi decât 00, 01, 21, 41, 61, 81, 04, 24, 44, 64, 84, 25, 16, 36, 56, 76, 96, 09, 29, 49, 69, 89 *(Culegere de probleme de aritmetică.* Vol. I, XLVIII, 1, de I. IONESCU).

Niciuna din aceste grupe nu are ambele cifre impare şi deci nu există patrate numai cu cifre impare afară de *1* şi *9*, care are numai o cifră. Grupa 00 se poate scrie înaintea oricărui patrat şi ne dă soluţii formale ca de exemplu 001, *004*, 009 şi avem soluţii formale, dar nu convine decât 004 care are toate cifrele

pare. La o soluţie se poate scrie 00 la urmă şi găsim o nouă soluţie, ca 400. Se poate scrie înainte şi un singur 0 pentru a avea soluţii formale ca *064*. Mai avem soluţia formală 000.

In definitiv soluţii de 3 cifre avem pe 400 şi soluţiile formale 000, 004, 064.

Să căutăm patratele de cinci cifre pare. Prima cifră dela stânga nu poate fi 1, 3, 5, 7, 9 şi deci:

$20000 < n^2 < 30000$; $40000 < n^2 < 50000$; $60000 < n^2 < 70000$;

$80000 < n^2 < 90000$.

$141 < n < 174$; $199 < n < 224$; $244 < n < 265$; $282 < n < 300$.

Cifra unităţilor lui n nu poate fi decât 2 sau 8 căci dacă punem $n = 10z + u$, $n^2 = 100z^2 + 20zu + u^2$ şi n are la zeci cifră impară dacă u este 4 sau 6. Deci putem avea pentru n şi n^2 valorile:

$n = 192$, $n^2 = 20164$; $n = 200$, $n^2 = \underline{40000}$; $n = 252$, $n^2 = 63504$

$n = 148$, $n^2 = 21904$; $n = 202$, $n^2 = \underline{40804}$; $n = 258$, $n^2 = 66564$

$n = 152$, $n^2 = 23104$; $n = 208$, $n^2 = \underline{43264}$; $n = 260$, $n^2 = 67600$

$n = 158$, $n^2 = 24964$; $n = 212$, $n^2 = 44944$; $n = 262$, $n^2 = \underline{68644}$

$n = 160$, $n^2 = 25600$; $n = 218$, $n^2 = 47524$; $n = 282$, $n^2 = 82944$

$n = 162$, $n^2 = \underline{26244}$; $n = 220$, $n^2 = \underline{48400}$; $n = 292$, $n^2 = 85264$

$n = 168$, $n^2 = \underline{28244}$; $n = 222$, $n^2 = 49284$; $n = 298$, $n^2 = \underline{88804}$

$n = 172$, $n^2 = 29584$; $n = 248$, $n^2 = 61504$.

Numerele subliniate sunt soluţii.

Problema admite dar opt soluţii cu câte 5 cifre perechi, la care se adaugă şi următoarele soluţii formale de 5 cifre:

00004, 00064, 00400; 06400; 00484.

EXERCIŢII

22. Să se găsească patratul de trei cifre, care sporit cu diferenţa a două patrate consecutive de câte patru cifre, dă un alt patrat de trei cifre.

ŞT. CETĂŢEANU.

R. Fie M^2, N^2 patrate de trei cifre şi P^2 un patrat de patru cifre, aşa încât

$$N^2 + [(P+1)^2 - P^2] = M^2$$

(1) $$M^2 - N^2 = (M-N)(M+N) = 2P + 1.$$

Pe de altă parte

(2) $$10 \leqslant M \leqslant 31 \; ; \; 10 \leqslant N \leqslant 31 \; ; \; 32 \leqslant P \leqslant 99.$$

Din (1) se vede că M şi N nu sunt de aceeaşi paritate.

Dăm lui M în (1) pe rând valorile 10, 11,... 30, 31 şi lui N valori din acelaşi şir dar mai mici ca M şi de paritate diferită şi reţinem numai pe acelea care fac produsul $(M-N)(M+N)$ mai mare de cât 65 şi mai mic de cât 199, conform limitelor fixate de (2). Găsim astfel următoarele 29 grupe de soluţii aranjate după ordinea crescândă a lui M:

M	N	P	M	N	P	M	N	P
13	10	34	18	15	49	24	21	67
14	11	37	19	14	82	25	24	44
15	10	62	19	16	52	25	22	70
15	12	40	20	15	87	26	23	73
16	11	67	20	17	55	27	24	76
16	13	43	21	16	92	28	25	79
17	10	94	21	18	56	29	26	82
17	12	72	22	17	97	30	27	85
17	14	46	22	19	61	31	28	88
18	13	77	23	20	64			

Avem de exemplu:

$$13^2 + 78^2 - 77^2 = 18^2 \quad \text{sau} \quad 169 + 6084 - 5929 = 324.$$

PROBLEME PROPUSE

5800. Care sunt numerele de trei cifre descompozabile în un produs de trei numere prime absolute sau în un produs de trei numere coprime între ele?

I. IONESCU.

5801. Cu trei numere în progresie aritmetică, scrise unul după altul, să se formeze un patrat de patru cifre.

G-L GH. BUICLIU.

5802. Să se arate că numărul numerelor prime cu N, din şirul numerelor: 1, 2, 3,..., N^m, este egal cu indicatorul lui N^m.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5803. In ce sistem de numeraţie, de bază mai mică decât 100, există în acelaşi timp patrate de *patru* cifre de forma *abab* şi cuburi de patru cifre de forma $a'b'a'b'$?

V. THÉBAULT.

5804. Să se arate că patru puncte din plan, sau se găsesc toate patru pe acelaşi cerc, sau cel puţin unul este *interior* cercului determinat de celelalte trei.

De asemeni, cinci puncte din spaţiu, sau se găsesc toate cinci pe aceeaşi sferă, sau cel puţin unul este *interior* sferei determinate de celelalte patru. ŞERBAN GHEORGHIU.

5805. Un trapez isoscel ABCD are laturile neparalele egale cu baza mică, iar diagonala AC fixă.

Să se afle şi să se construiască: 1°. Locul geometric al vârfurilor B şi D.

2°. Locul geometric al punctului de intersecţie al laturilor neparalele. EMIL MORŢUN.

5806. Pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu dat, sunt aşezate punctele M, N, P.

1°. Punctul M fiind dat, să se construiască triunghiul MNP, ştiind că este dreptunghic în M şi că NP are o direcţie dată.

2°. Notând $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = k$, să se calculeze rapoartele în care N şi P împart laturile respective, atunci când triunghiul MNP este dreptunghic în M, iar dreptele AM, BN, CP sunt concurente.

Particularizări interesante. GH. D. SIMIONESCU.

5807. Se dau în plan dreptele Ox, Oy şi un punct P în jurul căruia se roteşte unghiul constant $x'Py'$. Latura Px' întâlneşte pe Ox, Oy în A şi B, iar Py' întâlneşte aceleaşi drepte în C şi D.

Să se găsească învelitoarele diagonalelor AC, BD ale patrulaterului ABCD. A. D. BUNESCU.

5808. Să se demonstreze că patru muchii consecutive ale unei piramide oblice, cu baza un poligon regulat cu n laturi ($n \geqq 4$), sunt legate printr'o relaţie de recurenţă ai cărei coeficienţi sunt independenţi de lungimea laturii poligonului de bază.

I. B. FLORESCU.

5809. Fie M un punct pe o *spirală a lui* ARHIMEDE şi M' simetricul polului O al spiralei, faţă de punctul M. Perpendiculara în M' pe OM, intersectează tangenta în M la spirală în punctul M_1.

1°. Să se construiască tangenta în M la curba (M).

2°. Să se găsească locul punctului M_1.

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

5810. Să se studieze mişcarea rectilinie a unui punct material de masă m, supus acţiunii forţei:

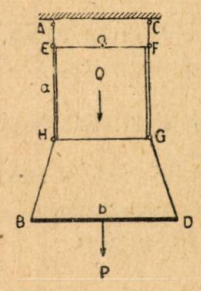
$$F = \frac{mtv}{2(1-t^2)} + mtv^2,$$

v fiind iuţeala la momentul t.

Caz particular $v_0 = \frac{3}{2}$, v_0 fiind iuţeala iniţială (pentru $t=0$).

M. GHERMĂNESCU.

5811. Două fire AB şi CD inextensibile, de greutate neglijabilă, de lungime l sunt fixate de capetele superioare A şi C de două inele situate pe aceeaşi orizontală la distanţa a, iar în capetele inferioare B şi D prind o bară BD orizontală de lungime b şi greutate P.



O placă patrată EFGH, de latură a şi greutate Q poate luneca cu muchiile verticale EH şi FG în lungul firelor.

Să se determine lungimea l astfel încât lăsând placa să cadă liber din poziţie, când muchea orizontală superioară EF este în AC, să ajungă cu muchea orizontală inferioară GH peste bara BD, fără ca să lovească această bară.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. 1°. La pag. 341 rândul 27 în loc de *31 Octombrie stil vechi* se va citi *31 Octombrie stil vechi 1868.*

2°. La pag. 341 rândul 33 în loc de *Mitropolitul Primat al Moldovei* se va citi *Mitropolitul* PIMEN *al Moldovei.*

3°. La pag. 342 rândul 8 în loc de *10/23 Iulie* se va citi *10/22 Iulie.*

4°. La pag. 342 rândurile 15 şi 23 în loc de *Şcoala Centrală de Arte şi Manufactură* se va citi *Şcoala de Manufactură.*

5°. Ultimile două rânduri cu inegalităţi dela pag. 397 trebuesc suprimate.

6°. Determinantul din problema 5791 propusă în numărul trecut trebuie înlocuit prin

$$\begin{vmatrix} 2-2ac^2 & bc^2 & 2a^2c^2-b^2c^2-2a \\ bc^2 & 2-2ac^2 & abc^2-2b \\ b^2c^2-2a^2c^2+2a & 2b-abc^2 & 2a^2c^2-2a^2-2b^2 \end{vmatrix}.$$

Până la sfârșitul lunii precedente, s'au primit și reținut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Constantinescu I. M. (5705, 60); *Drăghicescu P. P.* (3573, 4098, 289, 356, 412, 68, 690, 859, 5523, 608, 11, 12, 74, 75, 750, 76, 93, 94, 97, 98, E, N, P); *Dumitrescu Gh. Tr.* (5788); *Gheorghiu S. Oct.* (E); *Iacob Șt. E.* Căp. (3312, 5105); *Mahrenholz I.* (5762, 73, 75, 76, 79, 84); *Marinescu C. Marinel* (5760, 73, 98); *Moessner A.* (N); *Pălăceanu D. V.* (5595, 618, 43, 717, 50, 60, 62, 64, 65, 76, 88); *Pițigoi Gh. Victor* (5765); *Prassa Gh. C.* (E); *Staicu I. C.* (5727, E); *Teodorescu St. I.* (5146); *Vișa E.* (5784); *Wegener N. E.* (5505, 786, 94, 98, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a reguilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 18.535

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 11. — IULIE 1943

SUMARUL

1. † Grigore C. Zamfirescu . . . . . *Alexandru D. Bunescu.*
2. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
3. Mişcarea corpurilor în medii rezistente de densitate variabilă. . . . . *Alexandru Stoenescu.*
4. Curbura mijlocie şi liniile asimptotice. *A. Myller.*
5. Relaţiuni metrice în geometria triunghiului . . . . . *Ion C. Vasiliu.*
6. Raportul comisiei pentru decernarea premiului de geometrie elementară „G. Ţiţeica" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
7. Note matematice: 50 — 56.
8. Chestiuni de examen.
9. Bibliografie.
10. Cereri: 321.
11. Diverse.
12. Probleme rezolvate: 2560, 5171, 5203, 5249, 5305, 5471.
13. Exerciţii: 23.
14. Probleme propuse: 5736, 5812 — 5824.

BIBLIOTECA CENTRALĂ

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942. sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 93, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **8**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

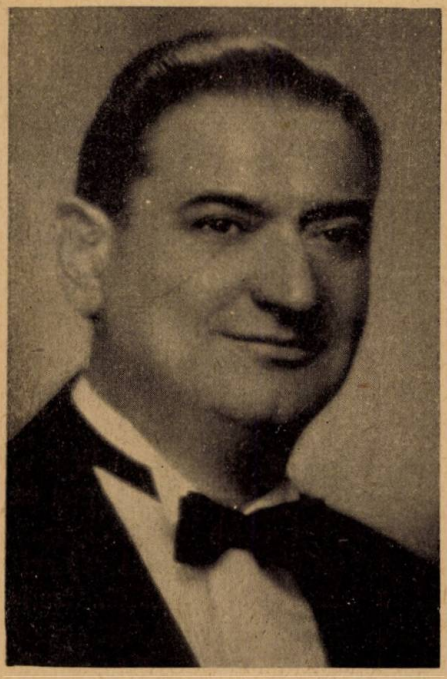
EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

† GRIGORE C. ZAMFIRESCU

Incerc să schiţez pentru posteritatea *Gazetei Matematice* portretul acestui valoros membru al ei, înainte ca neaşteptata lui dispariţie, să fi găsit în spiritul meu liniştea acceptării pasive a hotărîrilor destinului.

Căci pare nedrept şi este de neînţeles pentru mintea noastră ca o vitalitate excepţională, o energie în permanentă elaborare, un temperament plin de optimism şi, ceea ce e mai straniu, un spirit care printr'un exces de religiozitate se dovedea mai supus autorităţii destinului, pare fără sens ca o astfel de alcătuire morală destinată mai cu prisosinţă vieţii, să fie suprimată brusc, necruţător, indiferent.



Prin pânza de lacrimi a acestei stări sufleteşti, privesc înapoi în cenuşiul amintirilor.

In 1911, când am trecut în cl. VI-a a liceului din Craiova, am intrat şi în familia *Gazetei Matematice*. Mi-a atras repede atenţia elevul ZAMFIRESCU C. GRIGORE dela liceul din Focşani, prin bogata lui activitate, prin numeroasele probleme rezolvate, prin frumoasele contribuţii personale. Numele lui era urmat de un lung rând de numere pe coperta revistei. Era vădit un fruntaş al celor „tari la matematici".

Acţiunea educativă a *Gazetei Matematice* a avut acest merituos specific, că lumea strânsă în jurul ei de dragostea de matematici, învăţa să se cunoască, să se aprecieze, să se respecte reciproc, înainte de contactul personal. Cu această pregătire, întâlnesc pentru prima oară pe GRIGORE ZAMFIRESCU la concursul *Gazetei Matematice* din 1914. De atunci am rămas prieteni.

El este clasificat al 4-lea, după ce la concursul din 1913 fusese menţionat.

In toamna lui 1914 ne întâlnim din nou la concursul de intrare în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. Deşi trecuse clasa VIII-a în particular, reuşeşte al doilea şi păstrează acest loc până la terminarea Şcoalei. Intrerupe Şcoala pentru a lua parte ca voluntar la războiul pentru întregirea neamului. Cu aceeaşi seriozitate urmează Şcoala Militară şi îşi face întreaga datorie pe front, unde câştigă ca ofiţer două grade. După obţinerea diplomei de inginer în 1920, se specializează în construcţii de avioane, timp de doi ani, la École Supérieure d'aéronautique din Paris, pe care o absolvă cu distincţie. Matematicianul dela *Gazeta Matematică*, pune bază temeinică inginerului ce avea să fie.

In 1923 se aruncă în lupta vieţii. Intemeiază, cu alţi doi prieteni, Societatea pentru Exploatări Tehnice (SET), care închiriază nişte ateliere în strada Popa Lazăr. Infiinţează o secţie de aviaţie la aceste ateliere, calculând el însuşi avionul SET, pe care dorea să-l realizeze. In lupta cu neîncrederea, cu adversităţile, cu invidia, reuşeşte. Avioanele SET câştigă concursuri, realizează performanţe, se impun. Atelierele se desvoltă şi se pun în serviciul apărării naţionale. Astăzi Societatea „SET-Industria Naţională Aeronautică" este o instituţie a ţării.

Şcoala pe care el a cinstit-o ca elev, îi cinsteşte munca, sforţările, realizările. D-l rector VASILESCU KARPEN îl cheamă ca profesor la Politehnică, spre a împărtăşi şi altora arta sa.

Gazeta Matematică, unde a fost strălucit colaborator în anii studiilor sale, îl primeşte în 1924 ca membru al Societăţii. Recunoscător pentru rolul Gazetei în educaţia lui ştiinţifică, înţelegător al menirii ei pentru tehnica românească, ZAMFIRESCU n'a lipsit de sprijinul lui generos această Societate de sacrificii. Iar în testamentul lui, pe care am avut durerea să-l citesc, se găseşte un gând pios şi pentru *Gazeta Matematică*.

La 9 Mai anul acesta, ZAMFIRESCU a reunit la el pe colegii de promoţie dela Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. Am fost aproape toţi. Ne-a primit cu căldura şi entusiasmul care alcătuiau fiinţa lui sufletească.

El încheia anul acesta 20 ani de luptă în profesiune, îi încheia cu succes. Era al doilea ciclu al vieţii lui, după primii 20 ani de pregătire. Reuniunea noastră era deci pentru el un popas în luminişul amintirilor şi sentimentelor duioase ale vieţii universitare.

Soarta însă i-a fixat alt rost. Soarta i-a suprimat al treilea ciclu al vieţii, la care avea atâta drept şi pe care atât l-a meritat.

Când, în frământările vieţii cotidiane, mă absorb mai adânc preocupărilor, tresar la un gând: să fi murit oare GRIGORE ZAMFIRESCU?

ALEXANDRU D. BUNESCU.

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 296)

Tensorul, Axiatorul.

Orice afinor se poate exprima printr'o sumă de doi afinori de forma:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(\Phi + \Phi_c) + \tfrac{1}{2}(\Phi - \Phi_c)$$

în care $T = \tfrac{1}{2}(\Phi + \Phi_c)$ e denumit tensorul afinorului Φ şi se exprimă simbolic prin $ts\,\Phi$, iar $\Theta = \tfrac{1}{2}(\Phi - \Phi_c)$ e denumit axiatorul lui Φ, se notează simbolic prin $ax\,\Phi$ [1]).

In literatură se mai întâlneşte denumirea de tensor, dată unui afinor. In cazul acesta, tensorul şi axiatorul poartă denumirile de tensor simetric şi tensor antisimetric.

Ţinând seama de definiţiile de mai sus pentru tensor şi axiator, rezultă:

$$T = T_c \qquad \Theta = -\Theta_c$$

ţinând seamă că $\Phi_{cc} = \Phi$.

Faţă de cele de mai sus zicem că tensorul reprezintă un afinor simetric, iar axiatorul sau afinor nesimetric sau antisimetric.

Afinorul se reprezintă aşa dar în forma următoare:

$$\Phi = ts\,\Phi + ax\,\Phi.$$

Zicem că tensorul e complect, plan sau după o dreaptă după cum vectorul $T\bar{n}$, e diferit de zero, pentru orice poziţie a lui $\bar{n}$, sau numai când $\bar{n}$ e perpendicular pe un anumit plan, sau în fine când $\bar{n}$ se găseşte într'un anumit plan.

1) Vezi SPIELREIN, Vektorrechnung, zweite Auflage 1926. Verlag Wittwer Stuttgart.

In ce priveşte axiatorul observăm următoarele:

Fie $\Phi = \mathfrak{A}.\mathfrak{a} + \mathfrak{B}.\mathfrak{b} + \mathfrak{C}.\mathfrak{c}$ în care vectorii $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ resp. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sunt necomplanari.

Formând vectorul $\Theta\bar{n} = \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_c)\bar{n}$ obţinem

$$\Theta\bar{n} = \tfrac{1}{2}\left[\bar{n}\{[\mathfrak{A}\mathfrak{a}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{C}\mathfrak{c}]\}\right].$$

Introducând vectorul $v = \frac{1}{2}\{[\mathfrak{a}\mathfrak{A}][\mathfrak{b}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{c}\mathfrak{C}]\}$, denumit după GIBBS şi SCHOUTEN vectorul afinorului Φ, rezultă $\Theta\bar{n} = [v\bar{n}]$ de unde ducem că vectorul $\Theta\bar{n}$ se găseşte întotdeauna într'un plan perpendicular pe vectorul v. Vectorul v e determinat când afinorul Φ e cunoscut.

După F. EMDE numim vectorul $-2v$ turborul afinorului Φ.

Avem

$$tb\,\Phi = -2v = \{[\mathfrak{A}\mathfrak{a}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{C}\mathfrak{c}]\}.$$

Aşa dar

$$\underline{tb\,\Phi} = -\underline{2v} = -2ax\,\Phi = -2\Theta = \Phi_c - \Phi.$$

Ţinând seamă de condiţia tensorului $T = T_c$ adică reprezintă un afinor simetric, rezultă că, introducând vectorii m', n' p' conjugaţi ai vectorilor unitari necomplanari $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ se obţine $T = m'.\bar{m} + n'.\bar{n} + p'.p$ pe care îl numim: tensor unitar, deoarece avem $T\bar{n} = \bar{n}$.

In cazul când vectorii unitari necomplanari devin şi ortogonali cum sunt spre ex.: i, j, k tensorul unitar ia forma

$$I = i.i + j.j + k.k.$$

Orice afinor de forma

$$T = \mathfrak{a}'.\mathfrak{a} + \mathfrak{b}'.\mathfrak{b} + \mathfrak{c}'.\mathfrak{c} \quad \text{sau} \quad T = A\mathfrak{a}.\mathfrak{a} + B\mathfrak{b}.\mathfrak{b} + C\mathfrak{c}.\mathfrak{c}$$

reprezintă un tensor.

Se constată uşor că $ax\,T = \underline{v} = 0$, pentrucă:

$$v = \tfrac{1}{2}\{[\mathfrak{a}'\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}'\mathfrak{b}] + [\mathfrak{c}'\mathfrak{c}]\} = 0$$

sau

$$v = \tfrac{1}{2}\{A[\mathfrak{a}\mathfrak{a}] + B[\mathfrak{b}\mathfrak{b}] + C[\mathfrak{c}\mathfrak{c}]\} = 0.$$

Prin $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ înţelegem vectorii conjugaţi ai vectorilor $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

$$\mathfrak{a}' = \frac{[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]}{(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}])} \quad ; \quad \mathfrak{b}' = \frac{[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]}{(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}])} \quad ; \quad \mathfrak{c}' = \frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]}{(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}])}.$$

Cu următorul exerciţiu încheiem paragraful funcţiunilor vectoriale lineare de vectori. Cunoscându-se un afinor Φ exprimat prin vectorii unitari i, j, k să se arate când acel afinor reprezintă un tensor ?

Fie

$$\Phi = i.\{X_x\, i + X_y\, j + X_z\, k\} + j.\{Y_x\, i + Y_y\, j + Y_z k\} + k.\{Z_x\, i + Z_y\, j + Z_z\, k\}.$$

Afinorul e simetric adică devine un tensor atunci când avem:

$$ax\Phi = \underline{v} = 0.$$

Ori vectorul afinorului v e nul, în cazul când următoarele egalităţi sunt satisfăcute:

$$[j\,i]\,X_y - [i\,j]\,Y_x = 0 \;;\; [k\,i]\,X_z + [i\,k]\,Z_x = 0 \;;\; [k\,j]\,Y_z + [j\,k]\,Z_y = 0$$

de unde rezultă

$$X_y = Y_x \;;\; X_z = Z_x \;;\; Y_z = Z_y .$$

Câteva elemente de analiză afinoreală.

Ţinându-ne de regulile calculului diferenţial obţinem:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}.\mathfrak{B} = \frac{d\mathcal{A}}{dt}.\mathfrak{B} + \mathcal{A}.\frac{d\mathfrak{B}}{dt} \;;\; \frac{d}{dt}\underline{\mathcal{A}} = \frac{d\mathcal{A}}{\underline{dt}}$$

$$\frac{d}{dt}(\Phi\Psi) = \frac{d\Phi}{dt}\Psi + \Phi\frac{d\Psi}{dt} \;;\; \frac{d}{dt}\Phi^2 = \frac{d\Phi}{dt}\Phi + \Phi\frac{d\Phi}{dt} = 2\Phi\frac{d\Phi}{dt}.$$

Expresia $\nabla.\mathfrak{F}$ e denumit afinorul nabla.

Punând:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \;;\; \mathfrak{F} = F_x\, i + F_y\, j + F_z\, k$$

Obţinem:

$$\nabla.\mathfrak{F} = i.\left\{\frac{\partial F_x}{\partial x}i + \frac{\partial F_y}{\partial x}j + \frac{\partial F_z}{\partial x}k\right\} + j.\left\{\frac{\partial F_x}{\partial y}i + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F_y}{\partial y}j + \frac{\partial F_z}{\partial y}k\right\} + k.\left\{\frac{\partial F_x}{\partial z}i + \frac{\partial F_y}{\partial z}j + \frac{\partial F_z}{\partial z}k\right\}$$

sau

$$\nabla.\mathfrak{F} = \nabla.\{F_x\, i + F_y\, j + F_z\, k\} = \nabla F_x.i + \nabla F_y.j + \nabla F_z.k.$$

Derivata de direcţie $(d_r \nabla)\mathfrak{F}$ se poate exprima prin afinorul nabla în felul următor:

$$(d_r \nabla)\mathfrak{F} = d_r \{ \nabla . \mathfrak{F} \}.$$

Conjugatul afinorului nabla: $(\nabla . \mathfrak{F})_c$.

Avem:

$$\bar{n}(\nabla . \mathfrak{F})_c = (\nabla . \mathfrak{F})\bar{n} = \nabla (\mathfrak{F}\bar{n}) = \bar{n}\{ \nabla . \mathfrak{F} + \underline{\text{rot}\, \mathfrak{F}}\}$$

de unde rezultă:

$$(\nabla . \mathfrak{F})_c = \nabla . \mathfrak{F} + \underline{\text{rot}\, \mathfrak{F}}.$$

Se mai poate exprima $(\nabla . \mathfrak{F})_c$ şi în felul următor:

$$(\nabla . \mathfrak{F})_c = \mathfrak{F} . \overleftarrow{\nabla} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} . i + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} . j + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} . k = i . \nabla F_x + j . \nabla F_y + k . \nabla F_z .$$

Descompunerea afinorului $\nabla . \mathfrak{F}$ *în componentele sale.*

$$\nabla . \mathfrak{F} + ts(\nabla . \mathfrak{F}) + ax(\nabla . \mathfrak{F})$$

în care

$$ts(\nabla . \mathfrak{F}) = \tfrac{1}{2}\{ \nabla . \mathfrak{F} + (\nabla . \mathfrak{F})_c \} = \nabla . \mathfrak{F} + \tfrac{1}{2}\underline{\text{rot}\, \mathfrak{F}}$$

$$ax(\nabla . \mathfrak{F}) = \tfrac{1}{2}\{ \nabla . \mathfrak{F} - (\nabla . \mathfrak{F})_c \} = -\tfrac{1}{2}\underline{\text{rot}\, \mathfrak{F}}$$

$$ax(\nabla . \mathfrak{F})_c = \tfrac{1}{2}\underline{\text{rot}\, \mathfrak{F}}.$$

Utilizând regulile analizei vectoriale şi în cazul afinorilor admitem prin definiţie:

$$\int d\sigma \nabla \Phi = \int d_\sigma \Phi \qquad \int d_\sigma \underline{\nabla} \Phi = \oint d\ell \, \Phi$$

$$\int d\sigma \underline{\nabla} \Phi = \int \underline{d_\sigma} \Phi \qquad \int d\sigma \nabla . \mathfrak{F} = \int d_\sigma \mathfrak{F}$$

$$\int d_\sigma \underline{\nabla}\, \underline{\mathfrak{F}} = \oint d\ell \, \underline{\mathfrak{F}} \qquad \int d_\sigma \underline{\nabla} . \mathfrak{F} = \oint d\ell . \mathfrak{F}.$$

Expresia $\nabla \Phi$ care apare în primul integral e denumită după R. GANS divergenţa afinorului, iar după F. EMDE tractorul afinorului şi se mai notează prin $tr\,\Phi$.

Tractorul afinorului reprezintă un vector care în general se reprezintă printr'o sumă de doi vectori: unul potenţial şi celălalt solenoidal.

Tractorul unui axiator $\underline{\mathfrak{F}}$ ia forma: $\nabla \underline{\mathfrak{F}} = \text{rot}\mathfrak{F}$ adică reprezintă un vector solenoidal, deoarece $(\nabla \text{ rot } \mathfrak{F}) = (\nabla [\nabla \mathfrak{F}]) = 0$.

Primul integral din şirul de mai sus, se utilizează spre exemplu, la determinarea forţelor superficiale care acţionează pe suprafaţa corpurilor electrizate sau magnetizate.

Exprimând prin $n\Phi$ forţa care acţionează pe unitatea de suprafaţă a unui corp, atunci $\nabla\Phi$ va reprezenta forţa care acţionează pe unitatea de volum a acelui corp.

Calculul afinorial apare în deosebi în acele probleme care se ocupă cu deformarea materiei. Datorită deformaţiei materiei, are loc transmiterea prin ea a lucrului mecanic. Intr'un astfel de caz, apare în materie un câmp vectorial, al cărui vector reprezintă lucrul mecanic care se transmite în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă.

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.

MIŞCAREA CORPURILOR IN MEDII REZISTENTE DE DENSITATE VARIABILĂ

Imi propun în cele de mai jos să studiez mişcarea *unui corp material lăsat liber să cadă într'un mediu rezistent a cărui densitate variază liniar.*

*

Fie O poziţia iniţială a centrului de greutate al corpului şi Ox o verticală descendentă la care vom raporta mişcarea.

Insemnând cu P greutatea corpului, cu G acceleraţia gravităţei, cu F subpresiunea şi cu R rezistenţa mediului, obţinem aplicând ecuaţiunea generală a mecanicei:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X$$

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = P - F \mp R. \qquad (1)$$

In această expresiune R s'a considerat pozitiv, *semnul superior corespunzând mişcării de coborâre a corpului, iar semnul superior mişcării lui de urcare.*

Variația densității mediului fiind liniară forța de subpresiune F este de forma:

$$F = P(\alpha + \beta x)$$

α și β fiind două constante.

Presupunând rezistența R a mediului *depinzând numai de iuțeala v* putem lua:

$$R = k\frac{P}{g}f(v) = k\frac{P}{g}f\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

k fiind o constantă, iar $f(v)$ o funcțiune oarecare în v.

Rezultă:

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = P - P(\alpha + \beta x) \mp k\frac{P}{g}f\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

sau:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \pm kf\left(\frac{dx}{dt}\right) + \beta g x - g(1-\alpha) = 0. \qquad (2)$$

Schimbând origina axei Ox în O_1 astfel încât:

$$OO_1 = \frac{1-\alpha}{\beta}$$

și notând cu u noile coordonate avem:

$$x = u + \frac{1-\alpha}{\beta}.$$

Introducând această valoare în (2) obținem:

$$\frac{d^2u}{dt^2} \pm kf\left(\frac{du}{dt}\right) + pu = 0 \qquad (3)$$

în care: $$p = \beta g.$$

Ecuațiunea (3) reprezintă în general cazul cunoscut al unei *mișcări oscilatorii amortizate*, termenii extremi reprezentând o oscilație simplă armonică, iar termenul central fiind elementul ce produce amortizarea.

Oscilația are loc în jurul lui O_1 *punct important în care corpul lăsat fără iuțeală inițială rămâne în repaos.* In adevăr în această poziție forțele ce acționează corpul se echilibrează:

$$P - F - R = 0$$

deoarece $R = 0$ $(v = 0)$, iar $P = F$ pentru $x = \frac{1-\alpha}{\beta}$.

Imi propun în cele ce urmează să studiez ecuaţiunea (3) pentru următoarele cazuri clasice:

a) $$f(v) = v = \frac{du}{dt}$$

b) $$f(v) = v^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

In cazul *a*, dublul semn al lui R este conţinut în însăşi expresiunea lui, $k\frac{P}{g} \cdot v$ astfel încât ecuaţiunea studiată prezintă o singură formă:

$$\frac{d^2u}{dt} + k\frac{du}{dt} + pu = 0.$$

Prin integrare se obţine:

1) pentru $\frac{k^2}{4} - p < 0$ $\quad u = Ae^{-\frac{k}{2}t}\cos\left(t\sqrt{p - \frac{k^2}{2}} + \delta\right)$

(mişcare oscilatorie amortizată periodică)

2) pentru $\frac{k^2}{4} - p > 0$ $\quad u = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t}$

(mişcare aperiodică)

$$r_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - p}$$

3) pentru $\frac{k^2}{4} - p = 0$ $\quad u = (A_1 + A_2t)\,e^{-\frac{k}{2}t}$

(mişcare aperiodică limită)

A, δ, A_1 şi A_2 sunt constante ce depind numai de condiţiunile iniţiale ale mişcării.

Corpul studiat poate prin urmare *sau să oscileze efectiv în jurul poziţiei sale de echilibru* O_1 (primul caz) *sau să coboare printr'o mişcare foarte lentă către* O_1 (cazul al doilea şi al treilea).

In ipoteza *b*, ecuaţiunea (3) îşi păstrează ambele semne:

$$\frac{d^2u}{dt^2} \pm k\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + pu = 0 \qquad (4)$$

semnul superior corespunzând mişcării de coborâre, cel inferior mişcării de urcare după cum am menţionat de altfel în prima parte a acestui articol.

Integrând odată această ecuaţiune se obţine:

$$\frac{du}{dt} = \pm \sqrt{\frac{p}{2k^2}(1 \mp 2ku + Ce^{\mp 2ku})}$$

în care C este constanta de integrare; pentru semne s'a păstrat convenţiunea făcută mai sus.

Determinarea constantei C se face ţinând seama că la începutul primei coborâri pentru

$$u = -u_0 = -\frac{1-\alpha}{\beta} \quad ; \quad \frac{du}{dt} = 0.$$

Rezultă:

$$1 + 2ku_0 + Ce^{2ku_0} = 0.$$

De unde:

$$C = -(1 + 2ku_0)\, e^{-2ku_0}$$

ecuaţiunea primei coborâri va fi:

$$\frac{du}{dt} = + \sqrt{\frac{p}{2k^2}[1 - 2ku - (1 + 2ku_0)\, e^{-2k(u_0+u)}]}$$

Mişcarea de coborâre se sfârşeşte în poziţia $u = u_1$ în care iuţeala mobilului se anulează:

$$1 - 2ku_1 - (1 + 2ku_0)\, e^{-2k(u_0+u_1)} = 0.$$

Obţinem astfel o ecuaţiune în u_1. Prin aplicarea logaritmilor această ecuaţiune se poate pune sub forma:

$$\log(1 - 2ku_1) + 2ku_1 = \log(1 + 2ku_0) - 2ku_0. \qquad (5)$$

Odată mişcarea de coborâre terminată mobilul se urcă, mişcarea lui ascendentă fiind dată de ecuaţiunea:

$$\frac{du}{dt} = - \sqrt{\frac{p}{2k^2}[1 + 2ku + C_1 e^{+2ku}]}.$$

Determinarea constantei de integrare C_1 o facem ca şi pentru C ţinând seama de condiţiunile iniţiale ale acestei mişcări adică pentru

$$u = u_1 \quad ; \quad \frac{du}{dt} = 0.$$

Rezultă:

$$C_1 = -(1 + 2ku_1)\, e^{-2ku_1}$$

Ecuaţiunea primei urcări a corpului va fi:

$$\frac{du}{dt} = -\sqrt{\frac{p}{2k^2}[1 + 2ku - (1 + 2ku_1)^{-2k(u_1-u)}]}.$$

Mişcarea ascendentă se sfârşeşte în poziţia $u = -u_2$ în care iuţeala mobilului este nulă.

Se obţine astfel ecuaţiunea:

$$1 - 2ku_2 - (1 + 2ku_1)\, e^{-2k(u_1+u_2)} = 0.$$

Sau:

$$\log(1 - 2ku_2) + 2ku_2 = \log(1 + 2ku_1) - 2ku_1 \qquad (6)$$

rezultat absolut analog celui găsit din studiul primei mişcări descendente.

Ulterior mişcarea este continuată prin a doua coborâre a corpului urmată de a doua urcare etc. ale căror elemente se determină identic cazurilor examinate mai sus.

Corpul prin urmare oscilează în jurul poziţiei sale de echilibru O_1.

Ipoteza *b* a acestei note rezolvă problema 3608 a D-lui Ing. OCTAV ORĂNESCU.

Pentru datele acestei probleme:

$$P = Vdg \quad ; \quad F = V\left[a + (b - a)\frac{z}{i}\right]g \quad ; \quad R = k_1\pi r^2 v^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Subpresiunea F este calculată pentru moment când centrul sferei se găseşte la adâncimea *z* sub nivelul apei; valoarea acestei subpresiuni se obţine ţinând seama de simetria corpului scufundat faţă de un plan orizontal ce trece prin centrul de greutate.

Conchidem pe aceste consideraţiuni că *subpresiunea va fi egală cu volumul înmulţit cu greutatea specifică a lichidului din dreptul centrului sferei.*

Ecuaţiunea mişcării va fi:

$$Vd\frac{d^2z}{dt^2} = P - F \mp R = Vdg - V\left[a + (b-a)\frac{z}{i}\right]g \mp k_1\pi r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

Sau:

$$\frac{dz^2}{dt_2} = g\left(1 - \frac{a}{d} - \frac{b-a}{d\,.\,i}z\right) \mp \frac{3k_1}{4rd}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Luând:

$$z = u + \frac{(d-a)\,i}{b-a} \quad ; \quad k = \frac{3k_1}{4rd} \quad ; \quad p = g\frac{b-a}{di}$$

obţinem:

$$\frac{d^2u}{dt^2} \pm k\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + pu = 0$$

adică tocmai ecuaţiunea (4) studiată.

In cazul aplicaţiunii [1]):

$$k = \frac{3 \times 32}{4 \times 0{,}5 \times 1400} \times 9{,}81 = 0{,}336342$$

$$p = \frac{9{,}81\,(1600-1000)}{1400 \times 30} = 0{,}1401428.$$

Poziţia de echilibru a sferei este dată pentru $u = 0$ când:

$$z = U_0 = \frac{(d-a)\,i}{b-a} = \frac{(1400-1000)\,30}{1600-1000} = 20\text{ m}$$

măsuraţi sub nivelul apei.

In prima coborâre sfera se opreşte în poziţia dată de ecuaţia (5):

$$\log(1-0{,}672684u_1) + 0{,}672684u_1 = \log 14{,}45368 - 13{,}45368$$

cu soluţia: $u_1 = 1{,}486$ m.

Prin urmare sfera se coboară până la cota $20+1{,}486=21{,}486$ m sub nivelul apei.

Din acest moment sfera se ridică până la înălţimea dată de ecuaţia (6):

$$\log(1-0{,}672684u_2) + 0{,}672684u_2 = \log(1 + 0{,}672684 \times 1{,}486) - 0{,}672684 \times 1{,}486$$

cu soluţia $u_2 = 0{,}88$ m.

Ridicarea se face deci până la cota $20 - 0{,}88 = 19{,}12$ m.

Din această poziţie sfera coboară din nou.

Rezolvând ecuaţiunea corespunzătoare:

$$\log(1-0{,}672864u_3) + 0{,}672864u_3 = \log(1 + 0{,}672864 \times 0{,}88) - 0{,}672864 \times 0{,}88$$

obţinem soluţia $u_3 = 0{,}63$ m.

---

1) In problema 3608 se exprimă datele numerice în sistemul technic; observăm prin urmare că valorile date pentru a, b şi d sunt greutăţi specifice nu densităţi.

Prin urmare coborârea a doua se face până la $20+0{,}63=20{,}63$ m adâncime în lichid.

In acest mod se poate continua oricât studiul oscilaţiunilor sferei date în jurul poziţiei sale de echilibru.

Problema D-lui OCTAV ORĂNESCU admite o discuţie interesantă de o mare extindere. Spaţiul restrâns ne sileşte în a prezenta numai următorul tablou:

$d < a + (b-a)\frac{r}{i}$ — sfera se ridică ieşind din lichid; coeficientul de proporţionalitate al rezistenţei la înaintare este în acest caz variabil deoarece mişcarea se face în două medii diferite.

$d = a + (b-a)\frac{r}{i}$ — sfera rămâne în repaos în poziţia iniţială dată.

$b - \frac{r}{i}(b-a) > d > a + (b-a)\frac{r}{i}$ — sfera oscilează căutând *să se stabilizeze în lichid* la o anumită adâncime în poziţie de echilibru.

In cazul:

$$u_0 + u_1 > i - r$$

oscilaţiunile sunt însoţite de *percusiuni* între sferă şi fundul basinului, cel puţin la începutul mişcării.

$d > b - \frac{r}{i}(b-a)$ — sfera oscilează căutând să se aşeze *pe fundul bazinului.*

Percusiunile însoţesc tot timpul oscilaţiunile.

Problema studiată în acest articol poate fi complectată prin soluţionarea cazului important când *presupunem rezistenţa mediului drept o funcţiune de iuţeală şi densitate;* în acest caz intervin greutăţi în rezolvarea ecuaţiunii diferenţiale a mişcării. Vom reveni poate cu o altă ocaziune.

ALEXANDRU STOENESCU.

CURBURA MIJLOCIE ŞI LINIILE ASIMPTOTICE

La courbure moyenne est égale au produit de la torsion d'une ligne asymptotique par la contangente de l'angle de ces lignes.

Este bine cunoscut teoremul lui ENNEPER, care arată că în fiecare punct curbura totală a unei suprafeţe este egală şi de semn contrariu cu patratul torsiunei uneia oarecare din liniile asimptotice. Aci arătăm că curbura mijlocie în fiecare punct este egală cu produsul torsiunei unei linii asimptotice prin cotangenta unghiului dintre aceste linii.

Din formula lui EULER

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

rezultă că, deoarece pentru direcţiile asimptotice $1 : R = 0$,

$$\operatorname{tg}\omega = \pm \sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$$

unde 2ω e unghiul celor două direcţii asimptotice. Dar

$$\operatorname{tg}^2 2\omega = \frac{4\operatorname{tg}^2\omega}{(1-\operatorname{tg}^2\omega)^2} = \frac{-4\dfrac{R_2}{R_1}}{\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2} = -\frac{4R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} = -\frac{k}{H^2}$$

şi ţinând socoteală de teoremul lui ENNEPER, care spune că

$$k = -\frac{1}{T^2}$$

obţinem ceea ce voiam a demonstra

$$H = \pm \frac{\operatorname{cotg} 2\omega}{T}.$$

A. MYLLER.

RELAȚIUNI METRICE IN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Pornind dela câteva considerațiuni simple, voi da în cele ce urmează, o serie de formule și relațiuni generale în geometria triunghiului, completate cu unele aplicațiuni.

Fie ABC triunghiul fundamental, M și P două puncte în planul său, de coordonate tripolare (p, q, r) și (l, m, n).

Se cunoaște ecuația generală a unui cerc de centru M și rază ρ:

$$F/\delta = \Sigma (p^2 - \rho^2)\alpha \tag{1}$$

unde:

$$F = \Sigma a^2\beta\gamma \ , \ \delta = \Sigma\alpha.$$

Ecuația cercului ortogonal cercurilor de centre A, B, C și raze λ, μ, ν va fi:

$$F/\delta = \Sigma\lambda^2\alpha. \tag{2}$$

Centrul său va fi centrul radical al celor trei cercuri, din cari cel corespunzător vârfului A, este:

$$F/\delta = -\lambda^2\alpha + (c^2 - \lambda^2)\beta + (b^2 - \lambda^2)\gamma. \tag{3}$$

Găsim deci coordonatele centrului cercului general dela (2):

$$\left|\begin{array}{l} \alpha = -2a^2\lambda^2 + (a^2+b^2-c^2)\mu^2 + (a^2-b^2+c^2)\nu^2 + a^2(-a^2+b^2+c^2) \\ \beta = (a^2+b^2-c^2)\lambda^2 - 2b^2\mu^2 + (-a^2+b^2+c^2)\nu^2 + b^2(a^2-b^2+c^2) \\ \gamma = (a^2-b^2+c^2)\lambda^2 + (-a^2+b^2+c^2)\mu^2 - 2c^2\nu^2 + c^2(a^2+b^2-c^2). \end{array}\right. \tag{4}$$

Din relația:

$$\rho^2 = \overline{AM}^2 - \lambda^2,$$

unde:

$$\overline{AM}^2 = (\beta c^2 + \gamma b^2)(\beta + \gamma) - \beta\gamma a^2 (\Sigma\alpha)^2$$

se deduce raza cercului general dela (2):

$$\left\{\begin{array}{l} 16S^2\rho^2 = \Sigma a^2\lambda^4 - \Sigma(-a^2+b^2+c^2)\mu^2\nu^2 - \\ -\Sigma a^2(-a^2+b^2+c^2)\lambda^2 + a^2b^2c^2. \end{array}\right. \tag{5}$$

Formulele (4) și (5) nu le-am găsit menționate nicăieri; ele pot fi întrebuințate cu folos în cazurile indicate.

Dacă $\lambda = p$, $\mu = q$, $\nu = r$, cercul (2) se reduce la punctul M. Cu alte cuvinte, coordonatele baricentrice ale unui punct în funcţie de coordonatele sale tripolare, sunt date de (4). In acest caz raza ρ este egală cu zero. Aşa dar:

Distanţele unui punct M *la vârfurile unui triunghiu* ABC *sunt legate de relaţia:*

$$(6)\quad \begin{cases} \Sigma a^2 p^4 - \Sigma(-a^2+b^2+c^2)\,q^2r^2 - \\ -\Sigma a^2(-a^2+b^2+c^2)\,p^2 + a^2b^2c^2 = 0 \end{cases}$$

care se mai scrie:

$$(6')\quad \begin{cases} \Sigma(-a^2+b^2+c^2)(q^2-r^2)^2 - \\ -2\Sigma(-a^2+b^2+c^2)\,p^2 + 2a^2b^2c^2 = 0 \end{cases}$$

sau:

$$(6'')\quad \begin{cases} \Sigma a^2(r^2-p^2)(p^2-q^2) + \\ +\Sigma a^2(-a^2+b^2+c^2)\,p^2 - a^2b^2c^2 = 0 \end{cases}$$

unde:

$$MA = p \quad , \quad MB = q \quad , \quad MC = r.$$

Formulele (6) constitue generalizarea teoremei lui STEWART, pentru cazul în care cele trei puncte nu sunt colineare. Ele leagă distanţele dintre patru puncte luate două câte două. Făcând deci schimbările de notaţii cuvenite, putem enunţa:

Intre laturile a, b, c, d *şi diagonalele* e, f *ale unui patrulater oarecare* (e *uneşte intersecţia* a, d *cu* b, c) *avem relaţia generală:*

$$(7)\quad \begin{cases} e^2f^2(a^2+b^2+c+d^2-e^2-f^2)+e^2(b^2-c^2)(d^2-a^2)+ \\ +f^2(c^2-d^2)(a^2-b^2)-(a^2-b^2+c^2-d^2)(a^2c^2-b^2d^2)=0 \end{cases}$$

formulă ce pare a fi inedită.

Trecem mai departe. Se cunoaşte formula care dă distanţa dintre două puncte:

$$(8)\qquad \overline{MP}^2 = \frac{\Sigma\alpha l^2}{\Sigma\alpha} - \frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{(\Sigma\alpha)^2}$$

unde (α, β, γ) şi (l, m, n) sunt coordonatele baricentrice şi tripolare ale punctelor M şi P.

Inlocuind pe α, β, γ cu valorile date de (4), unde am făcut

$$\lambda = p \quad , \quad \mu = q \quad , \quad \nu = r,$$

găsim

$$(9) \quad \begin{cases} 16S^2 \overline{MP}^2 = -\Sigma a^2 [(r^2 - p^2) - \\ -(n^2 - l^2)][(p^2 - q^2) - (l^2 - m^2)] \end{cases}$$

sau, ţinând seama de (6):

$$(9') \quad \begin{cases} 16S^2 \overline{MP}^2 = -\Sigma (-a^2+b^2+c^2)(q^2-r^2)(m^2-n^2)+ \\ +\Sigma a^2 (-a^2+b^2+c^2)(p^2+l^2) - 2a^2b^2c^2 \end{cases}$$

formulă care dă distanţa între două puncte, în funcţie de distanţele acestora la vârfurile unui triunghiu. Sau, în ultimă instanţă, *relaţia dintre laturile şi diagonalele unui pentagon oarecare.*

Inlocuindu-se $16S^2$ cu valoarea sa în funcţie de laturile *a, b, c,* formula (9) se poate scrie simetrică în raport cu laturile şi diagonalele pentagonului.

Cazuri particulare:

$P \equiv 0$ centrul cercului circumscris:

$$(10) \quad 16S^2(\overline{MO}^2 + R^2) = \Sigma a^2 (-a^2 + b^2 + c^2) \overline{MA}^2.$$

Dacă M e pe cercul circumscris ABC ($\overline{MO} = R$),

$$(11) \quad \Sigma a^2 (-a^2 + b^2 + c^2) \overline{MA}^2 = 2a^2b^2c^2,$$

Ecuaţia tripolară a cercului ABC, care se mai poate scrie:

$$(11') \quad \Sigma \overline{AM}^2 \sin 2A = 4S.$$

Să trecem la o serie de aplicaţiuni ale formulei (6):

Fie (λ), (μ), (ν) cercurile descrise din A, B, C, centre şi λ, μ, ν, raze. Voi determina raza cercului tangent în exteriorul său celor trei cercuri. Fie M centrul său. Scriem:

$$p = \rho + \lambda \quad , \quad q = \rho + \mu \quad , \quad r = \rho + \nu.$$

Inlocuesc în (6) şi ordonând după puterile lui ρ, am ecuaţia:

$$(12) \quad 4X\rho^2 + 2Y\rho - Z = 0$$

unde:

$$(13) \quad \begin{cases} X = 4S^2 + \Sigma a^2 (\nu - \lambda)(\lambda - \mu) \\ Y = \Sigma a^2 (-a^2 + b^2 + c^2)\lambda - \Sigma (-a^2 + b^2 + c^2)(\mu + \nu)(\mu - \nu)^2 \\ Z = \Sigma a^2 (\nu^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \mu^2) + \Sigma a^2 (-a^2 + b^2 + c^2)\lambda^2 - a^2 b^2 c^2. \end{cases}$$

Pentru cercul (ρ'), tangent în interiorul său celor trei cercuri, scriem: $p = \rho' - \lambda$, etc., şi ecuaţia va fi:

$$4X\rho^2 - 2Y\rho - Z = 0 \tag{14}$$

care va da pentru ρ' rădăcina 2-a cu semnul schimbat.

Pentru cercul (ρ_a), tangent în interiorul său lui (λ) şi în exteriorul său celorlalte două cercuri, vom scrie:

$$p = \rho_a - \lambda \quad , \quad q = \rho_a + \mu \quad , \quad r = \rho_a + \nu,$$

iar pentru (ρ'_a):

$$p = \rho'_a + \lambda \quad , \quad q = \rho'_a - \mu \quad , \quad r = \rho'_a - \nu.$$

Din examinarea ecuaţiilor şi rezultatelor de mai sus, scoatem relaţia generală:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \Sigma\left[\frac{1}{\rho_a} - \frac{1}{\rho'_a}\right]. \tag{15}$$

Dacă cercurile (λ), (μ), (ν) trec printr'un acelaşi punct adică, dacă λ, μ, ν, verifică relaţia (6), ecuaţia (14) se reduce la:

$$2X\rho = Y \tag{16}$$

care dă valoarea razei cercului tangent în interiorul său la trei cercuri concurente.

Dacă în ecuaţia (12) facem:

$$X = 0 \quad , \quad \rho = \infty,$$

cu alte cuvinte:

Distanţele λ, μ, ν, dela vârfurile unui triunghiu la o dreaptă din planul său, sunt legate de relaţia:

$$\Sigma a^2 (\nu - \lambda)(\lambda - \mu) + 4S^2 = 0. \tag{17}$$

Să aplicăm rezultatele găsite la câteva cazuri particulare: Fie:

$$\lambda = a \quad , \quad \mu = b \quad , \quad \nu = c.$$

Găsim, după ce am făcut toate calculele:

$$\begin{aligned} X &= 4r^2[4p^2 - (4R + r)^2] \\ Y &= 32pr^2[2p^2 - (2R + r)(4R + r)] \\ Z &= -64p^2r^2[p^2 - (2R + r)^2]. \end{aligned} \tag{18}$$

Discriminantul ecuației (12) este: $\delta = 32^2 p^4 r^6$, iar:

$$(19) \quad \left| \rho = \frac{2p\,(p - 2R - r)}{2p - 4R - r}, \quad \rho' = \frac{2p\,(p + 2R + r)}{2p + 4R + 2}. \right.$$

Mai departe:

$$(20) \quad \left| \begin{aligned} \rho_a &= \frac{2(p-a)[(p-a) + 2R - r_a]}{2(p-a) + 4R - r_a}, \\ \rho'_a &= \frac{2(p-a)[(p-a) - 2R + r_a]}{-2(p-a) + 4R - r_a}. \end{aligned} \right.$$

Se deduc ușor analoagele lor ρ_b, ρ'_b, ρ_c, ρ'_c.

Rezultatele de mai sus sunt date pe cale directă în *Mathesis*, XXII, 66.

Pentru $a = b + c$, punctele A, B, C, sunt colineare și obținem rezultatele la cari ajunge D-l V. THÉBAULT în G. M., vol. XXXVIII, 403.

Un alt caz particular remarcabil se întâlnește pentru:

$$\lambda = p - a \quad , \quad \mu = p - b \quad , \quad \nu = p - c,$$

când cele trei cercuri (λ), (μ), (ν) sunt tangente două câte două. Astfel fiind, avem:

$$(21) \quad \left| \begin{aligned} X &= 4r^2[4p^2 - (4R + r)^2] \\ Y &= 16pr^3(4R + r) \\ Z &= 16p^2r^4. \end{aligned} \right.$$

De unde:

$$(22) \quad \left| \rho = \frac{S}{2p + 4R + r}, \quad \rho' = \frac{S}{2p - (4R + r)}. \right.$$

Restul de 6 cercuri se confundă cu cercurile (λ), (μ), (ν). Din (22) se scoate:

$$(23) \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{4}{r} \quad \text{și} \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{2(4R + r)}{S}.$$

Coordonatele centrelor celor două cercuri sunt:

$$(24) \quad \left| \begin{aligned} \omega &[r_a + a \quad , \quad r_b + b \quad , \quad r_c + c] \\ \omega' &[r_a - a \quad , \quad r_b - b \quad , \quad r_c - c], \end{aligned} \right.$$

ambele pe dreapta care unește punctul lui GERGONNE cu centrul cercului înscris. Distanța lor este:

$$(25) \qquad \overline{\omega\omega^{2'}} = 16S^2 \frac{(4R+r)^2 - 3p^2}{[(4R+r)^2 - 4p^2]^2}.$$

Dacă facem:

$$\lambda = p \quad , \quad \mu = p - b \quad , \quad \nu = p - c,$$

avem altă grupă de trei cercuri tangente două câte două, corespunzătoare vârfului A.

$$(26) \qquad \rho_a = \frac{S}{2(p-a) + 4R - r_a}, \quad \rho_a' = \frac{S}{-2(p-a) + 4R - r_a}.$$

Analog pentru grupele de cercuri corespunzătoare vârfurilor B și C.

Dacă notăm:

$$p - a = \alpha \quad , \quad p - b = \beta \quad , \quad p - c = \gamma,$$

putem enunța:

Dându-se trei cercuri tangente exterior două câte două, razele cercurilor tritangente acestora sunt:

$$(27) \qquad \rho = \frac{\alpha\beta\gamma}{2\sqrt{\alpha\beta\gamma(\Sigma\alpha) + \Sigma\beta\gamma}}, \quad \rho' = \frac{\alpha\beta\gamma}{2\sqrt{\alpha\beta\gamma(\Sigma\alpha) + \Sigma\beta\gamma}}.$$

In cazul când cercul (α) cuprinde pe (β) și (γ):

$$(28) \qquad \rho_a = \frac{\alpha\beta\gamma}{2\sqrt{\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta-\gamma) - \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}},$$

$$\rho_a' = \frac{\alpha\beta\gamma}{-2\sqrt{\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta-\gamma) - \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}}.$$

Celelalte două cazuri analoage se deduc.

Din examinarea formulelor (19) și 22) se vede că pentru:

$$2p = 4R + r,$$

sau sub o altă formă, pentru:

$$a + b + c = r_a + r_b + r_c,$$

cercurile descrise din A, B, C, ca centre și a, b, c, sau $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ raze, sunt tangente unor drepte.

Se învederează astfel un triunghiu special, în care suma laturilor este egală cu suma razelor cercurilor exînscrise. Existenţa lui se deduce din faptul că oricând se poate construi un grup de trei cercuri tangente între ele două câte două şi tangente unei aceleiaşi drepte.

Prima parte din problema 4363 propusă de D-l Profesor ION IONESCU în G. M. XXXIX, 335, se integrează existenţei acestor triunghiuri.

Intr'adevăr raza cercului tangent cercurilor $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ va fi dată de (22):

$$(30) \qquad \rho = \frac{S}{2p+(4R+r)} = \frac{S'}{4p} = \frac{r}{4}.$$

Dreapta tangentă cercurilor $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$, va fi şi ea:

$$(\Delta) \qquad \Sigma(p-a)\alpha = 0,$$

iar coordonatele centrului cercului respectiv fiind date de (24), distanţa $\omega(\Delta)$ va fi:

$$(31) \qquad d = \frac{2S(p-a)(a+r_a)}{(\Sigma a+\Sigma r_a)\sqrt{\Sigma a^2(a-b)(a-c)}} = \frac{7r}{4}$$

de unde:

$$\rho = 7 \cdot d.$$

Revenim la relaţia generală (6) şi considerăm un triunghiu echilateral $\alpha\beta\gamma$ de latură λ şi M un punct din planul său. Conform unei teoreme a D-lui Profesor D. POMPEIU, cu distanţele lui M la vârfurile triunghiului echilateral $\alpha\beta\gamma$ se poate construi întotdeauna un triunghiu.

Fie a, b, c cele trei distanţe. Inlocuim în (6):

$$a = b = c = \lambda \quad \text{şi apoi} \quad p = a \ , \ q = b \ , \ r = c,$$

avem:

$$(32) \qquad \begin{cases} \lambda^4 - (\Sigma a^2)\lambda^2 + \Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2 = 0 \\ \lambda^2 = 2S(\cot\omega \pm \sqrt{3}) \end{cases}$$

care dă latura triunghiului echilateral în planul căruia există un punct, ale cărui distanţe la cele trei vârfuri sunt egale cu laturile triunghiului dat ABC.

In G. M. XLII, 397 se dă valoarea laturilor celor două triunghiuri echilaterale, nu însă sub forma simetrică de mai sus, care permite în acelaşi timp şi construirea mult mai simplă a acestor lungimi.

După cum se vede, aplicaţiile formulelor stabilite mai sus pot fi multiple. Ne oprim aci, insistând însă asupra faptului că şi coordonatele baricentrice, mânuite cu oarecare îndemânare, pot fi folosite cu succes chiar în chestiuni privind relaţiuni metrice.

ION C. VASILIU.

RAPORTUL COMISIEI PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ „G. ŢIŢEICA"

Comisia, cercetând ultimul volum apărut, a constatat că dintre elevii de liceu, cel a cărui activitate în domeniul Geometriei a fost mai bogată, este D-l PAUL P. DRĂGHICESCU, clasa VIII-a liceul militar Iaşi, care de altfel a mai căpătat acest premiu şi în anul trecut.

D-sa a publicat un articol „Despre poziţia relativă a două puncte din planul unui triunghiu", o notă asupra triunghiurilor S. De asemenea D-sa este rezolvitorul cel mai activ al tuturor problemelor de Geometrie propuse, dând adesea singur soluţii.

Pentru aceste motive, Comisia propune a i se da „Premiul de Geometrie elementară G. Ţiţeica".

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ „G. ŢIŢEICA"

D-ra ŢIŢEICA G., Prof. O. N. ŢINO şi Ing. AL. BUNESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea generală din 18 Februarie 1943.

NOTE MATEMATICE

50. *Asupra Necrologului Profesorului* ANDREI GH. IOACHIMESCU. Luând cunoştinţă, din *Gazeta Matematică*, pag. 433, de telegrama profesorilor Politechnicei din Timişoara, membrii ai *Gazetei Matematice*, trimisă cu ocazia morţii regretatului Ing. A. G. IOACHIMESCU, subsemnatul în aceeaşi calitate de profesor al Politechnicei din Timişoara şi de membru al *Gazetei Matematice*, mă asociez cu totul la conţinutul ei.

GH. TH. GHEORGHIU
Profesor definitiv la Politechnica
din Timişoara.

51. *Asupra problemei 5047.* In soluţia care s'a dat acestei probleme G. M. XLVIII pag. 274, sunt necesare 57 extrageri de rădăcini. In cele ce urmează voi arăta cum se poate micşora cu mult numărul de încercări:

a) Deşi în soluţie s'a pus principiul eliminării numerelor care se divid prin 3, fără a se divide prin 9, s'au strecurat din eroare numerele 2262264, 8868864, 9969969 printre cele 57 rămase.

b) Un principiu de eliminare, care simplifică încercările este şi următorul: *un patrat perfect nu poate fi de forma* $M3+2$. In adevăr *orice număr* poate fi pus sub una din formele: $3m$, $(3m+1)$, $(3m+2)$. Ridicând la patrat observăm că patratul *oricărui număr* trebue să fie ori $M9$ ori $M3+1$.

Cu acest principiu se elimină următoarele 25 numere:

1121129, 1161161, 1161164, 2222225, 2242241, 2242244,

3323321, 3323324, 3383384, 4464464, 4484489, 5545544,

5565569, 6626624, 6646649, 6686681, 6686684, 7727729,

7767761, 7767764, 8848841, 8848844, 9929921, 9929924,

9989984.

c) Din numerele rămase, le divizăm cu 4 pe toate care sunt multipli de 4. Câturile vor trebui să fie şi ele patrate perfecte. Dacă aceste câturi nu vor avea grupul ultimelor două cifre

terminaţie de patrat, numerele respective vor fi eliminate. Astfel se elimină încă 7 numere:

$$1141144 = 4 \times 285286 \; ; \quad 2282284 = 4 \times 570571 \; ;$$
$$5565564 = 4 \times 1391391 \; ; \quad 6666664 = 4 \times 1666666 \; ;$$
$$7727724 = 4 \times 1931931 \; ; \quad 8828824 = 4 \times 2207206 \; ;$$
$$9969964 = 4 \times 2492491.$$

d) Numărui 1121121 divizat de două ori prin 9 ne dă câtul 13841 care este $M3 + 2$, deci nu poate fi patrat perfect. Atunci nici numărul $4484484 = 4 \times 1121121$ nu poate fi patrat.

In total se elimină 37 numere şi rămân numai 20 de încercări.

G. D. S.

52. *Asupra Notei Nr. 49 din G. M., XLVIII.* Soluţia complectă, atât pentru cazul coeficienţilor reali cât şi cazul coeficienţilor imaginari, a fost dată de mine în G. M., XLIV, p. 624.

G. G. CONSTANTINESCU.

53. *Asupra problemei 5399.* Problema 5399, rezolvată la pag. 459 din numărul trecut, pe lângă proprietatea patratului dată în enunţ, poate stabili şi o frumoasă proprietate a triunghiului special care are un unghiu de 45°. Folosind figura dela pag. 460, iată cum enunţ această proprietate:

Fie A'N, C'L, D'M *înălţimile şi* B' *ortocentrul unui triungiu* A'C'D' *care are unghiul* D' *de* 45°. *Paralelele duse din* D' *şi* B' *la* A'C' *şi acelea duse din* A' *şi* C' *la* D'M *formează un patrat înscris în cercul de rază* LN.

Demonstraţia este simplă. Deoarece D' este de 45° rezultă

$$\sphericalangle D'A'N = \sphericalangle D'C'L' = 45^0$$

şi deci

$$\sphericalangle NCB' = 45^0$$

căci patrulaterul NCC'B' este inscriptibil ca având unghiurile B'NC' şi B'CC' drepte. Restul urmează ca la una din soluţiile date problemei 5399.

G-L GH. BUICLIU.

54. *Măsurarea unui arc de meridian în Basarabia în 1852.* Intr'o istorie a ştiinţelor în Polonia am găsit descrisă viaţa astronomului ADAM PRAZMOWSKI, profesor de fizică în 1862—63 la „Şcoala Superioară" din Varşovia. Născut în 1821, asistent la Observatorul din Varşovia în 1839 şi astronom în 1848, el a luat parte la triangulările din Polonia ocupată de Ruşi. *In anul 1852 el a condus expediţia trimisă în Basarabia pentru determinarea arcului de meridian.* Nu cunosc alte date despre această misiune ştiinţifică. Poate că va trebui să se caute în opera lui PRAZMOWSKI, sau în manuscrise rămase în Varşovia, amănunte asupra acestei operaţii geodezice. Poate că în publicaţiile ştiinţifice ruseşti ale epocei să se afle date. In orice caz, aci e un subiect de cercetări de istoria ştiinţei pentru vreun tânăr, atunci când revenirea timpurilor normale va permite acest fel de muncă ştiinţifică.

PRAZMOWSKI a publicat în 1854 un memoriu despre *Erorile personale în observaţiile astronomice*, memoriu foarte lăudat de LE VERRIER şi CH. WOLF. A fost foarte cunoscut prin studiile asupra luminii din protuberanţele solare şi din coroana solară, asupra spectrului cometelor şi al aurorei boreale. In urma revoluţiei poloneze din 1863, PRAZMOWSKI a fugit din Varşovia, stabilindu-se la Paris, unde a condus o fabrică de instrumente optice. A perfecţionat microscopul, heliostatul, heliograful, etc.

P. SERGESCU.

55. *Asupra aceluiaşi arc de meridian din nota precedentă.* Despre meridianul măsurat prin Rusia între *Funglenes*, pe oceanul Glacial şi Ismail pe Dunăre am vorbit şi eu în *Nota Matematică* Nr. 43 din Anul XXXIV pag. 430, unde ceream informaţii despre piramida dela Ismail, prin care se marca capul Sud al cercului de meridian măsurat. Nu am primit niciun răspuns. Profit de Nota D-lui P. SERGESCU, pentru a repeta acea cerere.

I. IONESCU.

56. *Asupra ipocicloidei cu trei puncte de întoarcere.* La pag. 367 din acest volum s'a publicat soluţia problemei 5179, având următorul enunţ: *să se găsească locurile polurilor dreptelor lui* SIMSON *faţă de cercul lui* EULER, şi s'a găsit pentru locul căutat o cubică având în centrul cercului celor nouă puncte, un punct

dublu izolat cu tangente izotrope şi având trei asimptote formând un triunghiu echilateral, înălţimile acestui triunghiu fiind axe de simetrie pentru cubică.

Vreau să dau câteva informaţii bibliografice asupra acestei cubice. Să observăm mai întâi că această cubică fiind transformata ipocicloidei lui STEINER prin polare reciproce faţă de cercul său tritangent, proprietăţile de mai sus se pot deduce din acelea ale ipocicloidei. Intr'adevăr ipocicloida lui STEINER este o quartică de clasa treia, bitangentă dreptei dela infinit în punctele ciclice (B. NIEWENGLOWSKI. *Géom. analytique*, t. II, p. 145). Transformată prin polare reciproce, va deveni o cubică de clasa patra, iar tangenta dublă care este dreapta dela infinit se va transforma într'un punct dublu care va fi centrul cercului celor nouă puncte, tangentele în acest punct fiind transformatele punctelor ciclice, adică dreptele isotrope. Fiecare punct de întoarcere va da prin transformare o tangentă de inflexiune; punctul de inflexiune va corespunde tangentei de rebrusment şi va fi la infinit, căci tangenta de rebrusment trece prin centrul cercului celor nouă puncte. Deci mai putem adăoga: *cubica are trei puncte de inflexiune la infinit.*

Această curbă face parte din clasa de cubice numite „*trifoi*" (trèfles), de MAXIMILIAN MARIE şi care au un punct dublu izolat, trei asimptote reale şi trei puncte de inflexiune la infinit (G. TEIXEIRA. *Courbes spéciales remarquables*, t. I, p. 96 şi 192). Cubica particulară de care ne ocupăm, o fost studiată de G. DE LONGCHAMPS în *Mathésis* t. VIII, 1888, p. 5, arătând că este transformata prin polare reciproce a ipocicloidei lui STEINER, iar din ecuaţia sa polară:

$$\rho \cos 3\theta = a$$

a dedus că este o *trisectoare;* într'adevar dându-se un unghiu α, putem determina un ρ, astfel ca:

$$\rho \cos\alpha = a$$

iar unghiul polar θ, care corespunde razei vectoare ρ, este dat de $\theta = \frac{\alpha}{3}$. Această cubică mai este studiată într'un articol semnat ASTOR, profesor la Facultatea de Ştiinţe din Grenoble şi având ca titlu: „*Sur quelques propriétés des courbes planes unicursales du troisième ordre*", publicat în *Nouvelles Annales de Mathématiques*,

1892. Un alt colaborator al aceleiaşi reviste ANDRÉ CAZAMIAN revine asupra acestui articol, într'o scrisoare către BRISSE, publicată în 1894 la pag. 384 a aceleiaşi reviste şi după ce dă mai multe proprietăţi ale curbei, arătând şi el că este transformata prin polare reciproce a ipocicloidei lui STEINER, propune să fie numită *„trifoi echilateral"* (trèfle équilatéral).

In fine mai găsim *„trifoiul echilateral"* în problema dată în Franţa la „Concours général de Math. spéciales" în 1894, soluţiile date de GILBERT şi PAGÈS fiind publicate în *Revue de Mathématiques spéciales* 1894, t. II, p. 357 şi t. III, p. 12.

E. ARGHIRIADE.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREŞTI

Examenul de admitere în anul I. Octomvrie 1943. Lucrări scrise

Facultăţile de: Construcţii, Electromecanică, Mine şi Metalurgie

Fizica. I. Un corp este fixat, printr'un fir de dimensiuni neglijabile, sub talerul unei balanţe hidrostatice.

Introducem corpul într'un lichid şi stabilim echilibrul.

Ce relaţiune trebuie să existe între coeficientul de dilataţiune a corpului şi coeficientul de dilataţiune a lichidului, pentru ca echilibrul să se menţină, independent de temperatură?

II. Perpendicular pe axul principal al unei lentile convergente subţiri, având o distanţă focală de 30 cm, se aşază la o distanţă de 60 cm, un mic obiect AB. De cealaltă parte a lentilei şi la o distanţă de 70 cm se aşează o oglindă concavă cu raza de 40 cm şi având acelaşi ax principal ca şi lentila.

Să se construiască diferitele imagini ale obiectului AB, indicând în schiţă valorile numerice ale distanţelor lor la lentilă şi ogindă.

III. Telefonul. Generalităţi asupra principalelor sisteme.

Toate chestiunile sunt obligatorii.

Facultatea de Chimie industrială şi Secţia de Cadastru şi Geniu Rural

Fizica. I. Un aliaj de aur şi cupru cântăreşte 300 gr. Afundat complect în apă, suferă o apăsare de jos în sus, de 20 gr.

Care este compoziţia sa cantitativă?

Se consideră 1 cm^3 de apă = 1 gr.

Densitatea aurului este 19,3 iar a cuprului 8,8. Se presupune că la formarea aliajului, n'a avut loc nici contracţiunea nici dilataţiunea volumului.

II. O prismă ABC cu faţa AB argintată, primeşte pe cealaltă faţă AC, o rază de lumină monocromatică a cărei direcţiune este perpendiculară pe faţa argintată.

Să se indice traiectul razei luminoase, şi să se evalueze unghiul pe care îl formează cu normala la ieşirea ei din prismă.

Unghiul prismei A = 30°. Indicele de refracţie $n = \frac{3}{2}$. Se va confunda în calcul unghiurile cu sinusurilor lor, când valoarea acestor unghiuri nu trece de 60°.

III. Despre electroliză şi legile ei.

IV. Lichefacerea gazelor cu exemple de aplicaţiuni.

Se va trata în mod obligatoriu o problemă şi o chestiune de teorie.

Timpul acordat 4 ore.

BIBLIOGRAFIE

Académie roumaine. Bibliographie des travaux scientifiques parus. Bucureşti 1942.

Bulletin de la section scientifique de l'Académie roumaine. Tome XXV, Nr. 1. Bucureşti 1942. Mişcarea unui solid în jurul unui punct fix, de M. GHERMĂNESCU. Asupra unui caz curios de echilibru, de N. VASILESCU KARPEN.

Idem. Nr. 2. Bucureşti 1942. Asupra liniilor asimptotice ale suprafeţelor lui STEINER, de C. P. BOGDAN. Asupra relaţiunilor între parametrele de distribuţie ale suprafeţelor riglate cu generatoare respectiv paralele, de ION CREANGĂ. Asupra unor integrale prime ale ecuaţiilor mişcării sistemelor, de V. VÂLCOVICI.

Idem. Nr. 3. Bucureşti 1942. Asupra curbelor analagmatice, de N. ABRAMESCU. Asupra curburei conice, de I. CREANGĂ.

Idem. Nr. 4. Bucureşti 1942. Asupra timpului propriu în mecanica ondulatorie, de S. ŢIŢEICA..

Idem. Nr. 5. Bucureşti 1943. O lege geometrică, de MAX ZACHARIAS. Asupra hipersuprafeţelor neholonome V_{2P+1}^{2p}, de ST. PETRESCU. Asupra unui nou aparat pentru măsura suprafeţelor: Parcelimetru, de I. CIURILEANU.

Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara. Tome 11. Fasc. 1—2. „Tipografia Românească", 1943. Timişoara. D. POMPEIU: La représentation analytique des polynômes et deux applications. V. ALACI: Fonctions pseudo-homogènes et une nouvelle classe d'équation, D. POMPEIU: Reflexions sur l'arithmétique de l'infini. P. SERGESCU: Sur une proposition de CAYLEY.

M. GHERMĂNESCU: Sur une équation fonctionnelle. V. G. CAVALLARO: Notes sur l'approchée représentation et construction de la série Φ_6. De quelques séries hyperboliques et exponentielles, de séries ayant les nombres transcendents remarquables. TH. ANGHELUȚĂ: Sur une équation fonctionnelle. N. ABRAMESCU: Sur la relation entre les origines de la géométrie cayleyenne et la géométrie sphérique. D. V. IONESCU: Sur certains déterminants déduits du déterminant de WANDERMONDE. V. THÉBAULT: Triangle et tétraèdre. E. ARGHIRIADE: Sur la courbe caractéristique d'une courbe plane ou gauche. V. THÉBAULT: Sur le tranchet D'ARCHIMÈDE. C-deur Dr. Ing. I. LINTEȘ: Notes sur quelques questions techniques concernant les bouches à feu. R. BĂDESCU: Sur le mouvement tautochrone plan. Dr. Ing. R RĂDULEȚ: Elektrische Fehlerströme an feuchten Wänden. Dr. Ing. A. BĂRGLĂZAN: Turațiile și minime posibile în cazul unei stațiuni de pompare date. Dr. Ing. A. BĂRGLĂZAN: Considerațiuni asupra unor FRANCIS realizați și încercați. Prof. Dr. Ing. C. CÂNDEA und N. CRISTODULO: Die Oxydation rumänischer Handelsbenzine. Prof. Dr. Ing. C. CÀNDEA und Dr. L. I. SĂUCIUC: Hydrierung von Erdölrückständen. I. G. MURGULESCU: Über die Einordnung des Begriffes des Aktivität in der Thermodynamik der Lösungen. C. DRĂGULESCU: Die Analyse der Erdalkalydrocarbonathaltigen Mineralwassers von Bencec (Banat).

Deutsche Mathematik. Drittes Beiheft, 1942. TH. VAHLEN: Die Paradoxien der relativen Mechanik.

Gazeta Matematică. Supliment cu exerciții. Anul IX, Nr. 9, 1 Iunie 1943. București.

Pozitiva. Anul III, Nr. 3—5. Noemvrie 1942—Ianuarie 1943. V. MEHEDINCU: Cursul de emisiune și procentul real pentru obligațiunile împrumutului de reîntregire. AND. DOBRESCU: Asupra unei formule a lui LEIBNIZ și unei chestiuni de extremă geometrică. AND. DOBRESCU: O generalizare a formulei lui STEWART referitoare la patru puncte în linie dreaptă. E. V. DOBRESCU: Inegalități într'un triunghiu. V. MUSCELEANU: Notă matematică, valoarea unui determinant. Note, Chestiuni de examen, Bibliografie, Exerciții propuse.

Revista Matematică din Timișoara. An XXIII. Nr. 4, Iunie 1943. Cpt. V. COSTĂCHESCU: Aplicațiuni ale trigonometriei patratice. C. BORȘ: Asupra unui grup ternar de involuții pe o conică. Note matematice, Probleme rezolvate și propuse.

Revista Științifică. „V. ADAMACHI". Vol. XXIV, Nr. 1. Ianuarie—Martie 1943. H. HULUBEI: JEAN PERRIN (1870—1942). PAUL BUJOR: Istoricul laboratorului de morfologie animală de la Universitatea din Iași. P. P. STĂNESCU: Specia și modificările ei. C-TIN POPP: Limita sudică a regiunii holarctice. F. CÂRDEIU: Calul în mitologie și istorie. Dr. MARIA ALEXA. Vitamina B antineuritică. AL. BUIA: Un naturalist năsăudean din secolul XIX-lea ARTEMIU P. ALEXI. G. COSTEANU: Mecanismul reacțiunilor chimice în faza gazoasă. M. SAVUL: ION STĂNESCU, un sprijinitor al culturii românești.

România Aeriană. Anul XVII. Nr. 4. Aprilie 1943. ADR. POPOVICI Sburătorii noştri în războiul sfânt. AL. IONESCU: Meteorologia şi aviaţia. Ing. F. NICULESCU-NICULCEA: C. F. R. şi transporturile aeriene după războiu. LAELIUS POPESCU: Organizarea liniilor aeriene în U. S. A.

Idem. Anul XVII. Nr. 5. Mai 1943. AND. POPOVICIU: Sburătorii noştri în războiul sfânt. Cpt. O. GH. PETRE: Desvoltarea aviaţiei comerciale în timp de războiu. Cpt. CR. PETRESCU: Am trăit minunea sborului. DAN RADIAN: Arme noui. T. BĂLĂŞEL: Aviaţia italiană în lupta contra transporturilor maritime inamice. ST. M. PĂTRU: Pregătirea preaviatică a „Tineretului Hitlerist".

Timocul. Revistă de luptă naţional-culturală. Anul X. Caietul I. 1943.

M. GHERMĂNESCU: Sur quelques équations fonctionnelles linéaires. (Extras din *Bulletin de la Société Mathématique de France*).

M. GHERMĂNESCU: Sur une classe d'équations fonctionnelles du premier ordre. (Extras din *Acta Mathematica*).

M. GHERMĂNESCU. Sur une équation fonctionnelle. (Extras din *Bulletin scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara*).

M. GERMĂNESCU: *Probleme şi propoziţii din Dinamica punctului.* Lucrarea D-lui M. GHERMĂNESCU, profesor la Politehnica din Timişoara, este o „*Culegere de Probleme de Mecanică teoretică şi aplicata*", care începând cu ecuaţiile simple ale mişcării rectilinii, parcurg progresiv diferitele capitole ale Dinamicei până la mişcările cele mai complicate pe o suprafaţă. Volumul are 185 pagini, litografiat şi e compus din 7 capitole:

(1) Mişcarea rectilinie, (2) Forţe paralele, (3) Forţe centrale, (4) Mişcarea plană, (5) Mişcarea în spaţiu, (6) Mişcarea pe o curbă, (7) Mişcarea pe o suprafaţă.

In prima parte se dau enunţurile, iar în a 2-a soluţiile, care în cazurile mai grele sunt desfăşurate în întregime. Multe din rezultate sunt chiar din lucrările autorului.

Este o lucrare foarte interesantă şi utilă pentru cei ce studiază Mecanica, în care se găsesc atât de puţine culegeri de probleme.

Volumul se poate procura la Biblioteca Politehnicei din Timişoara cu preţul de lei 500.

GABRIELA ŢIŢEICA.

C-DOR DR. ING. I. I. LINTEŞ: Teoria indicatorilor. Bucureşti 1943.

OCTAV ONICESCU & GH. MIHOC: Les Chaînes de variables aléatoires. Bucureşti 1943. Vol. IV din Etudes et recherches de l'Académie roumaine.

P. SERGESCU: Despre valoarea etică a ştiinţei. (Extras din „*Luceafărul*").

P. SERGESCU: Extensiunea universitară din Cluj în Banat.

CERERI

321. GHEORGHE-ASACHI. Numele acestui întemeietor al învăţământului ingineriei în Moldova l'am găsit scris când cu un *s*, când cu doi *s*, când cu *ch*, când cu *k*, când cu *i*, când cu *y* la sfârşit, când cu litera cirilică *c* în loc de *s*. Astfel în Ediţia din 1843 (acum 100 de ani) prima pagină este scrisă: *„Elemente | de | Matematică | de Post.* | G. ASAKI. *Măfulare a mai multor Academii.* | Partea I. *Aritmetica.* | *Iaşii. In Institutul Albinei, 1843.* | Prefaţa cărţii poartă data 31 August 1836, în care se spune că această aritmetică este cursul făcut în 1814.

Cum trebuie să scriem numele lui ASACHI? Cum îşi scria el numele? Cum iscălea el?

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

C. ALASIA. Su di un ecuazione differenziale liniare ed omogena. Padua 1906.

Donată de I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Alcuni teoremi sul triangole. Palermo 1910.

Donată de I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE*)

PROBLEMA 2560. *Se aplică, în şapte din vârfurile unui cub, forţe proporţionale cu distanţa acelui vârf la al optulea neconsiderat încă, şi având direcţia perpendiculară pe planul diagonal, care nu conţine vârful considerat, şi îndreptate înafara solidului. Se cere:*

1. *Elementele mecanice care trebuesc aplicate celui de al optulea vârf pentru ca solidul să fie în echilibru.*

2. *Axul central al sistemului celor şapte forţe.*

E. A.

Notă. Problema propusă nu poate fi determinată decât dacă pe lângă *mărime* şi *sens* fiecare din forţe are şi o *direcţie unică perfect determinată;* pentru aceasta, rămânând pe cât posibil în cadrul enunţului şi ţinând seama de *simetria* cubului, rezultă că direcţia fiecărei forţe trebuie să fie după diagonala mare ce trece prin vârful în care este aplicată forţa.

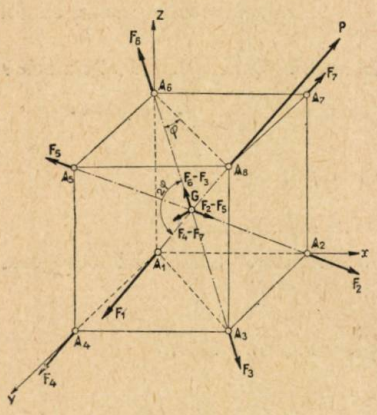
Soluţiile care urmează sunt date în această ipoteză.

*) Problema 5644, publicată în numărul trecut la pag. 469, a fost rezolvată şi de D-l M. D. COTARIU (Brăila).

Soluția I. Notând cu F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 și F_7 respectiv *forțele* aplicate în vârfurile A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 și A_7 ale cubului, cu *k coeficientul* de *proporționalitate* și cu *a latura* cubului avem:

$$F_1 = ka\sqrt{3};\ F_2 = ka\sqrt{2};\ F_3 = ka;\ F_4 = ka\sqrt{2};\ F_5 = ka;$$

$$F_6 = ka\sqrt{2};\ F_7 = ka.$$



Forțele F_2 și F_5 având același suport A_2A_5 dau o rezultantă:

$$F_{2-5} = F_2 - F_5 = ka(\sqrt{2} - 1).$$

Analog pentru grupele de forțe (F_3, F_6) și (F_4, F_7):

$$F_{3-6} = F_6 - F_3 = ka(\sqrt{2} - 1)$$

$$F_{4-7} = F_4 - F_7 = ka(\sqrt{2} - 1).$$

Cele trei rezultante parțiale F_{2-5}; F_{3-6} și F_{4-7} sunt concurente în G, centrul cubului, sunt egale ca mărime, fac unghiuri egale între ele și sunt egal înclinate pe diagonala A_1A_8 cu un unghiu al cărui *cosinus* se deduce ușor prin considerații simple de trigonometrie:

$$\cos \sphericalangle (\overline{A_6A_3};\ \overline{A_6A_8}) = \cos\varphi = \frac{A_6A_8}{A_6A_3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\ \sphericalangle (\overrightarrow{F_6 - F_3};\ \overline{A_8A_1}) = 2\varphi$$

$$\cos \sphericalangle (\overrightarrow{F_6 - F_3};\ \overline{A_8A_1}) = \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Rezultanta celor trei forțe F_{2-5}; F_{3-6} și F_{4-7} este prin urmare:

$$F_{2-3-4-5-6-7} = 3 \times ka(\sqrt{2} - 1)\cos 2\varphi = ka(\sqrt{2} - 1)$$

și este îndreptată după diagonala A_8A_1 cu sensul dela A_8 către A_1.

Această rezultantă se adună deci aritmetic cu forța F_1 și obținem rezultanta totală a forțelor date:

$$R = ka(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) = 2{,}1463\ ka$$

dirijată după A_8A_1 dela A_8 către A_1.

In concluzie, în cazul problemei date, rezultanta sistemului de forţe în spaţiu, nu este un *răsucitor* (torsor) cum se întâmplă de obicei, ci o *forţă unică* R.

Axa centrală este prin urmare chiar suportul rezultantei R adică diagonala A_1A_8.

Elementele mecanice aplicate în A_8 pentru echilibrarea sistemului se reduc la o forţă unică P egală şi direct opusă lui R.

Soluţia II. Alegând drept axe de coordonate A_1x, A_1y şi A_1z şi ţinând seama că toate diagonalele cubului sunt înclinate pe laturile cubului cu un acelaşi unghiu de cosinus $\frac{1}{\sqrt{3}}$ obţinem prin proiecţii:

$$F_1\,(X_1 = -ka \;;\; Y_1 = -ka \;;\; Z_1 = -ka);$$

$$A_1\,(x_1 = 0 \;;\; y_1 = 0 \;;\; z_1 = 0)$$

$$F_2\left(X_2 = ka\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \;;\; Y_2 = -ka\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \;;\; Z_2 = -ka\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right);$$

$$A_2\,(x_2 = a \;;\; y_2 = 0 \;;\; z_2 = 0)$$

$$F_3\left(X_3 = \frac{ka}{\sqrt{3}} \;;\; Y_3 = \frac{ka}{\sqrt{3}} \;;\; Z_3 = -\frac{ka}{\sqrt{3}}\right);$$

$$A_3\,(x_3 = a \;;\; y_3 = a \;;\; z_3 = 0)$$

$$F_4\left(X_4 = -ka\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \;;\; Y_4 = ka\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \;;\; Z_4 = -ka\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right);$$

$$A_4\,(x_4 = 0 \;;\; y_4 = a \;;\; z_4 = 0)$$

$$F_5\left(X_5 = -\frac{ka}{\sqrt{3}} \;;\; Y_5 = \frac{ka}{\sqrt{3}} \;;\; Z_5 = \frac{ka}{\sqrt{3}}\right);$$

$$A_5\,(x_5 = 0 \;;\; y_5 = a \;;\; z_5 = a)$$

$$F_6\left(X_6 = -ka\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \;;\; Y_6 = -ka\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \;;\; Z_6 = \frac{ka\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right);$$

$$A_6\,(x_6 = 0 \;;\; y_6 = 0 \;;\; z_6 = a)$$

$$F_7\left(X_7 = \frac{ka}{\sqrt{3}} \;;\; Y_7 = -\frac{ka}{\sqrt{3}} \;;\; Z_7 = \frac{ka}{\sqrt{3}}\right);$$

$$A_7\,(x_7 = a \;;\; y_7 = 0 \;;\; z_7 = a).$$

Notând cu R (X, Y, Z) rezultanta forţelor şi cu $\mathfrak{M}$ (L, M, N) suma momentelor acestor forţe în raport cu origina axelor de coordonate avem:

$$X = \sum_1^7 X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$$

$$= -ka - ka\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{ka}{\sqrt{3}}$$

$$X = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}} \cdot ka$$

$$Y = \sum_1^7 Y_i = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}} \cdot ka$$

$$Z = \sum_1^7 Z_i = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}} \cdot ka$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Y^2} = |X\sqrt{3}| = (\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)\,ka = 2{,}1463\,ka$$

$$L = \sum_1^7 (y_i Y_i - z_i Y_i) = -\frac{ka^2}{\sqrt{3}} - ka^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{ka^2}{\sqrt{3}} - \frac{ka^2}{\sqrt{2}}$$

$$+ ka^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{ka^2}{\sqrt{3}} = 0$$

$$M = \sum_1^7 (z_i X_i - x_i Z_i) = 0$$

$$N = \sum_1^7 (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

$$\mathfrak{M} = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = 0.$$

Sistemul se reduce prin urmare la *forţa unică* R care având proiecţiile pe axe, egale şi negative rezultă că este aplicată după diagonala A_8A_1 a cubului cu sensul dela A_8 către A_1.

Din acest rezultat se deduc imediat celelalte puncte ale problemei ca şi în cazul soluţiei I-a.

ALEXANDRU STOENESCU.

PROBLEMA 5171. *Să se stabilească relația:*

$$8S^2 \sum \frac{1}{a^2b^2} - 4S \sum \frac{ad_a}{b^2c^2} - 3 = 0.$$

Notațiile se referă la un triunghiu oarecare, d_a, d_b, d_c, *fiind distanțele dela centrul cercului circumscris la laturile triunghiului.*

LT. C. IONESCU-ȚIU.

1°. *Soluție* dată de D-nii P. P. DRĂGHICESCU (Lic. militar Iași) și M. F. VĂDUVA (Lic. Ion Maiorescu, Giurgiu).

Prima parte a egalității se poate scrie

$$E = \frac{8S^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2b^2c^2} - \frac{4S \cdot \sum a^3 d_a}{a^2b^2c^2} - 3$$

$$= \frac{4S}{a^2b^2c^2}[2S(a^2+b^2+c^2) - \sum a^3 d_a] - 3.$$

Ținând seamă de relațiile

$a = 2R \sin A$, $d_a = R \cos A, \ldots$

$\sum \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C$, $\sum \sin 4A = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$,

$\sum \sin^2 A = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$;

avem

$$\sum a^3 d_a = 8R^4 \sum \sin^3 A \cos A = 4R^4 \sum \sin 2A \sin^2 A$$

$$= 2R^4 \sum [\sin 2A(1 - \cos 2A)] = 2R^4 \sum \sin 2A - R^4 \sin 4A$$

$$= 8R^4 \sin A \sin B \sin C (1 + 4 \cos A \cos B \cos C)$$

$$= 4R^2 S(2 \sin^2 A + 2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - 3)$$

$$= 2S(a^2 + b^2 + c^2) - 12R^2 S.$$

Deci avem:

$$E = \frac{4S}{a^2b^2c^2}[2S(a^2+b^2+c^2) - 2S(a^2+b^2+c^2) + 12R^2 S] - 3 =$$

$$= \frac{48R^2S^2}{a^2b^2c^2} - 3 = \frac{48R^2S^2}{16R^2S^2} - 3 = 0.$$

2°. *Soluție* dată de D-nii: M. D. POPA (Lic. Militar Iași), M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. Gh. Lazăr, București), DORIN N. THEODORESCU (Lic. militar M-rea Dealu), H. REISCHER (Iași), E. G. VIJELIE (L. M. N. F.), I. I. STAMATE (Cluj), MIREL D. STOENESCU (L. M. N. F), ȘTEFAN C. TILICĂ (București), J. SEGAL (student), I. I. ISAC (Iași), E. WEGENER (București), CR. EFTIMIE (București).

Relația se mai poate scrie:

$$8S^2\frac{\Sigma a^2}{a^2b^2c^2}-4S\frac{\Sigma a^2 d_a}{a^2b^2c^2}-3=0.$$

Ținând seama că, în rezolvarea problemei 4778 propusă de același autor, se stabilește relația

$$\Sigma a^3 d_a = 2S[\Sigma a^2 - 6R^2], \quad \text{(G. M. An. XLIII, pag. 159)}$$

și de relația $abc = 4RS$, avem

$$\frac{8S^2\Sigma a^2}{16R^2S^2}-\frac{8S^2(\Sigma a^2-6R^2)}{16R^2S^2}-3=$$

$$=\frac{\Sigma a^2}{2R^2}-\frac{\Sigma a^2-6R^2}{2R^2}-3=0.$$

3°. *Soluții* bune au dat D-nii: EM. S. MODÂLCĂ, ST. I. CETĂȚEANU, P. I. TROFIN, H. M. BODNĂRESCU, CONSTANTIN PANTELIMON, M. CHERȚMAN, AD. O. ȘAICHIU și VICTOR BÂRLEA.

C. I. Ț.

PROBLEMA 5203. *Să se calculeze suma*

$$S_n = 1+2.3+4+5.6+\ldots+m+(m+1)(m+2)+\ldots$$

compusă din n *termeni.*

Să se calculeze suma seriei

$$S=\frac{1}{1}-\frac{4}{2.3}+\frac{1}{4}-\frac{7}{5.6}+\frac{1}{7}-\frac{10}{8.9}+\ldots$$

VIRGIL GHIȚESCU.

1°. *Cazul 1-iu,* $n = 2p-1$. S_n se compune din progresia aritmetică

$$s_p = 1+4+\ldots+[1+3(p-1)]$$

de p termeni și din suma

$$s_{p-1} = 2.3+5.6+\ldots+[2+3(p-1-1)][3+3(p-1-1)]$$

de $p-1$ termeni

Suma progresiei aritmetice este

$$s_p = \frac{(3p-1)p}{2}.$$

Termenul final al lui s_{p-1} este

$$(3p-4)(3p-3) = 9p^2 - 21p + 12.$$

Pentru a obține pe s_{p-1} va trebui să luăm

$$s_{p-1} = \sum_{p=2}^{p} (9p^2 - 21p + 12) = 9\sum_{2}^{p} p^2 - 21\sum_{2}^{p} p + 12(p-1) =$$

$$= 9\left[\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} - 1\right] - 21\left[\frac{p(p+1)}{2} - 1\right] + 12(p-1).$$

Adunând găsim rezultatul definitiv:

$$S_n = S_{2p-1} = s_p + s_{p-1} = \frac{p(6p^2 - 9p + 5)}{2} = \frac{(n+1)(3n^2 - 3n + 4)}{8}.$$

Cazul al 2-lea, $n = 2p$. S_n se compune din aceeași progresie aritmetică, s_p, ca și în cazul precedent și din suma

$$s'_p = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + \ldots + [2 + 3(p-1)][3 + 3(p-1)]$$

de p termeni.

Avem:

$$s'_p = \sum_{p=1}^{p} (3p-1)(3p) = \Sigma(9p^2 - 3p) = 9\Sigma p^2 - 3\Sigma p =$$

$$= 9\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} - 3\frac{p(p+1)}{2}.$$

Adunând obținem:

$$S_n = S_{2p} = s_p + s'_p = \frac{p(6p^2 + 9p - 1)}{2} = \frac{n(3n^2 + 9n - 2)}{8}.$$

2°. Seria propusă se mai poate scrie:

$$S = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{4.5.6} + \frac{2}{7.8.9} + \ldots + \frac{2}{(3n-2)(3n-1)3n} + \ldots$$

Sub această formă se arată că seria este convergentă aplicând criteriul logaritmic; într'adevăr avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(3n-2)+\log(3n-1)+\log n+\log 3-\log 2}{\log n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{3n-2}+\frac{3}{3n-1}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{n}}=1+1+1=3>1.$$

Mai scriem seria propusă, convergentă, şi sub forma:

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{8}+\frac{1}{9}\right)+,..$$

$$...=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+...\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+...\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+...\right).$$

In general fie seria:

$$f(x)=\left(\frac{x}{1}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}+...\right)-2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^8}{8}+...\right)+$$

$$+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^9}{9}+...\right).$$

Seria derivată, $f'(x)$, este evident convergentă pentru $|x^3|<1$, adică $-1<x<+1$; în această condiţiune trebuie considerată convergentă şi seria $f(x)$. Seria propusă însă este o serie particulară a lui $f(x)$ şi s'a arătat că $f(x)$ este convergentă şi la extremitatea intervalului, adică pentru $x=1$.

Derivând şi apoi integrând găsim:

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{1}{1-x^3}dx-2\int\frac{x}{1-x^3}dx+$$

$$+\int\frac{x^2}{1-x^3}dx=\int\frac{(1-x)^2}{1-x^3}dx=\int\frac{1-x}{1+x+x^2}dx=$$

$$=\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\log\sqrt{x^2+x+1}+C.$$

Constanta de integrare trebuie să aibă valoarea

$$C = -\sqrt{3}\,\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

pentru a putea avea: $f(o) = 0$.

In formula generală precedentă facem $x = 1$. Cădem astfel peste seria noastră, suma ei fiind

$$S = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \log_e \sqrt{3} = 0{,}90692\ldots - 0{,}54930\ldots = 0{,}35762\ldots$$

Notă. Dela data publicării ei (15.VIII.1940) şi până în prezent, nu s'a primit nicio soluţie la această problemă.

V. Gh.

PROBLEMA 5249. *Să se determine, pentru* $n = \infty$, *limita expresiei*

$$E_n = \frac{n^n e^{-n} - (n-1)^{n-1} e^{-n+1}}{(n-1)\,(n-1)!}.$$

M. Ghermănescu.

1. *Soluţie* dată de D-l C. D. Eftimie.

Ţinând seama de formula lui Stirling

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,[1 + \theta(n)],$$

unde $\theta(n)$ tinde către *zero*, odată cu $\frac{1}{n}$, avem

$$\lim E_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\lim\frac{\sqrt{n}}{(n-1)\,[1+\theta(n)]}\lim-\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}[1+\theta(n-1)]}\right] = 0,$$

căci

$$\lim\frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0, \quad \lim\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

2. *Altă soluţie.* Să punem

$$u_n = n^n e^{-n}\ , \quad v_n = n!\ , \quad \text{deci } \lim\frac{v_{n-1}}{v_n} = \lim\frac{1}{n} = 0;$$

expresia dată devine

$$E_n = \frac{u - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}.$$

Însă, în *Gazeta Matematică* vol. XLI, p. 89—92 şi în *Cursul* meu de *Algebră Superioară*, p. 149, am dat următoarea teoremă: *Dacă*

$$\lim \frac{v_{n-1}}{v_n} \neq 1,$$

avem

$$\lim \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim \frac{u_n}{v_n},$$

când ultima limită există.

Suntem tocmai în ipoteza acestei teoreme, deci

$$\lim E_n = \lim \frac{n^n e^{-n}}{n!} = \lim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,[1 + \theta(n)]} = 0,$$

unde am folosit formula lui STIRLING.

Notă. 1°. Problema 5249 a fost propusă tocmai ca o aplicaţie simplă a teoremei precedente, care este un fel de reciprocă a cunoscutei teoreme a lui CESÀRO (loc. cit.).

2°. D-l D. RIPIANU a demonstrat că $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$ şi a conchis, fără nicio argumentare, că $\lim E_n = 0$.

3°. D-l V. ECKSTEIN a aplicat bine teorema de mai sus, dar a întrebuinţat o formulă incomplectă a lui STIRLING, care l-a dus la $\lim E_n = 1$.

M. G.

PROBLEMA 5305. *Fie* O_1 *şi* O_2 *centrele a două cercuri, care se taie în* M *şi* N. *Se complectează paralelogramele* O_1MO_2M' *şi* O_1NO_2N'. *Dreapta* O_1M' *taie pe* O_1 *în* C, C', *iar* O_2M' *taie pe* O_2 *în* D, D'. *Apoi* O_1N' *taie pe* O_1 *în* A, A', *iar* O_2N' *taie pe* O_2 *în* B, B'. *In fine se notează cu* M_1, M_2 *şi* N_1, N_2 *diametralele opuse lui* M *şi* N *în cele două cercuri. Punctele* A, B, C, D *sunt de aceeaşi parte a lui* O_1O_2 *cu* M, *iar* A', B', C', D' *de aceeaşi parte cu* N. *Cercul* O_1 *are raza mai mare ca* O_2. *Să se demonstreze că:*

1°. *Dreptele* AB, A'B', M_1M_2 *trec prin* N.

2°. *Dreptele* CD, C'D', N_1N_2 *trec prin* M.

3°. M' *se află pe* M_1M_2, *iar* N *pe* N_1N_2.

4°. *Patrulaterele* $O_1M'NO_2$, $O_1N'MO_2$ *sunt inscriptibile.*

5°. *Triunghiurile* A'N'B', C'M'D' *sunt isoscele.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii: H. M. BODNĂRESCU, P. P. DRĂGHICESCU, OCT. E. GHEORGHIU, T. MIROSLAV, C. V. PANTELIMON și M. D. POPA.

1°. Se observă pe figură că

$$\sphericalangle N_2NB' = \sphericalangle \frac{N_2O_2B'}{2} = \sphericalangle \frac{NO_2N'}{2} \qquad (1)$$

$$\sphericalangle N_1NA' = \sphericalangle \frac{A'O_1N_1}{2} = \sphericalangle \frac{NO_1N'}{2}. \qquad (2)$$

Deci

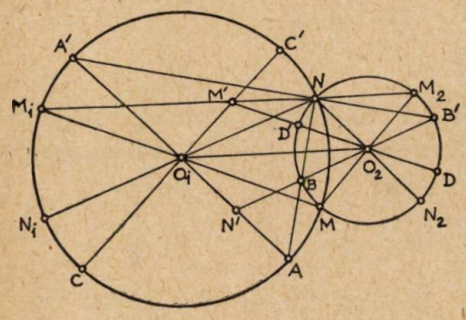
$$\sphericalangle B'NA' = \sphericalangle O_1NO_2 + \sphericalangle O_2NB' + \sphericalangle O_1NA'$$
$$= \sphericalangle O_1NO_2 + \sphericalangle N_2NB' + \sphericalangle N_1NA'.$$

Ținând seamă de (1) și (2) și de faptul că unghiurile NO_2N' și NO_1N' sunt opuse în paralelogramul O_1NO_2N':

$$\sphericalangle B'NA' = \sphericalangle O_1NO_2 + \frac{\sphericalangle NO_2N' + \sphericalangle NO_1N'}{2}$$
$$= \sphericalangle O_1NO_2 + \sphericalangle N'O_2N = 180^0$$

Rezultă ca A'B' *trece prin* N.

Punctele A și B fiind diametrale lui A' și B' unghiurile ANA' și BNB' sunt drepte. Deci AN și BN sunt una și aceeași dreaptă, perpendiculară în N pe A'B' sau AB *trece prin* N.



Apoi unghiurile MNM_2 și MNM_1 sunt drepte căci M_1 și M_2 sunt diametralele lui M în cele două cercuri. Deci M_1M_2 *trece prin* N.

2°. Aceeași demonstrație ca la 1°.

3°. Se observă că triunghiurile $O_1NO_2, O_1M'O_2$ sunt egale prin construcție. Rezultă că NM' este paralelă cu O_1O_2, deci perpendiculară pe MN și se suprapune prin urmare pe M_1M_2. *Punctul M' se află pe* M_1M_2.

4°. Din egalitatea triunghiurilor $O_1M'O_2$, O_1NO_2 rezultă că *patrulaterul* $O_1M'NO_2$ *este un trapez isoscel*, deci *inscriptibil*. La fel patrulaterul $O_1N'MO_2$ este trapez isoscel, simetric și egal cu precedentul.

5°. Pe figură se vede că

$$\sphericalangle NB'B = \tfrac{1}{2} \sphericalangle NO_2B = \tfrac{1}{2} \sphericalangle NO_1N'$$
$$\sphericalangle NA'A = \tfrac{1}{2} \sphericalangle NO_1A = \tfrac{1}{2} \sphericalangle NO_2N'$$

egalităţi care arată că *triunghiul* A'N'B' *este isoscel.* La fel se arată că şi *triunghiul* C'M'D' *este isoscel.*

PROBLEMA 5471. *Insemnând prin* C_n^i *şi* P_i *simboalele cunoscute pentru combinări şi permutări, să se arate că ecuaţiile*

$$x^n + (C_n^1)^p x^{n-1} + (C_n^2)^p x^{n-2} + \ldots + (C_n^n)^p = 0$$

şi

$$x^n + \frac{(C_n^1)^p}{P_1^q} x^{n-1} + \frac{(C_n^2)^p}{P_2^q} x^{n-2} + \ldots + \frac{(C_n^n)^p}{(P_n)^q} = 0$$

au toate rădăcinile reale dacă p *şi* q *sunt întregi astfel ca* $p \geqslant 1$ *şi* $p + q \geqslant 1$.

P. SERGESCU.

Soluţie dată de D-ra F. BRĂTILĂ (licenţiată în matematici). In 1896 MALO a demonstrat teorema: *Dacă ecuaţiile*

$$\sum_0^n a_i x^i = 0 \quad \text{şi} \quad \sum_0^n b_i x^i = 0$$

au toate rădăcinile reale, una din ele având rădăcinile de acelaşi semn, ecuaţia

$$\sum_0^n a_i b_i x^i = 0$$

are toate rădăcinile reale. (Vezi P. SERGESCU. *Curs de Algebră Superioară*, lito, 1924, pag. 524). In 1914, I. SCHUR a demonstrat că, în aceleaşi condiţiuni, şi ecuaţia

$$\sum_0^n i!\, a_i b_i x^i = 0$$

are toate rădăcinile reale [P. SERGESCU, *loc. cit.*, pag. 519]. In fine LAGUERRE a arătat că dacă

$$\sum_0^n a_i x^i = 0$$

are toate rădăcinile reale, şi ecuaţia:

$$a_0 + \frac{a_1}{f(1)} x + \frac{a_2}{f(1)\, f(2)} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{f(1) f(2) \ldots f(n)} x^n = 0$$

are toate rădăcinile reale, unde

$$f(i) = (a_1 i + b_1)^{\alpha} (a_2 i + b_2)^{\beta} \ldots (a_s i + b_s)^{\lambda},$$

iar $a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s$ sunt numere pozitive sau nule, iar exponenţii $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ sunt zero sau întregi pozitivi. [Vezi LAGUERRE, *Oeuvres*, Tome I, pag. 34, sau P. SERGESCU, *Monografie asupra ecuaţiilor cu toate rădăcinile reale*, 144 pag., 1925].

Să considerăm ecuaţia

$$(1) \qquad 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n = 0$$

care are toate rădăcinile reale şi egale cu -1, căci se reduce la $(x+1)^n = 0$. Compunând-o cu ea însăşi rezultă, în baza propoziţiei lui MALO, că ecuaţia

$$1 + (C_n^1)^2 x + (C_n^2)^2 x^2 + \ldots + (C_n^n)^2 x^n = 0$$

şi deci şi transformata ei în $\frac{1}{x}$:

$$(2) \quad x^n + (C_n^1)^2 x^{n-1} + (C_n^2)^2 x^{n-2} + \ldots + (C_n^n) = 0$$

are toate rădăcinile reale. Această ecuaţie poartă numele lui HERMITE. Atunci, prin inducţiune completă, să presupunem că

$$1 + (C_n^1)^{p-1} x + (C_n^2)^{p-1} x^2 + \ldots + (C_n^n)^{p-1} x^n = 0$$

are toate rădăcinile reale. Compunând-o cu (1) în baza teoremei lui MALO şi făcând transformata în $1/x$ rezultă că ecuaţia

$$(3) \quad x^n + (C_n^1)^p x^{n-1} + (C_n^2)^p x^{n-2} + \ldots + (C_n^n)^p = 0$$

are toate rădăcinile reale. Cum lucrul a fost verificat pentru $p = 1$ şi $p = 2$, urmează că proprietatea e generală.

Dacă, în loc de a aplica succesiv de $p - 1$ ori teorema lui MALO ecuaţiei (1) şi produselor succesive de compoziţie ale ei, am fi aplicat de k ori teorema lui SCHUR şi de $p - k - 1$ ori teorema lui MALO, ajungeam la rezultatul că ecuaţia:

$$(4) \quad x^n + (P_1)^k (C_n^1)^p x^{n-1} + (P_2)^k (C_n^2)^p x^{n-2} + \ldots + (P_n)^k (C_n^n)^p = 0$$

unde p şi k sunt întregi pozitivi, are toate rădăcinile reale.

Să aplicăm transformatei în $\frac{1}{x}$ a lui (4) teorema citată a lui LAGUERRE, în care am pus:

$$f(i) = i^{k+q} \qquad [\text{unde } k + q \geqslant 0].$$

Rezultă că ecuația:

$$1+\frac{(C_n^1)^p}{1^q}x+\frac{(C_n^2)^p}{(1.2)^q}x^2\ldots+\frac{(C_n^n)^p}{(n!)^q}x^n=0$$

are toate rădăcinile reale. Transformând încă odată în $\frac{1}{x}$ rezultă că ecuația

$$(5)\quad x^n+\frac{(C_n^1)^p}{(P_1)^q}x^{n-1}+\frac{(C_n^2)^p}{(P)_2{}^q}x^{n-2}\ldots+\frac{(C_n^n)^p}{(P_n)^q}=0$$

are toate rădăcinile reale, cu condiția $k+q\geqslant 0$. Dar, din faptul că am aplicat de k ori teorema lui SCHUR și de $n-k-1$ ori teorema lui MALO, rezultă că *trebuie* să avem $n-k-1\geqslant 0$. Din combinarea acestor ultime două inegalități, rezultă că trebuie să avem $p+q-1\geqslant 0$ pentru ca (5) să aibă toate rădăcinile reale. Propoziținea e stabilită.

D-l Slt. ȘTEFAN TILICĂ (Mărășești) a încercat o demonstrație pornind dela inegalitățile lui OSSIAN BONNET. Dar D-sa nu a observat că aceste inegalități sunt numai condiții *necesare*, dar *nu și suficiente* pentru realitatea tuturor rădăcinilor unei ecuații algebrice.

EXERCIȚII

23. Să se arate că p la exponentul

$$\frac{1}{b^n}+\frac{2}{a^m\,b^{n-1}}+\frac{3}{a^{2m}b^{n-2}}+\ldots+\frac{n}{a^{(n-1)m}b}$$

este egal cu rădăcina de ordinul $b^n a^{m(n+1)}(b-a^m)^2$ din p la exponentul

$$nb^{n-1}-(n+1)\,a^m b^n+a^{m(n+1)}$$

CPT. E. ȘT. IACOB.

R. Exponentul lui p din prima parte se mai scrie

$$(1)\qquad S=\frac{1}{b^n}\left[1+\frac{2b}{a^m}+\frac{3b^2}{a^{2m}}+\ldots+\frac{nb^{n-1}}{a^{m(n-1)}}\right]$$

sau multiplicând cu $\frac{b}{a^m}$:

$$(2)\qquad \frac{b}{a^m}S=\frac{1}{b^n}\left[\frac{b}{a^m}+\frac{b^2}{a^{2m}}+\ldots+\frac{nb^n}{a^{nm}}\right].$$

Scăzând (2) din (1), avem:

$$\left(1-\frac{b}{a^m}\right)S=\frac{1}{b^n}\left[1+\frac{b}{a^m}+\frac{b^2}{a^{2m}}+\ldots+\frac{b^{n-1}}{a^{m(n-1)}}-\frac{nb^n}{a^{mn}}\right]$$

$$=\frac{1}{b^n}\left[\frac{\frac{b^n}{a^{mn}}-1}{\frac{b}{a^m}-1}-\frac{nb^n}{a^{mn}}\right]$$

$$\therefore\ S=\frac{nb^{n+1}-(n+1)a^m b^n+a^{m(n+1)}}{b^n a^{m(n+1)}(b-a^m)^2}$$

ceea ce demonstrează proprietatea din enunț.

PROBLEME PROPUSE

5736 [1]). Fie $A_0A_1A_2A_3$ un patrupunct și $A_1'A_2'A_3'$ triunghiul său diagonal. Se înseamnă cu I involuția determinată pe dreapta dela infinit de perechile de diagonale opuse ale patrupunctului.

Prin A_1' se duc dreptele Δ_1^+, Δ_1^-, cu direcțiile cuprinse în involuția I și care împart armonic unghiul diagonalelor A_0A_1, A_2A_3. La fel se determină dreptele Δ_2^+, Δ_1^- și Δ_3^+, Δ_3^-.

Să se arate că cele opt cercuri circumscrise triunghiurilor $\Delta_1^{\varepsilon_1}\Delta_2^{\varepsilon_2}\Delta_3^{\varepsilon_3}$ ($\varepsilon_i=\pm 1$) admit un punct de unde sunt văzute sub același unghiu, câtă vreme patrupunctul $A_0A_1A_2A_3$ nu e ortocentroidal.

D. BARBILIAN.

5812. Un vas de tablă are forma unui paralelipiped dreptunghic și e plin cu apă. Se înclină vasul spre a se scurge apa. Care este minimul de înclinare la care începe să se vadă fundul vasului?

I. IONESCU.

1) Enunțul acestei probleme, publicat la pag. 192, Vol. XLVIII având unele scăpări, se publică din nou corectat și complectat.

5813. Să se găsească valorile întregi ale lui p şi q pentru care numerele $\frac{p(q^2-1)}{4}$ şi $\frac{p(q+1)}{2}$ sunt simultan patrate perfecte.

Soluţia acestei probleme poate ajuta la rezolvarea problemei 2357 propusă în G. M., Vol. XXI, pag. 199.

G-L GH. BUICLIU.

5814. Fie (x, y) comultiplul minim al numerelor x şi y. Să se demonstreze că:

a) Nu există numere întregi x, y şi z diferite de zero, care să verifice relaţia:

$$(x, y)+(y, z)+(z, x)=2^n.$$

b) Numărul 2 este singurul, care se bucură de această proprietate.

IOAN B. FLORESCU.

5815. Să se studieze natura seriei:

$$\sum_1^\infty \frac{n^\alpha+n^{\alpha-1}+\ldots+1}{n^{\alpha'}+n^{\alpha'-1}+\ldots+1}.$$

Caz particular: $\alpha=6$, $\alpha'=3$.

C. C. ILIESCU.

5816. Să se rezolve ecuaţia:

$$F(x)\equiv x^6+369x^5+807x^4+20135x^3+150408x^2+$$
$$+1799820x-1971216=0,$$

ştiind că admite o rădăcină de forma $(a+ib)^2$, unde a şi b sunt întregi.

Să se arate, că toate rădăcinile sunt de aceeaşi formă şi să se deducă apoi că $F(x)=0$ este ecuaţia, care are ca rădăcini patratele diferenţelor rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al patrulea, care să se determine.

M. GHERMĂNESCU.

5817. Se consideră un poligon regulat $A_1A_2A_3\ldots A_n$ cu centrul în O. Se prelungesc razele OA_1, OA_2, ..., OA_n până în punctele A_1', A_2', ..., A_n' aşa încât:

$$\overline{A_1A_1'}=x\ ;\ \overline{A_2A_2'}=2x\ ;\ \overline{A_3A_3'}=3x;\ldots;\ \overline{A_nA_n'}=nx,$$

şi se obţine poligonul $A_1'A_2'A_3'\ldots A_n'$. Să se calculeze:

1°. Valoarea raportului: $k=\frac{\text{supr. }(A_1'A_2'A_3'\ldots A_n')}{\text{supr. }(A_1A_2A_3\ldots A_n')}$.

2°. Valoarea lui x în funcție de k, n, r, știind că r este raza cercului circumscris poligonului regulat dat.

3°. Valorile lui k pentru care x este rațional când $n = 4$ sau $n = 5$.

GH. BASACOV.

5818. Fie OABCD o piramidă cu baza, un patrulater oarecare. Un plan P taie muchiile OA, OB, OC, OD în A', B', C', D'. Planele BC'D', DA'B', BA'D', DB'C' taie respectiv planele OAD, OBC, OCD, OAB după dreptele d_1, d_1', d_2, d_2'.

1°. Dreptele d_1, d_1' și d_2, d_2' formează două plane, ce se taie după dreapta A'C'.

2°. Dreptele d_1, d_2 și d_1', d_2' formează două plane, ce se taie după o dreaptă din planul OBD.

3°. Dreptele d_1, d_2' și d_1', d_2 formează două plane, ce se taie după o dreaptă din planul P.

P. P. DRĂGHICESCU.

5819. Se consideră două cercuri (C_1) și (C_2). Insemnăm cu (T_1) transformarea prin inversiune în raport cu primul cerc și cu (T_2) pe aceea în raport cu cel de-al doilea. Fie N_1 punctul ce corespunde unui punct M prin transformarea (T_2T_1) și N_2 acela obținut prin transformarea (T_1T_2). Să se arate, că:

1°. Cercul MN_1N_2 este în general, ortogonal cercurilor (C_1) și (C_2).

2°. In particular, dacă cercurile (C_1) și (C_2) sunt ortogonale, punctele N_1 și N_2 coincid cu același punct N.

M, N și punctele comune cercurilor (C_1) și (C_2) sunt pe același cerc și formează o diviziune armonică.

ȘERBAN GHEORGHIU.

5820. Fie M un punct pe elipsa de centru O și de axe $2a$, $2b$. Dintr'un punct R de pe normala în M la elipsă se duc tangentele RT_1, RT_2 la elipsă. Să se demonstreze că, dacă R tinde către M, atunci

$$\lim \frac{\overline{RT_1} \cdot \overline{RT_2}}{\overline{RM}} = \frac{2\overline{OP}^3}{ab},$$

unde $\overline{OP}$ este semidiametrul conjugat lui OM.

RĂDUCAN GEORGESCU.

5821. Se consideră funcţia

$$(a) \qquad y = \varphi(x)$$

în care

$$(b) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos s \; \varphi(s)\, ds + \sin x \cos x$$

şi se cere:

1°. Să se rezolve ecuaţia (b).

2°. Să se studieze variaţia funcţiei (a) pentru $n = 1$, $\lambda = 3$.

3°. Să să găsească înfăşurătoarea curbelor (a) pentru $n = 1$.

EUG. CRĂCIUNESCU.

5822. Să se construiască curba

$$x(x-y)^3 - 2ay(x-y)(x-2y) + a^2y^2 = 0$$

tăind-o cu drepte care trec prin punctul dublu, sau cu drepte paralele cu asimptota.

N. ABRAMESCU.

5823. Se dau două puncte fixe într'un plan vertical, distanţa dintre ele fiind l şi diferenţa de nivel fiind h.

Un fir inextensibil de lungime $l_1 > l$, este fixat cu un capăt în punctul de jos, se continuă fără frecare pe un scripete mic în punctul de sus, iar la celălalt capăt susţine greutatea P.

Intre cele două puncte, alunecă fără frecare, pe fir, un inel, de care este fixată greutatea Q.

Se cere greutatea Q, astfel încât, inelul să nu cadă în punctul de jos, şi greutatea P, ca să nu lovească punctul de sus.

ING. MIRCEA RĂDULESCU.

5824. Un semicilindru, de rază r şi greutate G, este aşezat pe un plan orizontal în lungul unei generatoare şi este lăsat liber, când planul său longitudinal face cu planul orizontal unghiul φ. Să se studieze mişcarea ulterioară a semicilindrului. Coeficientul de frecare de rostogolire se va lua s, iar coeficientul de frecare de alunecare este f.

ALEXANDRU STOENESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (P); *Baras R.* (4680); *Blaha N.* (A); *Borş C.* (A); *Bonvaist R.* (3864, 4356, 690, 944, 5309, 770); *Columbeanu D. P.* (5698, 742, 63, 90, 98, 801); *Constantinescu I. M.* (5056, 747, 75, 91); *Cotariu D. M.* (2130, 4022, 5056, 580, 626, 37, 750, 53, 60, 73, 98, N); *Drăghicescu P. P.* (5002, 608, 776, 81); *Dumitrescu Gh. Tr.* (5587); *George M. N.* (5626, 791, 98); *Iacob Şt. E.* Căp. (3961, 4102, 5705, 40, 60, 75); *Mahrenholz I.* (5776, 91, 98); *Mătieş V. I.* (3950, A, N, P); *Munteanu Gh. Lucian* (5791); *Nache D.* (5781); *Pălăceanu D. V.* (5547, 58, 67, 75, 78, 80, 89, 626, 30, 32, 67, 776); *Pitiş L. Armand-Nicolae* (5475, 760, 802); *Popa D. M.* (5022, 440, 55, 522, 23, 35, 621); *Piţigoi Gh. Victor* (5788, 89, 91, 801); *Teodorescu St. I.* (5146); *Ţigănoiu Al.* (5740, 54); *Turculeţ T.* (5781).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 18.929

1942-1943 complet

CII R 28

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVIII

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1943

SUMARUL

1. Calculul vectorial (urmare şi sfârşit) . . . . . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
2. Neegalităţi cu indicatori de ordin superior . . . . . *Comandor I. Linteş.*
3. Proprietăţi ale normalelor la curbe . . *N. Abramescu.*
4. Triunghiuri limită. . . . . *Şerban Gheorghiu.*
5. Raport pentru decernarea premiului de mecanică „Spiru Haret" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
6. Note matematice: 57 — 59.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 322.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2130, 3332, 3608, 3902, 5661, 5705, 5717, 5720, 5741, 5775.
11. Exerciţii: 24 — 25.
12. Probleme propuse: 5675, 5825 — 5836.
13. Tabla de materii.

ABONAMENTUL 300 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1942, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **56**91, 93, 95, 96, 97, 98, 99, **7**01, 02, 04, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **8**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 487 şi sfârşit)

§. 7. DETERMINAREA CÂMPURILOR VECTORIALE

Suntem în măsură a trece la determinarea condiţiilor de existenţă ale unui câmp vectorial.

Intr'un spaţiu de primul ordin (einfach zusammenhängenden-Raum) un câmp vectorial $\mathfrak{F}$ e determinat, dacă se cunosc în acel spaţiu: div $\mathfrak{F}$, rot $\mathfrak{F}$ şi $\mathfrak{F}_n$ de pe suprafeţele de limită ale acelui spaţiu.

Suprafeţele de discontinuitate, fie pentru funcţia potenţială scalară prin gradientul căruia se exprimă vectorul câmpului, fie pentru componenta normală sau tangenţială a vectorului de câmp, formează suprafeţe de limită ale spaţiului în care se determină acel câmp.

Condiţia de mai sus a suprafeţei de limită, se justifică prin aceea că un integral de volum se transformă într'un integral de suprafaţă, sau un integral de linie se transformă într'un integral de suprafaţă, atunci când în spaţiul dat, nu există suprafeţe de discontinuitate care vor da naştere la variaţiuni brusce a componentei normale sau tangenţiale ale vectorului de câmp.

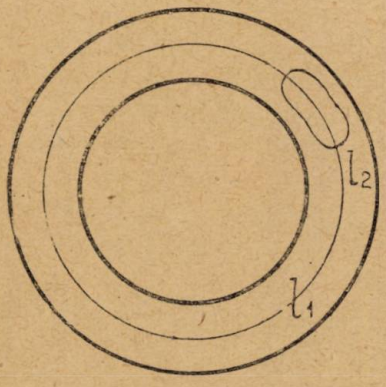


Fig. 65. Spaţiul torului numai are proprietatea spaţiului de primul ordin.

Pe de altă parte, dacă vectorul de câmp se exprimă prin gradientul unei funcţiuni scalare, denumită funcţiune potenţială scalară şi există în acel câmp, suprafeţe de discontinuitate pentru însuşi funcţia potenţială, şi acestea formează suprafeţe de limită ale spaţiului în care se determină câmpul.

Zicem că un spaţiu e de primul ordin, atunci când în acel spaţiu luându-se o linie închisă oarecare, se poate construi o suprafaţă cu acea linie periferică, astfel ca ea să fie în întregime cuprinsă în spaţiul dat. Spre exemplu, spaţiul unui cub sau a unei sfere sunt de primul ordin. In schimb spaţiul unui tor nu mai e

de primul ordin, suprafaţa cu l_1 ca linie periferică, nu este cuprinsă în întregime în spaţiul torului. (Vezi figura 65). Bine înţeles că în spaţiul torului se pot construi şi suprafeţe cu linii periferice ca l_2 care sunt cuprinse în întregime în spaţiul dat după cu ne arată figura 65. Semnificaţia de primul ordin se dă spaţiului numai atunci când pentru orice linie închisă, se va putea construi o suprafaţă cu acea linie închisă ca linie perferică, care să fie în întregime cuprinsă în spaţiul dat.

Spaţiul torului poate fi transformat într'un spaţiu cu proprietatea spaţiului de primul ordin, dacă formăm în el o astfel de secţiune S_1 (vezi figura 66), care să nu mai fie străpunsă de nicio linie. Cu alte cuvinte S_1 va fi considerată ca o suprafaţă de limită a spaţiului dat.

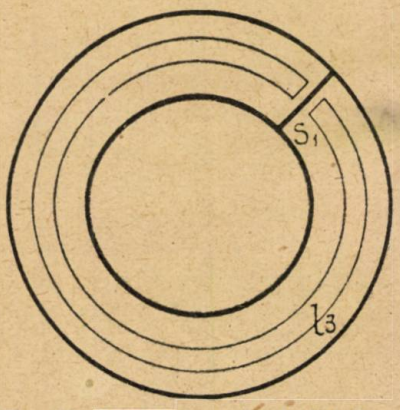


Fig. 66. Spaţiul de ordinul al doilea.

Deoarece în cazul torului, a fost suficient formarea unei singure suprafeţe S_1 pentru ca spaţiul lui să aibă proprietatea spaţiului de prim ordin, îl vom denumi spaţiu de ordinul al doilea O linie închisă are acum forma liniei l_3 din figura 66.

In cazul când e necesar să se întroducă într'un spaţiu n secţiuni, pentru ca acel spaţiu să aibă proprietatea spaţiului de primul ordin, îl vom denumi spaţiul de $n+1$ ordin.

Să arătăm că atunci când într'un spaţiu de primul ordin se cunosc div $\mathfrak{F}$, rot $\mathfrak{F}$ şi $\mathfrak{F}_n$ pe suprafeţele de limită ale spaţiului dat, câmpul vectorial $\mathfrak{F}$ în acel spaţiu e determinat.

In acest scop ne slujim de formula I-a a lui GREEN.

Avem $$(\nabla \{U \nabla V\}) = (\nabla U \nabla V) + U \nabla^2 V$$

şi pentru $U \equiv V$ rezultă $(\nabla \{V \nabla V\}) = (\nabla V)^2 + V \nabla^2 V$.

Formând integralul de volum, care se poate transforma într'un integral de suprafaţă, obţinem:

$$\int d\sigma (\nabla \{V \nabla V\}) = \int (d_s \{V \nabla V\}) = \int d\sigma (\nabla V)^2 + \int d\sigma V \nabla^2 V. \quad (I)$$

Relaţia de mai sus prezintă formula I-a a lui GREEN.

Iată cum se aplică formula I-a a lui GREEN pentru a arăta că atunci când se cunosc div $\mathfrak{F}$, rot $\mathfrak{F}$ şi $\mathfrak{F}_n$ câmpul vectorial $\mathfrak{F}$ e determinat.

Dacă în condiţiile de mai sus, ar putea să existe, pe lângă $\mathfrak{F}$ şi câmpul $\mathfrak{F}'$, atunci s'ar obţine

$$\operatorname{div}\{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}'\}=0 \qquad \operatorname{rot}\{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}'\}=0 \qquad \mathfrak{F}_n-\mathfrak{F}'_n=0.$$

Câmpul vectorial $\mathfrak{F}-\mathfrak{F}'$ fiind lipsit de turbion ($\operatorname{rot}\{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}'\}=0$) rezultă că el se poate reprezenta prin gradientul unei funcţiuni scalare.

Vom pune $\mathfrak{F}-\mathfrak{F}'=\nabla V$ în care caz condiţia $\operatorname{rot}\{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}'\}=0$ e satisfăcută.

Avem $$\operatorname{rot}\{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}'\}=[\nabla\nabla]V=0.$$

Din cele de mai sus rezultă:

$$\operatorname{div}\{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}\}=\nabla^2V=0$$

$$\mathfrak{F}_n-\mathfrak{F}'_n=(\bar{n}\nabla V)\bar{n}=\frac{\partial V}{\partial n}\bar{n}=0.$$

Aplicând formula I-a a lui GREEN, obţinem:

$$\int(d_\sigma V\nabla V)=\int d_\sigma V\frac{\partial V}{\partial n}=0 \qquad \int d\sigma\, V\nabla^2V=0$$

de unde deducem

$$\int d\sigma\,(\nabla V)^2=0.$$

Cum însă $(\nabla V)^2$ reprezintă o mărime pozitivă, rezultă că integralul de mai sus e nul atunci când $\nabla V\equiv 0$.

Ori în cazul când $\nabla V\equiv 0$ rezultă $\mathfrak{F}\equiv\mathfrak{F}'$, ceea ce ne arată că în condiţiunile date, se obţine o soluţie unică şi bine determinată pentru câmpul vectorial $\mathfrak{F}$ într'un spaţiu de primul ordin. Interpretarea geometrică a condiţiilor de existenţă ale câmpului vectorial $\mathfrak{F}$ e următoarea:

Dacă în spaţiul de primul ordin avem $\operatorname{div}\mathfrak{F}=0$ aceasta înseamnă, că în acel spaţiu nu există sarcini volumetrice de unde să pornească liniile de forţă ale câmpului $\mathfrak{F}$. Dacă şi $\operatorname{rot}\mathfrak{F}=0$, rezultă că în acel spaţiu nu există nici turbioni volumetrici în jurul căror să apară liniile de forţă ale câmpului $\mathfrak{F}$ şi în fine dacă

pe suprafeţele de limită ale spaţiului are loc $\mathfrak{F}_n = 0$ înseamnă că în acel spaţiu nu intră sau nu iese nicio linie de forţă adică în acel spaţiu nu există un câmp vectorial $\mathfrak{F}$.

Mai putem admite cazul că în spaţiul de primul ordin avem div $\mathfrak{F}=0$ rot $\mathfrak{F}=0$ însă pe suprafeţele de limită $\mathfrak{F}_n \neq 0$ (vezi fig. 67).

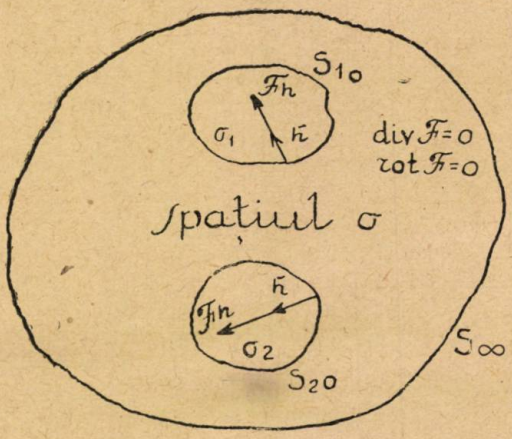


Fig. 67. Condiţiile de existenţă ale câmpului vectorial $\mathfrak{F}$ în spaţiul σ limitat la S_∞, S_{10}, S_{20}.

In acest caz există un câmp vectorial $\mathfrak{F}$. Să aplicăm formula I a lui GREEN. Vectorul $\mathfrak{F}$ exprimându-se prin gradientul unei funcţiuni potenţiale $V: \mathfrak{F} = \nabla V$ rezultă

$$\int ds\, V \frac{\partial V}{\partial n} = \int d\sigma\, (\nabla V)^2$$

în care $\frac{\partial V}{\partial n}$ e cunoscut pe suprafeţele de limită.

Dacă pe lângă V ar exista şi o altă funcţiune V′ care să satisfacă condiţia $\frac{\partial V'}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n}$ atunci pentru funcţiunea $V - V'$ ar rezulta:

$$\int ds\, \{V - V'\} \frac{\partial \{V - V'\}}{\partial n} = 0$$

şi ca urmare obţinem

$$\int d\sigma\, (\nabla \{V - V'\})^2 = 0$$

ceea ce ne arată că $V - V' = cta.$

Aşa dar, când într'un spaţiu de primul ordin avem

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathfrak{F} = 0 \quad \text{şi} \quad \mathfrak{F}_n \neq 0$$

admiţând deci că pe suprafeţele de limită ale acelui spaţiu se cunoaşte $\frac{\partial V}{\partial n}$ (ceea ce formează problema lui NEUMANN) funcţia potenţială V în spaţiul dat obţine o soluţie unică şi bine determinată.

Din cele ce urmează mai putem vedea că V în spaţiul dat, obţine o soluţie unică şi bine determinată, dacă în locul mărimii $\frac{\partial V}{\partial n}$ se dă însuşi funcţia potenţială pe suprafeţele de limită formând problema lui DIRICHLET.

Demonstraţia e ca în cazul precedent.

Dacă pe lângă V ar mai exista şi V′ aşa fel ca pe suprafeţele de limită funcţia V′ să obţie aceleaşi valori ca V, rezultă că şi $V - V'$ va forma o soluţie pentru funcţia potenţială căutată.

Pe suprafaţa de limită obţinem: $V - V' = 0$.

Integralul de suprafaţă

$$\int ds \{V - V'\} \frac{\partial \{V - V'\}}{\partial n}$$

efectuat pentru suprafeţele de limită devine nul şi ca urmare rezultă:

$$\int d\sigma (\nabla \{V - V'\})^2 = 0$$

ceea ce ne arată că avem

$$V - V' = \text{const.} \quad \text{sau} \quad V = V' + \text{const.}$$

Funcţiunile V, V′ nu pot să difere decât printr'o constantă. Cazul de mai sus îl vom întâlni foarte des în cazul câmpului electrostatic, atunci când în câmp există numai corpuri metalice cu sarcini electrice superficiale.

Deoarece în cazul fenomenului electrostatic, vom avea pe suprafaţa dela infinit $\int_{S_\infty} ds\, V \frac{\partial V}{\partial n}$ egal cu zero, ne punem întrebarea ce condiţie trebue să îndeplinească V pentru ca integrala de mai sus pentru S_∞ să fie nulă.

Ţinând seama de $\frac{ds}{d\omega} = \frac{r^2}{1}$ integralul de suprafaţă ia forma $\int_{S_\infty} d\omega\, r^2\, V \frac{\partial V}{\partial n}$ ceeace ne arată că integralul pentru S_∞ va deveni nul, dacă $V \frac{\partial V}{\partial n}$ către infinit va descreşte mai repede ca $\frac{1}{r^2}$.

Spre exemplu dacă avem:
$\mathfrak{F} = -\nabla V$ ($\mathfrak{F}$ e dirijat în sensul în care V descreşte), rezultă

$$-V\frac{\partial V}{\partial n} = VF_n.$$

Dacă punem $-V\frac{\partial V}{\partial n} < k\frac{1}{r^2}$ va trebui să avem $V < k'\frac{1}{r^{1/2}}$ ceea ce se poate uşor controla.

Având $V < \frac{k'}{r^{1/2}}$ rezultă $-\frac{\partial V}{\partial n} < \frac{\frac{1}{2}k'}{r^{3/2}}$ în care $-\frac{\partial V}{\partial n}$ reprezintă o mărime pozitivă, astfel că $-V\frac{\partial V}{\partial n} < \frac{\frac{1}{2}k'^2}{r^2}$ în care facem $\frac{k'^2}{2} = k$.

Aşa dar, dacă V descreşte către infinit mai repede ca $\frac{1}{r^{1/2}}$ atunci $-\frac{\partial V}{\partial n}$ va descreşte mai repede ca $\frac{1}{r^{3/2}}$ şi $-V\frac{\partial V}{\partial n}$ mai repede ca $\frac{1}{r^2}$. Din cele de mai sus, deducem că integrala $\int_{S_\infty} ds\, V \frac{\partial V}{\partial n}$ devine nulă când condiţia $V < \frac{k'}{r^{1/2}}$ e satisfăcută. Intr'adevăr în cazul câmpului electrostatic având $V = \frac{k'}{r}$ rezultă că condiţia de mai sus e satisfăcută astfel că pentru S_∞ integrala $\int_{S_\infty} ds\, V \frac{\partial V}{\partial n}$ devine nulă.

Vom deosebi trei feluri de câmpuri vectoriale:

1. Câmpuri potenţiale. Ele nu posed turbioane. Vectorul câmpului se determină prin gradientul unei funcţiuni potenţiale scalare.

2. Câmpuri solenoidale. Acestea nu pose d sarcini. Vectorul câmpului se determină prin rotaţia unei funcţiuni vectoriale denumită funcţie potenţială vectorială.

3. Câmpuri cari posed şi sarcini şi turbioane. Vectorul unui astfel de câmp, se exprimă printr'o sumă de doi vectori corespunzători câmpurilor potenţial şi solenoidal.

Condiţiile de existenţă ale unui câmp potenţial iau forma:

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = \rho^* \ , \ \operatorname{div}_s \mathfrak{F} = F_{1n_1'} + F_{2n_2'} = \sigma^* \ ; \ \operatorname{rot} \mathfrak{F} = j^* = 0$$

$$\operatorname{rot}_s \mathfrak{F} = [\bar{n}_1', \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2] = g^* = 0 \ ; \ \mathfrak{F}_{n'\infty} = 0$$

div_s reprezintă condiţia de limită pentru suprafeţele de discontinuitate pentru componenta normală a vectorului. Pentru suprafaţa de limită dela infinit se dă $\mathfrak{F}_{n'\infty} = 0$.

Aşa dar se cunosc sarcinile volumetrice şi superficiale (ρ^*, σ^*) precum şi $\mathfrak{F}_{n'\infty} = 0$ pentru suprafaţa de limită dela infinit şi se cere să se determine vectorul câmpului $\mathfrak{F}$.

Aplicând formula a doua a lui GREEN, se determină mai întâi: $V = f(\rho^*, \sigma^*)$ denumită funcţie potenţială scalară iar vectorul câmpului apare în forma $\mathfrak{F} = -\nabla V$.

Vectorul eâmpului în cazul nostru e dirijat în sensul în care V descreşte. După cum vedem câmpul potenţial admite suprafeţe equipotenţiale şi e lipsit de turbioane.

Condiţiile de existenţă ale unui câmp solenoidal sunt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = \rho^* = 0 \ ; \ \operatorname{div}_s \mathfrak{F} = F_{1n_1'} + F_{2n_2'} = \sigma^* = 0 \ ; \ \operatorname{rot} \mathfrak{F} = j^*$$

$$\operatorname{rot}_s \mathfrak{F} = [\bar{n}_1', \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2] = g^* \ ; \ \mathfrak{F}_{n'\infty} = 0.$$

Un astfel de câmp nu posedă sarcini volumetrice şi superficiale; în schimb posedă câmpuri turbionare volumetrice şi superficiale.

In cazul acesta, tot cu ajutorul formulei a doua a lui GREEN se determină $\mathfrak{A} = f(j^* g^*)$ denumită funcţie potenţială vectorială, iar vectorul câmpului devine $\mathfrak{F} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$.

Se constată uşor că $\mathfrak{F}$ nu posedă sarcini, deoarece avem

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = (\nabla [\nabla \mathfrak{A}]) = ([\nabla \nabla] \mathfrak{A}) = 0.$$

Aşa dar dacă notăm prin $\mathfrak{F}_V$ şi $\mathfrak{F}_A$ câmpurile potenţial şi solenoidal expresia câmpului vectorial care posedă pe lângă sarcini şi turbioane va fi

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_V + \mathfrak{F}_A.$$

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Politechnica din Timişoara.

NEEGALITĂŢI CU INDICATORI DE ORDIN SUPERIOR

In *G. M.* XXXIII, pag. 444, am arătăt că avem neegalitatea

$$\varphi_\alpha(a^\alpha) \cdot \varphi_\beta(a^\beta) \geqslant \varphi_{\alpha+\beta}(a^{\alpha+\beta})$$

a fiind un număr prim.

In cele ce urmează îmi propun a arăta că dacă N, x şi y sunt numere întregi, avem:

$$\varphi_x(N^x) \cdot \varphi_y(N^y) \geqslant \varphi_{x+y}(N^{x+y}).$$

Am văzut mai sus că pentru $N = a^\alpha$, neegalitatea este stabilită.

Fie $N = a^\alpha \cdot b^\beta$, atunci avem:

$$\varphi_1(a^\alpha \cdot b^\beta) = \varphi_1(a^\alpha) \cdot \varphi_1(b^\beta)$$

$$= a^{\alpha-1} \cdot (a-1) \cdot b^{\beta-1} \cdot (b-1).$$

Presupunem acum că avem:

$$a - 1 = a_1^{\alpha_1} \cdot b_1^{\beta_1} \ldots$$

unde $a_1, b_1, \ldots$ sunt numere prime inferioare lui a, iar:

$$b - 1 = a^\varepsilon \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot b_2^{\beta_2} \ldots$$

unde $a_2, b_2, \ldots$ sunt numere prime diferite de a, dar mai mici ca b, însă putând fi egali cu factorii lui $(a-1)$.

Atunci avem:

$$\varphi_1(a^\alpha \cdot b^\beta) = a^{\alpha-1+\varepsilon} \cdot b^{\beta-1} \cdot a_1^{\alpha_1} \cdot b_1^{\beta_1} \ldots a_2^{\alpha_2} \cdot b_2^{\beta_2} \ldots$$

Dacă parte din factorii lui $(b-1)$ sunt egali cu factorii lui $(a-1)$ atunci numai exponenţii se schimbă, prin urmare putem scrie că:

$$\varphi_2(a^\alpha . b^\beta) = a^{\alpha-2+\varepsilon} . b^{\beta-2} . (a-1).(b-1)$$
$$a_1^{\alpha_1-1} . b_1^{\beta_1-1} \ldots (a_1-1)(b_1-1)\ldots$$
$$a_2^{\alpha_2-1} . b_2^{\beta_2-1} \ldots (a_2-1)(b_2-1)\ldots$$
$$= \varphi_2(a^\alpha) . \varphi_2(b^\beta) . a^{\varepsilon_2} . A_2 B_2$$

unde $\varepsilon_2 \geqslant 0$.

In general avem:

$$\varphi_i(a^\alpha . b^\beta) = \varphi_i(a^\alpha) . \varphi_i(b^\beta) . a^{\varepsilon_i} . A_i . B_i$$

unde i rămâne inferior exponenţilor.

Prin urmare vom avea:

$$\varphi_x(a^{\alpha x} . b^{\beta x}) = \varphi_x(a^{\alpha x}) . \varphi_x(b^{\beta x})\, a^{\varepsilon x} . A_x . B_x$$

şi

$$\varphi_y(a^{\alpha y} . b^{\beta y}) = \varphi_y(a^{\alpha y}) . \varphi_y(b^{\beta x})\, a^{\varepsilon y} . A_y . B_y$$

apoi:

$$\varphi_{x+y}[a^{\alpha(x+y)} . b^{\beta(x+y)}] = \varphi_{x+y}[a^{\alpha(x+y)}]$$
$$\varphi_{x+y}[b^{\alpha(x+y)}] . a^{\varepsilon x+y} . A_{x+y} . B_{x+y} .$$

Atunci:

$$\varphi_x(N^x) . \varphi_y(N^y) = \varphi_x(a^{\alpha x}) . \varphi_x(b^{\beta x})\, \varphi_y(a^{\alpha y}) . \varphi_y(b^{\beta y})$$
$$a^{\varepsilon x+\varepsilon y} . A_x . A_y . B_x . B_y .$$

Dar, conform relaţiei stabilită în *G. M.* XXXIII, pag. 444, apoi în nota dela pag. 262, G. M., XLVII, avem:

$$\varphi_x(a^{\alpha x}) . \varphi_y(a^{\alpha y}) \geqslant \varphi_{x+y}[a^{\alpha(x+y)}]$$
$$\varphi_x(b^{\beta x}) . \varphi_y(b^{\beta y}) \geqslant \varphi_{x+y}[b^{\beta(x+y)}].$$

De asemenea, în nota dela pag. 262, Vol. XLVII am arătat că:

$$A_i \text{ sau } B_i = 2^{i_1} . 3^{i_2} \ldots$$

Prin urmare:

$$A_x . A_y . B_x . B_y = 2^{x_1+x_1'+y_1+y_1'} . 3^{x_2+x_2'+y_2+y_2'} \ldots$$

Apoi avem:

$$\varphi_{x+y}(N^{x+y}) = \varphi_{x+y}[a^{\alpha(x+y)}]\, \varphi_{x+y}[b^{\beta(x+y)}]\, a^{\varepsilon x+y} . A_{x+y} . B_{x+y} .$$

Cum avem:

$$A_{x+y} \cdot B_{x+y} = 2^{x_1+x_1'+y_1+y_1'} \cdot 3^{x_2+x_2'+y_2+y_2'} \ldots$$

urmează că neegalitatea se reduce la:

$$\varphi_x(a^{\alpha x}) \cdot \varphi_x(b^{\beta x}) \cdot \varphi_y(a^{\alpha y}) \cdot \varphi_y(b^{\beta y})$$

$$a^{\varepsilon x+\varepsilon y} \geqslant \varphi_{x+y}[a^{\alpha(x+y)}] \cdot \varphi_{x+y}[b^{\beta(x+y)}]\, a^{\varepsilon x+y}.$$

In consecinţă pentru ca neegalitatea să rămână valabilă trebuie să mai arătăm că:

$$a^{\varepsilon x+\varepsilon y} \geqslant a^{\varepsilon x+y}.$$

In treacăt ţin să atrag atenţia că neegalitatea poate să rămână valabilă chiar pentru cazuri când $a^{\varepsilon x+\varepsilon y}$ ar rămâne, într'o oarecare limită, inferior lui $a^{\varepsilon x+y}$.

Este însă uşor de văzut că exponentul ε_i a lui a provine din factorii lui $(b-1)$, prin urmare vom avea:

$$a^{\varepsilon x+\varepsilon y} = a^{\varepsilon x+y}.$$

In consecinţă, neegalitatea este stabilită.

Exemplu numeric. Fie $N = 7^{\alpha} \cdot 19^{\beta}$, atunci avem:

$$\varphi_1(7^{\alpha}) = 7^{\alpha-1} \cdot 2 \cdot 3 \quad ; \quad \varphi_1(19^{\beta}) = 19^{\beta-1} \cdot 2 \cdot 3^2$$
$$\varphi_2(7^{\alpha}) = 7^{\alpha-2} \cdot 2^2 \cdot 3 \quad ; \quad \varphi_2(19^{\beta}) = 19^{\beta-2} \cdot 2^2 \cdot 3^3$$
$$\varphi_3(7^{\alpha}) = 7^{\alpha-3} \cdot 2^4 \cdot 3^2 \quad ; \quad \varphi_3(19^{\beta}) = 19^{\beta-3} \cdot 2^3 \cdot 3^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_i(7^{\alpha}) = 7^{\alpha-i} \cdot 2^i \cdot 3 \quad ; \quad \varphi_i(19^{\beta}) = 19^{\beta-i} \cdot 2^i \cdot 3^{i+1}$$

$$\varphi_1(7^{\alpha} \cdot 19^{\beta}) = \varphi_1(7^{\alpha}) \cdot \varphi_1(19^{\beta}) \cdot$$
$$\varphi_2(7^{\alpha} \cdot 19^{\beta}) = \varphi_2(7^{\alpha}) \cdot \varphi_2(19^{\beta}) \cdot 3$$
$$\varphi_3(7^{\alpha} \cdot 19^{\beta}) = \varphi_3(7^{\alpha}) \cdot \varphi_3(19^{\beta}) \cdot 3^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_i(7^{\alpha} \cdot 19^{\beta}) = \varphi_i(7^{\alpha}) \cdot \varphi_i(19^{\beta}) \cdot 3^i$$

In consecinţă vom avea:

$$\varphi_x(7^{\alpha x} \cdot 19^{\beta x}) = \varphi_x(7^{\alpha x}) \cdot \varphi_x(19^{\beta x}) \cdot 3^x$$

$$\varphi_y(7^{\alpha y} \cdot 19^{\beta y}) = \varphi_y(7^{\alpha y}) \cdot \varphi_y(19^{\beta y}) \cdot 3^y$$

$$\varphi_{x+y}[7^{\alpha(x+y)} \cdot 19^{\beta(x+y)}] = \varphi_{x+y}[7^{\alpha(x+y)}]\, \varphi_{x+y}[19^{\beta(x+y)}] \cdot 3^{x+y}.$$

Prin urmare neegalitatea este satisfăcută.

Pe o cale analogă, bine înțeles mult mai laborioasă, se poate arăta valabilitatea neegalității în cazul când N are mai mulți factori primi.

Este de asemenea ușor de arătat apoi că avem:

$$[\varphi_x(N^x)]^2 \geqslant \varphi_{2x}(N^{2x}).$$

Sau mai general:

$$[\varphi_x(N^x)]^n \geqslant \varphi_{nx}(N^{nx}].$$

Precum și:

$$\Pi\varphi_i(N^i) \geqslant \varphi_{\Sigma i}(N^{\Sigma i}).$$

COMANDOR I. LINTEȘ.

PROPRIETĂȚI ALE NORMALELOR LA CONICE

Résumé. Considérons sur une conique deux points M_1 et M_2, tels que les normales à la conique en M_1 et M_2 se coupent en un point de la conique. On montre que, pour une conique à centre, la doite M_1M_2 reste tangente à la développée de la conique, ou à une conique concentrique de même genre. Pour la parabole, la droite M_1M_2 reste tangente à la développée de la parabole, ou passe par un point fixe, le symétrique du sommet par rapport à la directrice.

1. Să considerăm conica cu centru

$$Ax^2 + By^2 = 1,$$

pe care dreapta $y = \lambda x + \mu$ o taie în punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Abscisele acestor puncte sunt date de ecuația

$$Ax^2 + B(\lambda x + \mu)^2 = 1 \quad , \quad (A + B\lambda^2)x^2 + 2B\lambda\mu x + B\mu^2 - 1 = 0.$$

Avem

$$(1) \qquad x_1 + x_2 = -\frac{2B\lambda\mu}{A + B\lambda^2} \quad , \quad x_1x_2 = \frac{B\mu^2 - 1}{A + B\lambda^2},$$

$$(2) \qquad y_1 + y_2 = \lambda x_1 + \mu + \lambda x_2 + \mu = \frac{2A\mu}{A + B\lambda^2},$$

$$(3) \qquad y_1y_2 = \lambda^2 x_1x_2 + \lambda\mu(x_1 + x_2) + \mu^2 = \frac{A\mu^2 - \lambda^2}{A + B\lambda^2}.$$

Normalele în $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ au ecuaţiile

$$(4) \qquad y - y_1 = \frac{B y_1}{A x_1}(x - x_1) \quad , \quad y - y_2 = \frac{B y_2}{A x_2}(x - x_2).$$

Scăzând, avem

$$y_1 - y_2 = \frac{B}{A} x \frac{x_1 y_2 - x_2 x_1}{x_1 x_2} + \frac{B}{A}(y_1 - y_2),$$

$$(y_1 - y_2)\left(1 - \frac{B}{A}\right) = \frac{B}{A} x \frac{(\lambda x_2 + \mu) x_1 - (\lambda x_1 + \mu) x_2}{x_1 x_2},$$

$$\lambda (x_1 - x_2)(A - B) = Bx \frac{\mu (x_1 - x_2)}{x_1 x_2},$$

$$(5) \qquad x = \frac{\lambda (A - B)(B\mu^2 - 1)}{B\mu (A + B\lambda^2)}.$$

Adunând (4),

$$2y - (y_1 + y_2) = \frac{Bx}{A}\left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}\right) - \frac{B}{A}(y_1 + y_2),$$

$$2y = (y_1 + y_2)\left(1 - \frac{B}{A}\right) + \frac{B}{A} \frac{\lambda (A - B)(B\mu^2 - 1)}{B\mu (A + B\lambda^2)} \left(2\lambda + \mu \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right).$$

Inlocuind din (1), (2), (3), avem

$$(6) \qquad y = \frac{(A - B)(A\mu^2 - \lambda^2)}{A\mu (A + B\lambda^2)}.$$

Să presupunem că normalele în M_1 şi M_2 la conică se taie pe conică. Deci coordonatele (5), (6) ale punctului de intersecţie ale normalelor M_1 şi M_2 verifică ecuaţia conicei. Avem

$$A \frac{\lambda^2 (A - B)^2 (B\mu^2 - 1)^2}{B^2 \mu^2 (A + B\lambda^2)^2} + B \frac{(A - B)^2 (A\mu^2 - \lambda^2)^2}{A^2 \mu^2 (A + B\lambda^2)^2} = 1,$$

$$(A - B)^2 A^2 B^2 (B + A\lambda^2) \mu^4 - AB [2 (A - B)^2 (A^2 + B^2) \lambda^2 +$$
$$AB (A + B\lambda^2)^2] \mu^2 + (A - B)^2 (B^3 \lambda^4 + A^3 \lambda^2) = 0.$$

Această ecuaţie în μ are rădăcinile

$$\mu_1^2 = \frac{(A - B)^2 \lambda^2}{AB (B + A\lambda^2)} \quad , \quad \mu_2^2 = \frac{B^3 \lambda^2 + A^3}{AB (A - B)^2}.$$

Dreptele $M_1 M_2$ au ecuaţiile

$$y = \lambda x \pm \frac{(A - B)\lambda}{\sqrt{AB\,(B + A\lambda^2)}} \quad , \quad y = \lambda x \pm \frac{1}{A - B}\sqrt{\frac{B^3\lambda^2 + A^3}{AB}}.$$

Prima reprezintă normala la conică paralelă cu direcţia λ, deci rămâne tangentă la desfăşurata conicei. A doua se poate scrie

$$(y - \lambda x)^2 c = A^3 + B^3\lambda^2 \quad , \quad c = AB\,(A - B)^2.$$

Infăşurătoarea se obţine scriind că este nul realizantul ecuaţiei de gradul al doilea în λ şi avem

$$\frac{x^2}{\frac{B^3}{c}} + \frac{y^2}{\frac{A^3}{c}} = 1,$$

o conică cu acelaşi centru şi de acelaşi gen ca şi conica dată. Deci, dreptele care taie o conică cu centru în două puncte în care normalele se taie pe conică, sunt tangente la o conică concentrică şi de acelaşi gen.

2. Să considerăm parabola $y^2 = 2px$ pe care dreapta $y = \lambda x + \mu$ o taie în punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Abscisele acestor puncte sunt date de

$$\lambda^2 x^2 + 2(\lambda\mu - p)\,x + \mu^2 = 0.$$

Avem

$$x_1 + x_2 = \frac{2(p - \lambda\mu)}{\lambda^2} \quad , \quad x_1 x_2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2},$$

$$(7) \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = \lambda(x_1 + x_2) + 2\mu = \dfrac{2p}{\lambda}, \\ y_1 y_2 = (\lambda x_1 + \mu)(\lambda x_2 + \mu) = \dfrac{2p\mu}{\lambda}. \end{cases}$$

Normalele în M_1 şi M_2 la parabolă sunt

$$(8) \quad y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \quad , \quad y - y_2 = -\frac{y_2}{p}(x - x_2).$$

Scăzând $\quad y_1 - y_2 = \frac{x}{p}(y_1 - y_2) + \frac{1}{p}(-x_1 y_1 + x_2 y_2),$

înlocuind $y_1 = \lambda x_1 + \mu$, $y_2 = \lambda x_2 + \mu$, reducând $x_1 - x_2$, obținem

$$x = \frac{p\lambda^2 + 2p - \lambda\mu}{\lambda^2}. \tag{9}$$

Adunând (8), avem

$$2y - (y_1 + y_2) = -\frac{x}{p}(y_1 + y_2) + \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{p}.$$

Inlocuind $y_1 = \lambda x_1 + \mu$, $y_2 = \lambda x_2 + \mu$, observând (7), obținem

$$y = -\frac{2\mu}{\lambda^2}. \tag{10}$$

Presupunând că normalele în M_1 și M_2 se taie pe parabolă, coordonatele (9), (10) verifică ecuația parabolei, și avem

$$\frac{4\mu^2}{\lambda^4} = 2p\frac{p\lambda^2 + 2p - \lambda\mu}{\lambda^2}, \quad 2\mu^2 + p\lambda^3\mu - p^2\lambda^2(\lambda^2 + 2) = 0.$$

Această ecuație în μ are rădăcinile

$$\mu_1 = -\frac{p\lambda}{2}(\lambda^2 + 2), \quad \mu_2 = p\lambda.$$

Dreptele $M_1 M_2$ au ecuațiile

$$y = yx - \frac{p\lambda}{2}(\lambda^2 + 2), \quad y = \lambda x + p\lambda.$$

Prima ecuație reprezintă normala la parabolă de direcție λ, care rămâne tangentă la desfășurata parabolei. Din a doua,

$$y = \lambda(x + p),$$

rezultă că dreapta $M_1 M_2$, care taie parabola în două puncte în care normalele se taie pe parabolă, trece prin punctul fix $x = -p$. $y = 0$, simetricul vârfului în raport cu directoarea parabolei [1]).

N. ABRAMESCU.

---

1) Examen de capacitate, 1902.

TRIUNGHIURI LIMITĂ

Proprietăţile figurilor geometrice pot fi exprimate — în general — prin relaţiuni între funcţiuni continue, de multe ori chiar algebrice, care converg uniform către limitele lor. Aceste proprietăţi rămân, prin urmare, valabile şi pentru figurile limită ce se obţin pe această cale.

Trebuie să adaog că acest principiu general de continuitate este aplicabil şi în cazul particular al triunghiului limită considerat în *Nota asupra ortocentrului*, G. M., Vol. XLVII, pag. 513. Ortocentrul acelui triunghiu limită posedă toate proprietăţile obişnuite ale ortocentrului unui triunghiu propriu zis, inclusiv şi pe acelea de a fi centrul cercului circumscris triunghiului anticomplimentar sau unul din centrele cercurilor înscrise triunghiului ortic.

Fiindcă, în această privinţă, textul Notei citit este defectuos, dăm aci demonstraţia directă a acestor proprietăţi.

Fie ABC un triunghiu în care presupunem că vârfurile A şi B rămân fixe, iar vârful C se deplasează pe dreapta BC, invariabilă ca poziţie. Fie A′ proiecţia vârfului A pe latura BC, iar H punctul de intersecţie al perpendicularei în B pe AB cu înălţimea AA′. H este ortocentrul triunghiului limită ABB, ce se obţine când punctul C se confundă cu B, variind pe dreapta BC.

Fie acum A_1, B_1, C_1 vârfurile triunghiului anticomplimentar. Când C se mişcă pe BC punctele B_1 şi C_1 se deplasează pe paralela dusă din A dreptei BC, rămânând simetrice în raport cu acest din urmă punct. La limită cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ devine cercul tangent în A, paralelei lui BC şi care trece prin simetricul lui A în raport cu B. *Centrul acestui cerc este punctul* H.

Pe de altă parte, fie B′ şi C′ proiecţiile vârfurilor B şi C respectiv pe laturile BC şi AB. *Dacă punctul* C *se deplasează pe* BC *dreapta* B′C′ *trece printr'un punct fix.*

Punem pentru aceasta $A'' \equiv (B'C', BC)$. Punctele B, C, A, A″ formează evident o diviziune armonică. Prin urmare când C variază punctele C′ şi A′ se corespund pe dreptele AB şi BC în omografie, fiindcă unui punct C′ îi corespunde un singur punct A′ şi reciproc. Punctul B fiind propriul său omolog, în cele două omografii rezultă că dreapta A″B′C′ trece printr'un punct fix P.

Acest punct se determină dând lui C două poziţiuni particulare pe BC şi anume: la infinit şi A'. Q fiind simetricul lui A în raport cu B este uşor de văzut că punctul P este intersecţia paralelei duse din Q la AB cu perpendiculara scoborîtă din A pe aceeaşi latură AB. Rezultă în definitiv că *triunghiul ortic corespunzător triunghiului limită* ABB *are unul din vârfuri în* A', *iar celelalte două pe dreapta* PB *confundate cu* B. Unghiul PBA' având bisectoarele BA şi BH centrele cercurilor înscrise în acest din urmă triunghiu ortic sunt două confundate în B, iar celelalte două respectiv în H şi în A.

Se demonstrează uşor că cercul lui EULER, circumscris triunghiului ortic, adică cercul trecând prin A' şi tangent în B dreptei PB este cercul lui EULER al triunghiului ABH. Aceasta confirmă odată mai mult, teorema bine cunoscută că cercul lui EULER al unui triunghiu este în acelaşi timp şi cercul lui EULER al triunghiurilor determinate de două din vârfurile triunghiului iniţial împreună cu ortocentrul aceluiaşi triunghiu.

* * *

Voi încheia prin a demonstra, sprijinindu-mă pe principiul general de continuitate, o proprietate remarcabilă a *hipocicloidei cu trei puncte de înapoiere.*

Se ştie că dreptele lui SIMSON ale unui punct M mobil pe cercul (O) circumscris triunghiului ABC învălue o epicicicloidă (Σ) cu trei puncte de înapoiere. Dintr'un punct δ, se pot duce acestei epicicloide trei tangente reale, iar pentru fiecare din aceste tangente există câte un punct pe cercul (O), astfel că dreptele lui SIMSON corespunzătoare să coincidă cu tangentele în chestiune. M, N, P fiind aceste puncte, triunghiurile ABC şi MNP sunt triunghiuri S, adică sunt înscrise în acelaşi cerc şi sunt circumscrise la aceeaşi parabolă. Punctul δ este ortopolul laturilor unuia sau altuia din triunghiurile ABC sau MNP în raport cu celălalt.

Se consideră acum două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$ înscrise în acelaşi cerc (O). Se ştie[1]) că triunghiul $\alpha\beta\gamma$ ce are ca laturi

---

1) A se vedea: Asupra unei propoziţiuni în legătură cu dreapta lui SIMSON, G. M., Vol. XLVII, pag. 215.

dreptele lui SIMSON $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ şi $\alpha\beta$ ale vârfurilor A, B, C în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ este asemenea cu ABC şi avem relaţiunile:

$$\alpha\beta = AB \sin\omega, \text{ etc.}$$

ω fiind unghiul dreptelor lui SIMSON ale unui punct de pe cercul (O) în raport cu cele două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$.

Presupunem că triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi vârfurile A şi B rămân fixe, iar vârful C se deplasează pe cercul (O) tinzând către B. In virtutea principiului de continuitate avem:

$$\lim . \alpha\beta = AB \lim . \sin\omega.$$

Când C se confundă cu B punctul α devine punctul de contact β' al dreptei lui SIMSON $\alpha\gamma$ cu învăluitoarea sa (Σ). De asemenea, punctul B se confundă cu γ. Unghiul ω devine unghiul dreptelor lui SIMSON ale punctului A în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ şi cu triunghiul limită ABB cele două puncte B fiind pe tangenta în B la cercul (O). Acest unghiu este egal cu unghiul dreptei $\gamma\alpha'$ cu raza OB. Deci:

$$\gamma\beta' = AB \sin . (OB, \gamma\alpha'). \qquad (1)$$

Presupunem acum că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt S. Considerăm dreptele lui SIMSON ale vârfurilor A, B, C, în raport cu triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi notăm cu α', β', γ' punctele de contact ale acestor drepte cu învăluitoarea lor (Σ). Am amintit mai înainte că aceste drepte SIMSON sunt concurente. Fie δ punctul lor comun. In acest caz particular, dreptele $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$ şi $\delta\gamma'$ sunt perpendiculare pe laturile triunghiurilor ABC astfel că din relaţiunea (1) deducem:

$$\delta\alpha' = h_a, \ \delta\beta' = h_b, \ \delta\gamma' = h_c$$

h_a, h_b şi h_c fiind înălţimile triunghiurilor ABC.

Exprimate sub altă formă aceste relaţiuni devin:

Cele trei tangente duse dintr'un punct la hipocicloida cu trei puncte de înapoiere învăluită de dreptele lui SIMSON, *sunt egale cu înălţimile triunghiului ale cărui vârfuri sunt punctele pentru care dreptele lui* SIMSON *coincid cu tangentele considerate.*

Caz particular:

Tangentele duse din ortocentrul unui triunghiu hipocicloidei cu trei puncte de înapoiere, învăluită de dreptele lui SIMSON *sunt egale cu înălțimile triunghiului.*

ȘERBAN GHEORGHIU.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE MECANICĂ „SPIRU HARET"

Subsemnații membri în Comisiunea pentru decernarea premiului de Mecanică „Spiru Haret", cercetând ultimul volum al *Gazetei Matematice* dela 15 Septemvrie 1941—15 Septemvrie 1942, am constatat următoarele:

1. Domnul EMIL S. MODÂLCĂ, elev al Școalei Politehnice din București se prezintă cu o notă de Mecanică asupra exercițiului Nr. 2, Vol. XLV, problema propusă Nr. 5627 și problemele rezolvate Nr. 5495, 5374, 5147, 5510, 5511.

Domnia-sa dă dovada unui deosebit interes pentru Mecanică și a unor frumoase cunoștiințe în acest domeniu.

2. Domnul RADU P. VOINEA, elev al Școalei Politehnice din București se prezintă cu problema propusă Nr. 5590 și problemele rezolvate Nr. 5556, 5555.

Domnia-sa arată în aceste lucrări un remarcabil spirit matematic și promițătoare speranțe pentru mai târziu.

In aceste condiții propunem acordarea D-lui EMIL S. MODÂLCĂ și D-lui RADU P. VOINEA a câte unui premiu de 5.000 lei din disponibilul de 10.000 lei pentru anul în curs.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PRÊMIULUI „SPIRU HARET"

G. G. CONSTANTINESCU, AL. STOENESCU și GABRIELA ȚIȚEICA.

Acest raport s'a citit și aprobat în Adunarea generală din 18 Februarie 1943.

NOTE MATEMATICE

57. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Când N_9 începe cu 2 am găsit următoarele 89 soluţii:

N_9	N	N_9	N
203 846 751	1 834 620 759	217 586 034	1 958 274 306
205 638 471	1 850 746 239	218 305 647	1 964 750 823
205 643 718	1 850 793 462	218 745 036	1 968 705 324
207 483 561	1 867 352 049	231 657 084	2 084 913 756
210 384 675	1 893 462 075	231 708 546	2 084 376 914
210 563 847	1 895 074 623	237 560 841	2 138 047 569
210 748 356	1 896 735 204	237 608 451	2 138 476 059
213 756 084	1 923 804 756	237 610 845	2 138 497 605
213 760 845	1 923 847 605	237 865 041	2 140 785 369
213 786 504	1 924 078 536	237 865 104	2 140 785 936
213 864 507	1 924 780 563	238 645 071	2 147 805 639
213 870 564	1 924 835 076	238 675 041	2 148 075 369
214 037 865	1 926 340 785	238 675 104	2 148 075 936
214 038 675	1 926 348 075	238 710 564	2 148 395 076
214 083 756	1 926 753 804	240 378 651	2 163 407 859
214 507 638	1 930 568 742	240 386 751	2 163 480 759
214 508 736	1 930 578 624	240 563 871	2 165 074 839
214 738 650	1 932 647 850	240 817 536	2 167 357 824
214 763 850	1 932 874 650	241 037 865	2 169 340 785
215 360 784	1 938 247 056	241 083 756	2 169 753 804
215 378 064	1 938 402 576	243 718 650	2 193 467 850
215 406 378	1 938 657 402	257 608 341	2 318 475 069
215 407 836	1 938 670 524	257 610 834	2 318 497 506
215 648 073	1 940 832 657	257 638 401	2 318 745 609
215 837 640	1 942 538 760	257 638 410	2 318 745 690
215 843 067	1 942 587 603	260 783 541	2 347 051 869
215 867 304	1 942 805 736	260 873 451	2 347 861 059
215 870 634	1 942 835 706	261 087 345	2 349 786 105
216 375 840	1 947 382 560	265 718 430	2 391 465 870
216 753 804	1 950 784 236	267 083 541	2 403 751 869
216 754 038	1 950 786 342	267 108 354	2 403 975 186
216 758 304	1 950 824 736	267 851 043	2 410 659 387
217 084 536	1 953 760 824	268 375 401	2 415 378 609
217 485 360	1 957 368 240	268 375 410	2 415 378 690
217 563 048	1 958 067 432	268 750 341	2 418 753 069
217 563 804	1 958 074 236	268 751 034	2 418 759 306
217 564 038	1 958 076 342	273 486 501	2 461 378 509

1) Urmare la Nota 46 de la pag. 449, Vol. XLVIII.

N_9	N	N_9	N
273 486 510	2 461 378 590	278 603 541	2 507 431 869
274 835 401	2 473 518 609	285 374 601	2 568 371 409
274 835 410	2 473 518 690	285 374 610	2 568 371 490
275 368 401	2 478 315 609	285 760 341	2 571 843 069
275 368 410	2 478 315 690	285 761 034	2 571 849 306
276 348 501	2 487 136 509	287 104 563	2 583 941 067
276 348 510	2 487 136 590	287 154 630	2 584 391 670
278 610 354	2 507 493 186		

G-L GH. BUICLIU.

58. *Asupra indicatorilor.* Domnul COMANDOR I. LINTEŞ a definit (G. M. nota 14, vol. XLVII, pag. 165) nişte numere, pe care D-sa le numeşte numere inamice, a căror existenţă depinde de posibilitatea de a găsi două numere A şi B, diferite între ele, astfel încât

$$(1) \qquad \sigma(A) = \sigma(B)$$

unde $\sigma(I)$ înseamnă suma numerelor prime cu I şi mai mici decât I.

In cele ce urmează îmi propun să demonstrez, că înafară de $A = 1$, $B = 2$, egalitatea (1) nu poate avea loc decât dacă $A = B$.

Voi demonstra de asemenea, că înafară de excepţia de mai sus, egalitatea:

$$(2) \qquad \pi(A) = \pi(B)$$

unde cu $\pi(I)$ am notat produsul numerelor prime cu I şi mai mici decât I, nu poate avea loc decât dacă $A = B$.

Prin urmare cu suma şi produsul numerelor prime cu un număr şi mai mici decât el, se întâmplă tocmai invers decât cu indicatorii, pentru care s'a enunţat teorema:

La un indicator numeric corespond cel puţin două numere diferite.

Această teoremă a fost verificată pentru numere ori cât de mari, a căror factorizare este cunoscută, însă nu a putut fi, până în prezent demonstrată în caz general.

I. Din formula $\sigma(A) = \frac{1}{2} A \varphi(A)$ care exprimă suma numerelor prime cu A şi mai mici decât A, cum $\varphi(A)$ este, înafară de $A = 1$ şi $A = 2$, par, se deduce că pentru $A \neq 2$, $\sigma(A)$ se împarte întotdeauna cu A.

In egalitatea (1) să presupunem că cel puţin unul din numerele A şi B conţine un factor prim impar; fără să restrângem generalitatea problemei, fie A acel număr şi fie p cel mai mare număr prim impar conţinut de A. Cum $\sigma(A)$ se împarte cu p, trebuie ca şi $\sigma(B)$ să se împartă cu p. Pentru aceasta este necesar fie ca B să conţină pe p, fie să conţină factori primi, impari de forma $2hp + 1$. Deci şi B conţine factori primi impari şi fie q cel mai mare dintre ei. Din cele spuse mai sus, rezultă:

(3) $$p \leqslant q.$$

Repetând raţionamentul, însă plecând dela B în loc de A, deducem

(4) $$q \leqslant p.$$

Din (3) şi (4) rezultă

$$p = q \qquad A = A_1 p^{\alpha} \qquad B = B_1 p^{\beta}$$

unde A_1 şi B_1 conţin numai factori primi mai mici decât p.

Cu aceste valori, (1) devine:

$$\sigma(A_1)\, p^{2\alpha-1}(p-1) = \sigma(B_1)\, p^{2\beta-1}(p-1)$$

$$\therefore \quad \alpha = \beta \qquad \sigma(A_1) = \sigma(B_1).$$

Din aproape în aproape deducem:

$$\sigma(A_2) = \sigma(B_2)$$

$$\vdots$$

$$\sigma(A_n) = \sigma(B_n)$$

unde $$A_i = A_{(i+1)}\, p^s \qquad B_i = B_{(i+1)}\, p^s.$$

p fiind, de astă dată, cel mai mare număr prim care intră în descompunerea lui A_i şi B_i. A şi B fiind numere finite, trebuie ca şi şirul operaţiilor de mai sus să fie finit şi prin urmare vom ajunge la nişte numere A_n şi B_n care nu vor mai conţine factori primi impari. Insemnând cu k ansamblul factorilor primi suprimaţi urmează că trebuie să avem:

$$A = A_n\, k = 2^{\alpha} k \quad \text{şi} \quad B = B_n\, k = 2^{\beta} k.$$

Inlocuind în (1), rezultă

$$\sigma(2^{\alpha}) = \sigma(2^{\beta}) \tag{6}$$

$$\alpha = \beta$$

şi deci $A = B$. Excepţie face cazul $k = 1$ când egalitatea (6) poate avea loc şi pentru $\alpha = 0$, $\beta = 1$. (In cazul când k este diferit de 1, nu putem lua $\alpha = 0$, deoarece factorul 1 nu apare explicit în descompunerea în factori primi a unui număr). Avem astfel soluţia $A = 1, B = 2$ care este o soluţie pur formală, deoarece $\varphi(1) = 1$ este introdus numai pentru necesităţi de simetrie în rezultate. Deci:

Inafară de $A = 1$, $B = 2$, *egalitatea* $\sigma(A) = \sigma(B)$ *nu poate să existe decât dacă* $A = B$.

II. Vom presupune $A \leqslant B$, $\pi(A)$, produsul numerelor prime cu A şi mai mici decât A, se împarte cu toate numerele prime absolute, mai mici decât A şi neconţinute de A. Din egalitatea:

$$\pi(A) = \pi(B) \tag{2}$$

rezultă că şi $\pi(B)$ trebuie să fie prim cu ansamblul acelor numere prime, deci că B nu trebuie să conţină niciun număr prim mai mic ca A, pe care nu-l conţine şi A.

Repetând raţionamentul asupra numerelor prime mai mici tot decât A, dar neconţinute de B, deducem că ele nu trebuie să fie conţinute nici de A.

De aici se deduce că B se împarte cu toate numerele prime absolute care împart pe A şi cu niciun altul înafară de acestea şi mai mici decât A. In acest caz un număr dacă este prim cu A este prim şi cu B. Prin urmare pentru a exista egalitatea (2) trebuie ca toate numerele prime cu A şi mai mici decât A să fie aceleaşi cu numerele prime cu B şi mai mici decât B. Aceasta nu se poate decât dacă $A = B$ sau dacă $A = 1$, $B = 2$, căci în cazul când $A < B$ cum printre numerele prime cu B şi mai mici decât el este şi $B - 1 \geqslant A$, urmează că $B - 1 = A$ şi A este prim cu A, ceea ce nu are loc decât în cazul, oarecum convenţional când $A = 1$. Deci:

Inafară de $A = 1$, $B = 2$, *egalitatea* $\pi(A) = \pi(B)$ *nu poate să existe decât dacă* $A = B$.

IOAN B. FLORESCU.

59. *Generalizarea problemei 5507.* Considerăm sumele:

$$S_p = \sin ma - C_p^1 \sin(m-1)a + C_p^2 \sin(m-2)a - \ldots$$
$$\ldots (-1)^p C_p^p \sin(m-p)a$$

$$S_p' = \cos ma - C_p^1 \cos(m-1)a + C_p^2 \cos(m-2)a - \ldots$$
$$\ldots (-1)^p C_p^p \cos(m-p)a$$

în care m şi p sunt numere întregi pozitive şi $m > p$.

Notăm:

$$x = \cos a + i \sin a$$

şi dacă înmulţim pe S_p cu $i = \sqrt{-1}$ şi adunăm cu S_p' obţinem:

$$S_p' + i \cdot S_p = x^m - C_p^1 x^{m-1} + C_p^2 x^{m-2} - \ldots (-1)^p C_p^p x^{m-p} =$$
$$= x^{m-p}(x-1)^p = (\cos a + i \sin a)^{m-p}$$
$$\left(2 \sin \frac{a}{2}\right)^p \left[\cos \frac{\pi + a}{2} + i \sin \frac{\pi + a}{2}\right]^p$$

din care, aplicând formula lui MOIVRE, deducem:

$$S_p = \left(2 \sin \frac{a}{2}\right)^p \sin\left(p \frac{\pi}{2} + (2m-p)\frac{a}{2}\right)$$

$$S_p' = \left(2 \sin \frac{a}{2}\right)^p \cos\left(p \frac{\pi}{2} + (2m-p)\frac{a}{2}\right).$$

Pentru cazul $m = p$ găsim sumele stabilite, pe aceeaşi cale, în prob. 24, cap. 24, *Culegerea de Probleme Trigonometrie.* Partea I (Suma S_1 din acea problemă trebuie rectificată, ultimul termen find $(-1)^{m-1} C_m^{m-1} \sin a$).

Folosind relaţiile stabilite mai sus, problema 5507 rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII, pag. 233, se poate generaliza astfel:

$$E = \frac{\sin ma - C_p^1 \sin(m-1)a + C_p^2 \sin(m-2)a - \ldots \sin(m-p)a}{\sin na - C_q^1 \sin(n-1)a + C_q^2 \sin(n-2)a - \ldots \sin(n-q)a}$$
$$= \left(2 \sin \frac{a}{2}\right)^{p-q} \frac{\sin\left[p \frac{\pi}{2} + (2m-p)\frac{a}{2}\right]}{\sin\left[q \frac{\pi}{2} + (2n-q)\frac{a}{2}\right]}.$$

Dacă alegem valori convenabile astfel ca

$$2m - p = 2n - q,$$

iar p şi q să fie de aceeaşi paritate, avem:

$$E = \left(2\sqrt{-1}\sin\frac{a}{2}\right)^{p-q}$$

care este şi cazul probl. 5507 unde:

$$a = 2\alpha \quad , \quad m = 3 \quad , \quad n = 2 \quad , \quad p = 2 \quad , \quad q = 4,$$

iar

$$E = -\frac{1}{4\sin^2 d}.$$

Urmând aceeaşi cale găsim pentru sumele:

$$s_p = \sin ma + C_p^1 \sin(m-1)a + \ldots + \sin(m-p)a$$

$$s_p' = \cos ma + C_p^1 \cos(m-1)a + \ldots + \cos(m-p)a$$

următoarele valori:

$$s_p = \left(2\cos\frac{a}{2}\right)^p \sin(2m-p)\frac{a}{2}$$

$$s_p' = \left(2\cos\frac{a}{2}\right)^p \cos(2m-p)\frac{a}{2}.$$

MIRCEA ADAM.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societăţii Politehnice din România. Anul LVII, Nr. 2. Februarie 1943. D. GERMANI: † ANDREI IOACHIMESCU. IUL. MATEESCU: Elemente pentru calculul conductelor. ER. TOPORESCU: Despre Entropie. AL. T. GHENEA: Pregătirea profesională a lucrătorilor. GH. PAREPEANU: Incercările eternitului.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXIII, Nr. 5. Iulie 1943. P. SERGESCU: Şcoala astronomică din Cracovia în veacul al XV-lea. I. I. STAMATE: O problemă de aplicaţii geometrice ale analizei matematice. Note matematice, Probleme rezolvate şi propuse.

Revista Matematica Hispano-Americana. 1943, Nr. 2. T. R. BACHILLER: DAVID HILBERT. L. FANTAPPIE: Teoria unitară a cauzalităţii şi finalităţii în fenomenele fizice şi biologice, în mecanica ondulatorie şi relativistă. S. RIOS: Asupra reordonării seriilor funcţionale şi aplicaţii. FR. SANVISENS: Asupra funcţiunilor analitice n-lineare. L. VIGIL: Asupra seriei lui TAYLOR prelungibilă şi neprelungibilă.

România Aeriană. Anul XVII, Nr. 6. Iunie 1943. Doi ani de biruinţă Românească. C. G. NAUMESCU: Dela aviaţia comercială de ieri la cea de mâine. A. UDREA: ING. GR. ZAMFIRESCU. P. I. CARP: Motorul de aviaţie de azi şi de mâine. LAELIUS POPESCU: Aripile Bugului. *** Primul zburător al Ţării. M. KONTESCHWELLER: Noui arme radiolectrice. M. STROICI: Tir elementar şi tir aerian. DAN RADIANU: Port-avioanele. VALENTIN POPESCU: Noui orientări în sborul fără motor.

C-DOR I. LINTEŞ. Asupra autofretării ţevilor prin presiuni exterioare. (Extras din Revista Artileriei).

CERERI

322. Regretatul GH. EM. FILIPESCU, îşi luase angajamentul să alcătuiască un calendar al *Gazetei Matematice*.

Se poate găsi un succesor al lui pentru realizarea acestei idei?

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

C. ALASIA. Alcuni problemi di minimo.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.
C. ALASIA. L'Equazione di LAPLACE.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2130. *Care este numărul al cărui logaritm zecimal este jumătatea lui? Care sunt numerele ale căror mantise sunt identice cu jumătatea lor?*

I. IONESCU.

I. *Partea întâi a problemei.* Trebuie să avem

$$(1) \qquad y = \log x - \frac{x}{2} = 0$$

$$\therefore \quad y' = \frac{1}{x \, \mathrm{L}10} - \frac{1}{2} = 0$$

aşa că şirul lui ROLLE al ecuaţiei (1) este

$$x = 0 \quad ; \quad x = \frac{2}{L\,10} \quad ; \quad x = +\infty$$

$$y = -\infty \quad ; \quad y < 0 \quad ; \quad y < 0$$

căci ultima neegalitate se deduce din

$$\lim_{x \to \infty} . y = \lim_{x \to \infty} . \log x . \lim . \left[1 - \frac{x}{2 \log x}\right] = -\infty.$$

Rezultă că ecuaţia (1) nu are nici o rădăcină şi deci partea întâi a problemei *nu are soluţie.*

Aceasta se poate vedea şi din variaţia funcţiei y, variaţie pusă sub forma obişnuită de tabel

x	0		$\frac{2}{L\,10}$		$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-0{,}49\ldots$ Max.	$\searrow$	$-\infty$

Se vede şi din acest tabel că y nu se anulează pentru nici o valoare a lui x.

II. *Partea a doua a problemei.* Dacă m este caracteristica lui $\log x$, trebuie să avem

$$\log x = m, \quad \frac{x}{2} \tag{2}$$

m putând avea valori întregi pozitive sau negative.

Observăm dela început că $\frac{x}{2}$ nu este totdeauna număr întreg şi că de asemeni nici x nu este neapărat întreg. El poate fi un număr fracţionar de forma

$$\alpha, \beta\gamma\delta\ldots$$

şi atunci şi $\frac{x}{2}$ va fi un număr fracţionar de forma

$$\alpha', \beta'\gamma'\delta'\ldots$$

ceea ce nu are sens în compunerea părţii zecimale a numărului

zecimal m, $\frac{x}{2}$. Pentru a căuta soluţii în spiritul şi înţelesul enunţului trebuie să convenim că mantisa lui $\log x$ se obţine suprimând virgula, care separă partea întreagă de partea zecimală a lui $\frac{x}{2}$, în cazul când acest număr nu este întreg. De exemplu dacă

$$x = 1{,}14 \quad \therefore \quad \frac{x}{2} = 0{,}57$$

numărul 1,14 va fi soluţie dacă mantisa lui $\log 1{,}14$ ar fi 057, care este tocmai $\frac{x}{2}$ fără virgula dintre partea întreagă şi partea zecimală.

Caracteristica lui $\log x$ fiind m, avem neapărat

$$10^m < x < 10^{m+1}$$

şi deci putem pune

$$x = a\,10^m$$

unde $1 < a < 9{,}99\ldots$, iar m un întreg pozitiv sau negativ.

Inlocuind în (2) avem

$$\log a\,10^m = m + \frac{a}{20} \qquad \therefore \quad m + \log a = m + \frac{a}{20}$$

sau trecând totul în membrul întâi

$$(3) \quad y = \log a - \frac{a}{20} = 0 \qquad \therefore \quad y'_a = \frac{1}{a\,\mathrm{L}10} - \frac{1}{20} = 0.$$

Formăm şirul lui ROLLE al ecuaţiei (3) şi găsim că y se anulează pentru $1 < a < 20$.

Intrebuinţând una din cunoscutele metode de aproximaţie se găseşte

$y(1) = -0{,}05 < 0$ şi $y(2) = 0{,}20103 > 0$ deci $1 < a < 2$.

Apoi din aproape în aproape, găsim

$y(1{,}140287) = -0{,}0000002 < 0$ şi $y(1{,}140288) = 0{,}00000013$

ceea ce arată că rădăcina ecuaţiei (3) este dată de

$$1{,}140287\ldots < a < 1{,}140288\ldots$$

Prin urmare x trebuie căutat între numerele date de neegalităţile

$$(4) \qquad 10^m \times 1{,}140287\ldots < x < 10^m \times 1{,}140288\ldots$$

Din (4) deducem

(5) $\quad m + 0{,}057011\ldots < \log x < m + 0{,}057012\ldots$

(6) $\quad 10^m \times 0{,}570143\ldots < \frac{x}{2} < 10^m \times 0{,}570144\ldots$

Din (5) şi (6) se vede că, cu convenţia dela început $\log x$ are ca mantisă pe $\frac{x}{2}$, dacă $m = 0$.

Prin urmare soluţia părţii a doua a problemei este numărul x dat de

$$1{,}140287\ldots < x < 1{,}140288\ldots$$

Notă. 1°. O soluţie analogă s'a primit dela D-l C. D. EFTIMIE (elev-inginer, Bucureşti). D-sa s'a oprit însă la neegalităţile (4), afirmând că x este dat de acele neegalităţi, oricare ar fi întregul m pozitiv sau negativ.

2°. S'a primit o soluţie, puţin riguroasă, deşi cu rezultate numerice exacte, dela D-l M. D. COTARIU (Brăila).

3°. Prima parte se rezolvă imediat pe cale grafică observând că, curbele

$$y = \log x \quad \text{şi} \quad y = \frac{x}{2}$$

nu se întretaie.

4°. Partea a doua a problemei se poate extinde căutând a găsi numerele x al căror log. zecimal să aibă ca mantisă pe $\frac{x}{n}$, cu aceeaşi convenţie ca în cazul lui $n = 2$. Dăm de curiozitate soluţiile pentru $n \leqslant 10$:

$13{,}71\ldots < x < 13{,}72\ldots$ cu $1{,}13704\ldots < \log x < 1{,}13735\ldots$

$1{,}087\ldots < x < 1{,}1088\ldots$ cu $0{,}3623\ldots < \frac{x}{3} < 0{,}3696\ldots$ şi $0{,}03623\ldots < \log x < 0{,}03663\ldots$

$1{,}063\ldots < x < 1{,}064\ldots$ „ $0{,}2657\ldots < \frac{x}{4} < 0{,}266\ldots$ „ $0{,}02653\ldots < \log x < 0{,}02694\ldots$

$1{,}050\ldots < x < 1{,}051\ldots$ „ $0{,}210\ldots < \frac{x}{5} < 0{,}2102\ldots$ „ $0{,}02119\ldots < \log x < 0{,}02160\ldots$

$1{,}040\ldots < x < 1{,}041\ldots$ „ $0{,}1733\ldots < \frac{x}{6} < 0{,}1735\ldots$ „ $0{,}01703\ldots < \log x < 0{,}01735\ldots$

$1{,}034\ldots < x < 1{,}035\ldots$ „ $0{,}1477\ldots < \frac{x}{7} < 0{,}1478\ldots$ „ $0{,}01452\ldots < \log x < 0{,}01494\ldots$

$1{,}030\ldots < x < 1{,}031\ldots$ „ $0{,}1287\ldots < \frac{x}{8} < 0{,}1288\ldots$ „ $0{,}01284\ldots < \log x < 0{,}01326\ldots$

$1{,}026\ldots < x < 1{,}027\ldots$ „ $0{,}1140\ldots < \frac{x}{9} < 0{,}1141\ldots$ „ $0{,}01115\ldots < \log x < 0{,}01157\ldots$

$1{,}0239\ldots < x < 1{,}0240\ldots$ „ $0{,}10239\ldots < \frac{x}{10} < 0{,}10240\ldots$ „ $0{,}01125\ldots < \log x < 0{,}01030\ldots$

. . . . . .

Se observă din soluţiile precedente că dacă pentru $n = 1$ limităm mantisa la 2 cifre zecimale atunci găsim soluţii de numere întregi şi anume

$x = 13$ cu $\log 13 = 1{,}13\ldots$ şi $x = 14$ cu $\log 14 = 1{,}14\ldots$

5°. Problema se poate rezolva la fel pentru orice bază de numeraţie.

6°. Partea întâi a problemei se poate pune şi pentru *numere negative*. In adevăr, avem

$$y = \log x - \frac{x}{2} = \frac{2\log x - x}{2} = \frac{\log x^2 - x}{2} = 0.$$

Punând pe y sub această formă se vede că x poate fi şi negativ. Se constată uşor pe un grafic că curbele

$$z = \log x \quad \text{şi} \quad z = -x$$

nu se întretaie pentru nici o valoare negativă a lui x. Deci nu avem soluţii nici în cazul $x < 0$.

7°. Am redijat această problemă cu învoirea D-lui I. IONESCU.

G-L GH. B.

PROBLEMA 3332. *Din şirul patratelor consecutive se opresc numai ultimele două cifre. Cum se poate deduce fiecare grupă de două cifre din precedenta?*

C. C. POPOVICI [1]).

Fie N un număr întreg, n numărul format de ultimele sale două cifre şi N′ numărul format de restul cifrelor. Avem

$$N = 100N' + n$$

$$\therefore\ N^2 = 100^2N'^2 + 200N'n + n^2 = (100N' + 2n)\,N' \times 100 + n^2 \quad (1)$$

egalitate care arată că N^2 şi n^2 au aceeaşi terminaţie de 2 cifre.

Din (1) rezultă că ultimele 2 cifre ale patratelor se reproduc din 100 în 100. Deci, pentru rezolvarea problemei ne putem mărgini numai la patratele numerelor N de 2 cifre, cifra zecilor lui N putând fi şi zero, adică

$$01 \leqslant N \leqslant 99.$$

Fie acum $M > N$ două numere care diferă cu 50

$$M = N + 50$$

$$\therefore\ M^2 - N^2 = 100\,(N + 25).$$

---

1) Pentru numele propunătorului a se vedea erata dela pag. 238, Vol. XXXI, *Gazeta Matematică*.

De unde rezultă că dacă 2 numere diferă cu 50, patratele lor se termină cu acelaşi grup de 2 cifre, adică terminaţiile de 2 cifre ale patratelor numerelor dela *01 la 49* se reproduc în mod identic la numerele dela 51 la 99, aşa că putem considera numai terminaţiile patratelor numerelor dela 01 la 49. Aceste numere formează o progresie aritmetică.

Fie P şi Q două numere egal depărtate de extremi, avem

$$P = 50 - Q$$

$$\therefore \quad P^2 - Q^2 = 100 \times (25 - Q)$$

relaţie care arată că în şirul numerelor considerate, dela 01 la 49, numerele egal depărtate de extremi, au aceeaşi terminaţie de 2 cifre, cu alte cuvinte patratele numerelor dela 01 la 49 se reproduc în sens invers începând dela $\frac{1}{2} \times 50 = 25$.

Avem prin urmare în intervalul 01—99 şi deci pentru toate numerele, numai 25 de grupe de 2 cifre, terminaţiuni de patrate perfecte.

De aci rezultă că 3 terminaţii consecutive t_1, t_2, t_3 sunt consecutive şi în ordinea t_3, t_2, t_1, adică dacă ne dăm terminaţia t_2, terminaţia care o urmează poate fi atât t_1 cât şi t_3.

Să căutăm acum dacă şi când avem terminaţii identice. Fie pentru aceasta $A < B \leqslant 25$ două numere din şirul 01 — 25. Ca terminaţiile patratelor lor să fie identice trebuie ca

$$B^2 - A^2 = (B + A)(B - A) = \text{mult. } 100$$

A şi B trebuind să fie de aceeaşi paritate. Primul membru al acestei egalităţi trebuind să fie divizibil prin 25, trebuie ca fiecare factor în parte să se dividă prin 5 sau cel puţin unul din ei să se dividă prin 25. Ultimul caz nu-i posibil căci de oarece $A < 25$ şi $B \leqslant 25$ suma lor este mai mică decât 50 şi nu se divide prin 25 decât când este egală cu 25 ceea ce nu se poate căci A şi B sunt de aceeaşi paritate. Rămâne că $B + A$ şi $B - A$ se divide fiecare prin 5. In acest caz suma

$$(B + A) + (B - A) = 2B$$

şi diferenţa

$$(B + A) - (B - A) = 2A$$

se divide prin 5, deci atât A cât şi B se divide prin 5 şi cum sunt de aceeaşi paritate, ambele se termină sau cu 5 sau cu 0.

Conchidem că în şirul numerelor dela 01 la 25 numerele terminate în 0 sau în 5 au patratele cu terminaţii identice şi anume 00 sau 25.

După aceste consideraţiuni, fie o terminaţie dată $10a + b$, de 2 cifre, şi să ne propunem a căuta terminaţia următoare. Fie $10x + y$ un număr cuprins între 01 şi 25, al cărui patrat se termină în $10a + b$. Terminaţia următoare va fi dată de acea a patratului lui $10x + y + 1$ unde $x = 0,1$ sau 2. Avem

$$(10x + y)^2 = 100m + 10a + b$$

sau $$20xy + y^2 = 100m' + 10a + b.$$

De aici rezultă imediat cifra y căci se cunoaşte b, terminaţia lui y^2. Inlocuind pe y prin valoarea găsită se deduce x.

Fie de exemplu $10a + b = 48$. Avem

$$20xy + y^2 = 100m' + 84$$

y^2 terminându-se în 4, avem

$$y = 2 \text{ sau } 8$$

şi deci $$x = 2 \text{ sau } 2$$

de unde rezultă $10x + y = 22$ sau 28

aşa că terminaţiile care urmează după 84 pot fi acelea ale numerelor

$$21^2 = 441 \text{ sau } 23^2 = 529$$
$$27^2 = 729 \text{ sau } 28^2 = 841$$

adică 41 sau 29.

Când terminaţia dată este 00, numerele ale căror patrate au această terminaţie sunt 0,10 sau 20. Terminaţiile vecine sunt date de

$01^2 = 01$; $09^2 = 81$; $11^2 = 121$; $19^2 = 361$ sau $21^2 = 441$

adică acele terminaţii pot fi

01, 21 sau 41.

Când terminaţia dată este 25, numerele ale căror patrate au această terminaţie sunt 05, 15 sau 25. Terminaţiile vecine sunt date de

$04^2 = 16$; $06^2 = 36$; $14^2 = 196$ sau $24^2 = 576$

acele terminaţii sunt

16, 36, 96 sau 76.

Din demonstrațiile de până acum rezultă că *dacă se dau cele 2 cifre terminale ale unui patrat perfect* nu *se pot deduce cifrele terminale următoare dar se pot deduce două grupe (sau patru grupe când terminația este 00 sau 25) care încadrează terminația dată.*

Această concluzie se poate enunța în felul următor pentru o terminație dată. De exemplu pentru cazul numeric cercetat putem da următorul enunț:

Dacă un patrat perfect se termină cu 84 atunci patratul următor se termină cu 29 sau 41, iar patratul precedent se termină cu 41 sau 29.

Enunțuri analoage avem pentru oricare altă terminație, cu excepția terminațiilor 00 și 25 pentru care atât pentru terminația precedentă cât și pentru cea următoare sunt posibile 4 terminații.

G-L GH. BUICLIU.

Notă. 1°. S'a primit o soluție acceptabilă dela D-l R. I. SPATHY, pe când era elev la liceul „Matei Basarab", București.

2°. Se pot pune problema analoage pentru terminațiile de 3, 4, .. cifre.

3°. Dintre terminațiile de 2 cifre sunt caracteristice terminațiile 69 și 96, care sunt două numere inversate și care se succed. Această caracteristică formează obiectul problemei pe care am propus-o cu numărul 669 și a cărei soluție s'a publicat în *Gazeta Matematică*, Vol. VII, pag. 193. Enunțul acelei probleme este:

Să se demonstreze că dacă un patrat perfect se termină cu 69, patratul precedent sau următor se termină cu 96.

G-L GH. B.

PROBLEMA 3608. *Se consideră un basin de o adâncime* i, *plin cu un lichid a cărui densitate la suprafață este* a, *iar la fund* b, *densitatea variind linear dela suprafață la fund* ($b > a$).

In acest basin se dă drumul, fără viteză inițială, la o sferă cu raza r *și densitatea* d.

Poziția inițială a sferei este complet cufundată, cu suprafața lichidului tangentă.

Să se studieze mișcarea sferei în lichid, în toate cazurile posibile, știind că rezistența este egală cu produsul dintre patratul vitesei, suprafața unui cerc mare al sferei și un coeficient de proporționalitate.

Aplicație:

$$i = 30\,m \;\; ; \;\; a = 1000\,kg/m^3;$$

$$b = 1600\,kg/m^3 \;\; ; \;\; r = 0{,}5\,m \;\; ; \;\; d = 1400\,kg/m^3;$$

coeficientul de proporționalitate este 32; $g = 9{,}81\,m/sec^2$.

Calculele se vor face cu două zecimale exacte (prin lipsă sau adaos) și se va lua

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

când va fi nevoie.

ING. OCTAV ORĂNESCU.

Soluția acestei probleme este dată la pag. 491 din numărul precedent al *Gazetei Matematice*, ca aplicație, în articolul D-lui AL. STOENESCU, intitulat *Mișcarea corpurilor în medii rezistente de densitate variabilă.*

PROBLEMA 3902. *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

$$x^2 = xy + yz + zx.$$

C. COȘNIȚĂ.

Din ecuația dată se scoate

$$z = x - \frac{2xy}{x+y}. \qquad (1)$$

Pentru ca z să fie întreg, trebuie ca întregii x și y să fie așa în cât numărul

$$N = \frac{2xy}{x+y}$$

să fie întreg. Fie d cel mai mare comun divizor al numerelor întregi x și y. Vom avea

$$N = \frac{2dpq}{p+q} \qquad (2)$$

numerele p și q fiind prime între ele. Produsul pq este evident

prim cu suma $p + q$, deci N este întreg numai dacă $p + q$ divide pe $2d$. Fie deci m un întreg astfel încât

$$2d = m(p + q). \qquad (3)$$

Ţinând seamă de (3) şi (2) se găsesc din (1) valorile întregi ale lui z, aşa că centralizând, deducem că soluţiile întregi ale ecuaţiei date sunt

$$x = dp \quad , \quad y = dq \quad , \quad z = dp - mpq$$

sau, din cauza simetriei putem avea

$$x = dp \quad , \quad y = dp - mpq \quad , \quad z = dq$$

unde p, q sunt prime între ele, iar $2d$ este un multiplu m al sumei $p + q$.

Pentru a găsi valori numerice se iau la întâmplare numerele prime între ele p şi q, se înmulţeşte suma $p + q$ cu un număr m (pereche în caz că $p + q$ este nepereche) şi se deduce d din (3); sau se ia un număr $2d$ divizibil prin $p + q$ şi se deduce m.

Exemple: 1°. $p = 5$, $q = 6$, $m = 4$ deci $d = 22$. Avem soluţia

$$x = 110 \quad , \quad y = 132 \quad , \quad z = -10$$

2°. $p = 11$, $q = 9$, $p + q = 20$, $2d = 100$ deci $m = 5$

$$x = 550 \quad , \quad y = 450 \quad , \quad z = 55.$$

S'au primit soluţii bune dela D-nii: O. ENULESCU, P. I. GHIŞOIU, EM. MEREUŢĂ, GH. N. NICOLICESCU, I. GH. POPA şi A. I. STAN.

PROBLEMA 5661. *Intr'un trapez* ABCD, *cu laturile paralele* AB *şi* CD, *se duc paralelele* AA' *la* BC *şi* BB' *la* AD *care întâlnesc pe* CD *în* A' *şi* B'. *O paralelă la* DC *întâlneşte pe* AA' *în* N *şi pe* BB' *în* M. *Dreapta* CM *taie pe* AD *în* M', *iar dreapta* DN *taie pe* BC *în* N'.

Să se demonstreze următoarele proprietăţi:

1°. *Dreapta* M'N' *este paralelă cu* MN.

2°. *Notând cu* B *şi* b *bazele trapezului, avem:*

$$\frac{\overline{M'N'}}{B} = \frac{b + \overline{MN}}{B - b}$$

3°. *Dreptele* AM, BN *se întâlnesc într'un punct* I *situat pe dreapta care unește mijloacele bazelor trapezului.*

4°. *Dacă* I *este mijlocul lui* DC, *atunci dreapta* M'N' *trece prin intersecția* O *a dreptelor* AA' *și* BB' *și reciproc.*

In acest caz dreapta MN *întâlnind pe* OD *și* OC *în* P *și* Q, *avem* $\overline{PQ} = \overline{AB}$.

D. V. IONESCU.

1°. Din triunghiurile CDM', DCN' se observă că:

$$\frac{NA'}{CN'} = \frac{DA'}{DC} \quad , \quad \frac{MB'}{M'D} = \frac{CB'}{DC}$$

și deoarece DA' = CB', rezultă că:

$$\frac{NA'}{CN'} = \frac{MB'}{M'D}$$

sau

$$\frac{NA'}{MB'} = \frac{NC'}{M'D}.$$

Dar dreapta MN fiind paralelă cu bazele,

$$\frac{NA'}{MB'} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{BC}{AD}$$

adică:

$$\frac{N'C}{M'D} = \frac{BC}{AD}$$

ceea ce dovedește că dreapta M'N' este paralelă cu bazele AB, CD.

2°. Fie L intersecția lui MN cu AD și O' intersecția lui BC cu AD. In triunghiurile ADA', DCO', O'DC avem succesiv:

$$\frac{LN}{DA'} = \frac{AN}{AA'} = \frac{O'N'}{O'C} = \frac{M'N'}{DC}$$

Observând că avem:

$$LN = b + \overline{MN} \quad , \quad DA' = B - b \quad , \quad DC = B,$$

avem deci:

$$\frac{b + \overline{MN}}{B - b} = \frac{\overline{M'N'}}{B}$$

ceea ce trebuia dovedit.

3°. Dreapta OI trece prin mijlocul lui AB și al lui MN. Ea va trece prin mijlocul lui A'B' care se confundă cu mijlocul lui CD.

4°. Fie J intersecția lui BN cu DC. Din triunghiul BB'C se scoate:

$$\frac{OA'}{BC} = \frac{B'A'}{B'C} = \frac{B - rb}{B - b}.$$

Din triunghiul DN'C, se scoate:

$$\frac{NA'}{N'C} = \frac{DA'}{DC} = \frac{B - b}{B}.$$

Inmulțind membru cu membru aceste relațiuni, avem:

$$\frac{OA'}{N'C} \cdot \frac{NA'}{BC} = \frac{B - 2b}{B}.$$

Dar:

$$\frac{NA'}{BC} = \frac{JA'}{JC},$$

de unde rezultă că:

$$\frac{OA'}{N'C} = \frac{B - 2b}{B} \cdot \frac{JC}{JA'}.$$

Formula aceasta demonstrează proprietatea cerută.

a) Dacă J este mijlocul DC, avem

$$\frac{JC}{JA'} = \frac{B/2}{\frac{B}{2} - b}$$

și deci OA' = N'C; dreapta M'N' trece prin O.

b) Dacă M'N' trece prin O, OA' = N'C și deci

$$\frac{JC}{JA'} = \frac{B}{B - 2b}.$$

Se deduce că

$$\frac{JC - JA'}{JA'} = \frac{2b}{B - 2b}.$$

Sau

$$\frac{A'C}{JA'} = \frac{b}{\frac{B}{2} - b}$$

şi cum $A'C = b$, rezultă că:

$$JA' = \frac{B}{2} - b,$$

adică J este mijlocul lui DC.

Pentru o demonstra că $PQ = AB$, se observă că trapezele MNA'B', ABCD fiind asemenea, cu centrul de asemănare în I, avem

$$\frac{MN}{b} = \frac{A'B'}{B}$$

adică

$$\frac{MN}{A'B'} = \frac{b}{B}.$$

Dar din triunghiurile OB'A', ODC se deduce că

$$\frac{MN}{A'B'} = \frac{OM}{OB'} = \frac{OP}{OD} = \frac{PQ}{DC}.$$

Avem prin urmare

$$\frac{b}{B} = \frac{PQ}{DC},$$

adică $PQ = b$.

Au rezolvat probema D-nii: Slt. C. PANTELIMON (Ploeşti) şi P. P. DRĂGHICESCU (bacalaureat, Iaşi).

PROBLEMA 5705. *Să se găsească numerele de două cifre care împărţite prin 33 dau fracţia periodică simplă* A, ab ab..., *ştiind că răsturnatele lor împărţite prin acelaşi număr dau fracţia periodică simplă* B, ba ba...

ION S. ANTONIU.

Soluţie dată de Domnul P. P. DRĂGHICESCU.

Vom demonstra că orice număr de două cifre se bucură de proprietatea enunţată mai sus.

Fie $$N = 10p + q$$

un număr de două cifre.

Conform enunţului va trebui să avem

$$\frac{10p + q}{33} = A + \frac{10a + b}{99}$$

$$\therefore \quad 30p + 3q = 99A + 10a + b, \qquad (1)$$

din care deducem

$$3q + A - b = 100A + 10a - 30p = 10(10A + a - 3p) = 10B. \qquad (2)$$

In relaţia (1) adăogând ambilor membri

$$297q + 99b$$

obţinem

$$30p + 300q + 99b = 99A + 297q + 10a + 100b$$

$$\therefore \quad 30(10q + p) = 99(3q + A - b) + 10(10b + a)$$

sau, împărţind ambii membri cu 990:

$$\frac{10q + p}{33} = \frac{3q + A - b}{10} = \frac{10b + a}{99}$$

şi ţinând seama de relaţia (2), obţinem în definitiv:

$$\frac{10q + p}{33} = B + \frac{19b + a}{99}$$

Observaţii. 1°. Problema este satisfăcută de toate numerele de două cifre numai dacă admitem şi soluţiile formale 00, 01, 02, ...; în caz contrariu trebuiesc excluse acestea şi răsturnatele lor, în total 19 numere.

2°. Au mai arătat, pe alte căi, că problema este satisfăcută de numerele de două cifre şi Domnii: S-LT. NICOLAE ŞTEFĂNESCU şi ION GR. ENĂCHESCU (elev clasa VII-a liceul Militar Timişoara).

3°. Problema a fost rezolvată pe altă cale de Domnul C. C. ILIESCU (clasa VII-a Colegiul militar Predeal), care a dat toate soluţiile.

4°. Soluţii incomplete au fost primite dela Domnii: MIRCEA BÂRZESCU (liceul Militar Iaşi), MIHAIL I. CONSTANTINESCU (Bacalaureat Bucureşti), OCTAVIAN EM. GHEORGHIU (Bucureşti), VASILE D. PĂLĂCEANU (clasa VII-a liceul Militar Timişoara), M. I. PĂTRĂŞCIOIU (clasa VII-a), EUGEN N. WEGENER (Bacalaureat Bucureşti).

De asemenea s'a mai primit o soluţie incompletă şi *nesemnată*.

I. S. A.

PROBLEMA 5717. *Să se determine cifrele* a, b, c *ştiind că există trei numere legate prin relaţia*

$$abbbb \times b = ccccb.$$

Fie $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$; $a = \alpha$, $b = \delta$, $c = \varepsilon$ *două sisteme de soluţii pentru* a, b, c. *Intrebuinţând numai valorile acestor două sisteme de soluţii, să se găsească un patrat perfect de zece cifre de forma:* xyzxvtzxyx.

G. DONŢU.

Soluţie dată de D-nii: S-LT. MIREL D. STOENESCU (Bucureşti), C. CHIRIAC, P. P. DRĂGHICESCU şi I. D. PÂRVAN (Liceul militar, Timişoara).

Deoarece, după prima parte a enunţului, b^2 se termină cu b nu putem avea decât

$$b = 1,\ 5 \text{ sau } 6.$$

Ducând aceste valori în egalitatea dată se găsesc următoarele trei sisteme de soluţii pentru a, b, c:

(1) $a = b = c = 1$; (2) $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$;

(3) $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$.

Acestea sunt soluţiile primei părţi a problemei.

Pentru partea a doua observăm dela început că nu putem asocia soluţia (1) cu niciuna din celelalte soluţii pentrucă atunci numărul de 10 cifre ce se caută nu ar avea terminaţie de patrat perfect sau ar avea mai multe cifre identice decât se arată.

In adevăr: grupa (1) cu (2) nu dă niciun ansamblu de 2 cifre terminaţie de patrate perfecte. Grupa (1) cu (3) dă terminaţiile

16, 61, 69, 96.

Să luăm prima terminaţie. Ar trebui să găsim un patrat de 10 cifre de forma:

$$N^2 = xyzxvtzxyx = 16 \,.\, 1 \ldots 161.$$

Pentru cifrele marcate cu puncte nu ne rămân decât cifrele 1 şi 9 din grupele (1) şi (3) considerate. Ar trebui deci ca N^2 să mai aibă cifre egale în locurile punctate, ceea ce este contrar formei lui N^2.

Rămâne de examinat asocierea grupei (2) cu (3) care dau următoarele terminaţii de patrate perfecte

56, 61, 69, 76, 96

deci N^2 poate avea următoarele 5 forme:

$$65z6vtz656 \; ; \; 16z1vtz161 \; ; \; 96z9vtz969;$$

$$67z6vtz676 \; ; \; 69z6vtz696.$$

Considerăm pe rând pe fiecare din aceste forme.

Forma 65z6vtz656. Pentru cele 4 cifre necunoscute încă ne rămâne din grupele (2) şi (3) soluţiile

$$a = 1, \; c = 7 \text{ şi } a = 1, \; c = 9$$

care dau

$$z = 1 \text{ şi } vt = 79 \text{ sau } 97.$$

Deci N^2 ar putea fi printre numerele

6516791656 sau 6516971656.

Niciunul din aceste numere nu este patrat perfect căci ambele sunt de forma $8m$ cu m nepereche.

Forma 16z1vtz161. Pentru cifrele necunoscute au rămas

$$b = 5 \; , \; c = 7 \text{ şi } c = 9$$

cu care se pot forma numerele

1651795161 ; 1651975161 ; 1691759161

1691579161 ; 1671597161 ; 1671957161.

Se găseşte prin descompunere în factori primi sau prin extragere de rădăcină că numai

$$41131^2 = 1691759161$$

este soluţie, celelalte nefiind patrate perfecte.

Examinând la fel celelalte trei forme nu se mai găseşte nicio altă soluţie.

Au dat soluţia exactă pe căi diferite de soluţia precedentă D-nii: A. H. CUBAT (Elev particular, Iaşi); P. D. COLUMBEANU, C. C. ILIESCU (Colegiul militar, „N. Filipescu", Predeal); M. S. PĂTRĂSCIOIU, V. D. PĂLĂCEANU (Liceul militar, Iaşi).

Un harnic corespondent din Cernăuţi, după ce găseşte cifrele *a, b, c* şi arată cum se poate forma N^2 din ele, termină cu *« utilizând o tablă cu patrate perfecte de 10 cifre ...* deducem *soluţia sau soluţiile problemei ».*

Relevăm soluţia acestui corespondent cu observaţia că pe de o parte problemele pe care le punem cer să fie rezolvate, iar nu numai să li se dea o indicaţie de cum li s'ar găsi soluţia, pe de altă parte a căuta în table numerice nu înseamnă a rezolva o problemă. Această din urmă operaţie cere gândire, raţionament şi cunoştinţe, elemente pe care noi dorim să le stimulăm. Căutarea în table numerice este un act mecanic care cere atenţie şi răbdare, elemente pe care le preţuim dar cărora nu le putem acorda valori de tendinţă spre îndeletniciri ştiinţifice.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5720. *Intr'un triunghiu* $A_1A_2A_3$ *se duc bisectoarele* Δ_i^+, Δ_i^- $(i = 1, 2, 3)$ *ale unghiurilor formate de fiecare latură cu înălţimea corespunzătoare. Să se arate că cele opt cercuri* $\Delta_1^{\varepsilon_1}\Delta_2^{\varepsilon_2}\Delta_3^{\varepsilon_3}$ $(\varepsilon_i = \pm)$ *sunt egale între ele.*

D. BARBILIAN.

Soluţie. Vom presupune, mai general, că prin picioarele înălţimilor A_1', A_2', A_3' ale triunghiului $A_1A_2A_3$ se duc unghiuri drepte de laturi $\Delta_i^+\Delta_i^-$ aşa încât Δ_i^+, A_iA_i' $(i = 1, 2, 3)$ să facă între ele în acelaşi sens unghiul Θ. Pentru $\Theta = \frac{\pi}{4}$ întâlnim cazul din problema propusă.

Vrem să arătăm că *cercurile circumscrise triunghiurilor* $\Delta_1^{\varepsilon_1}\Delta_2^{\varepsilon_2}\Delta_3^{\varepsilon_3}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +$, *de o parte, şi cercurile circumscrise triunghiurilor* $\Delta_1^{\varepsilon_1}\Delta_2^{\varepsilon_2}\Delta_3^{\varepsilon_3}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -$, *de alta, sunt egale între ele. Aceste grupe de câte patru cercuri egale devin egale, împreună pentru* $\Theta = \frac{\pi}{4}$ *şi numai pentru această valoare.*

Să observăm că, pentru $\Theta = 0$, enunţul precedent se verifică şi se confundă cu bine cunoscuta *teoremă a lui* CARNOT: cercurile $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +$ se reduc la vârfurile $A_1A_2A_3$ ale triunghiului şi la ortocentrul acestuia A_0, au aşa dar razele nule. Cercurile $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -$ devin cercurile determinate de punctele $A_0A_1A_2A_3$ luate câte trei şi, ca atare, egale între ele în baza teoremei lui CARNOT.

Considerăm însă cazul unui unghiu de înclinaţie arbitrar Θ. Fie B_1, B_2, B_3 vârfurile triunghiului determinat de dreptele Δ_1^-, Δ_2^-, Δ_3^- care, conform enunţului fac cu laturile A_2A_3, A_3A_1,

$A_1 A_2$ respectiv unghiuri direct egale cu Θ. Urmează de aici că triunghiurile $A_1 A_2 A_3$ şi $B_1 B_2 B_3$ sunt direct asemenea.

Centrul lor de asemănare se găseşte, cum se ştie, în cea de a doua intersecţie a cercurilor $B_2 A_2 A_1'$ şi $B_3 A_3 A_1'$.

Dar din patrulatere inscriptibile uşor de recunoscut, urmează că primul cerc mai trece prin punctul A_3' iar al doilea, prin A_2'. Aşa dar cercurile pot fi numite prin punctele $A_2 A_1' A_3'$ şi $A_3 A_1' A_2'$. Deci cea de a doua intersecţie a lor, polul de asemănare căutat, este ortocentrul A_0 al triunghiului $A_1 A_2 A_3$.

Incât A_0, ca pol de asemănare al triunghiurilor direct asemenea $A_1 A_2 A_3$ şi $B_1 B_2 B_3$, este în acelaşi timp şi ortocentru al triunghiului $B_1 B_2 B_3$.

Odată această proprietate stabilită să considerăm triunghiul $C_1 C_2 C_3$ format de trilaterul $\Delta_1^- \Delta_2^+ \Delta_3^+$ din aceeaşi grupă cu $\Delta_1^- \Delta_2^- \Delta_3^-$.

Patrulaterul $B_1 C_1 A_2' A_3'$ e evident inscriptibil. Dar, în acelaşi mod ca mai sus, rezultă inscriptibilitatea patrulaterului $B_1 A_2 A_2' A_3'$. Conchidem de aici că C_1 se găseşte pe cercul $A_1 A_2' A_3'$ care trece prin A_0. Avem

$$\widehat{C_1 A_0 A_1} = \widehat{C_1 A_2' A_1} = \Theta.$$

Dar în acelaşi timp avem

$$\sphericalangle (\Delta_2^-, A_1 A_1') = \Theta.$$

Urmează aşa dar că $A_0 C_1$ e paralelă cu dreapta Δ_1^-, pe care sunt aşezate punctele B_2, B_3, C_2, C_3.

Cum, pe de altă parte:

$$C_1 C_2 \parallel A_0 B_3 \quad , \quad C_1 C_3 \parallel A_0 B_2$$

ca respectiv perpendiculare pe $B_1 B_2$ şi $B_1 B_3$ (după cum reiese din proprietatea lui A_0 de a fi ortocentrul triunghiului $B_1 B_2 B_3$) rezultă că triunghiul $C_1 C_2 C_3$ provine din $A_0 B_3 B_2$ prin translaţia de amplitudine şi direcţie $\overline{A_0 C_1}$. *Prin urmare aceste triunghiuri sunt egale.* O consecinţă a acestei egalităţi e egalitatea cercurilor circumscrise.

Dar, în virtutea teoremei lui CARNOT, cercul circumscris lui $A_0 B_2 B_3$ e egal cu cercul circumscris triunghiului $B_1 B_2 B_3$. In definitiv rămâne stabilit că cercurile circumscrise triunghiurilor formate de trilaterele $\Delta_1^- \Delta_2^- \Delta_3^-$ şi $\Delta_1^- \Delta_2^+ \Delta_3^+$, din grupa negativă

sunt egale. La fel se arată egalitatea cercului circumscris lui $\Delta_1^- \Delta_2^- \Delta_3^-$ cu oricare alt cerc din grupă. Deci toate cercurile grupei negative sunt egale între ele.

Schimbând unghiul Θ cu $\frac{\pi}{2} - \Theta$, grupa negativă se permută cu grupa pozitivă. Aşa dar rezultatul de mai sus rămâne valabil şi pentru cercurile grupei pozitive.

Incât prima parte a teoremei, sub enunţarea ei mai generală, e demonstrată.

Fie acum $B_1^* B_2^* B_3^*$ triunghiul determinat de laturile $\Delta_1^+ \Delta_2^+ \Delta_3^+$. Prin intermediul lui $A_1 A_2 A_3$ rezultă că $B_1 B_2 B_3$ şi $B_1^* B_2^* B_3^*$ sunt asemenea şi au acelaşi ortocentru A_0. Deci condiţia necesară şi suficientă ca cercurile grupei pozitive să fie egale cu cercurile grupei negative, este ca triunghiurile asemenea $B_1 B_2 B_3$ şi $B_1^* B_2^* B_3^*$ să fie egale. Cum însă triunghiurile au acelaşi ortocentru A_0 condiţia revine la următoarea:

1) $$A_0 B_1 = A_0 B_1^* .$$

Dar B_1^* e tocmai punctul C_1 considerat mai sus. Deci $A_1 A_3' A_2' A_0$ se găsesc pe acelaşi cerc cu B_1 şi B_1^*. De aici rezultă

$$B_1 \overset{\frown}{A_0} B_1^* = B_1 \overset{\frown}{A_2'} B_1^* = \frac{\pi}{2}.$$

Aşa dar condiţia necesară şi suficientă 1) este echivalentă cu

$$\Theta = B_1 \overset{\frown}{A_2'} A_0 = B_1 \overset{\frown}{B_1^*} A_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Incât şi partea a doua a teoremei generale, care coincide cu problema propusă, e stabilită.

Notă. O bună demonstraţie, cu ajutorul trigonometriei, s'a primit dela D-l D. GH. VASILIU (elev al Liceului Militar din Iaşi). D-sa evaluează în parte, prin teorema sinusului, segmentele $A_1' B_2$ şi $A_1' B_3$ şi obţine lungimea laturii $B_2 B_3$. Apoi, cum unghiul din B_1 e egal cu unghiul din A_1 al triunghiului dat, găseşte uşor formula care dă raza cercului circumscris lui $B_1 B_2 B_3$. Arată apoi că prin înlocuirea unei laturi Δ_i^- cu opusa ei Δ_i^+ expresiunea razei nu se schimbă. Reiese din demonstraţie, deşi autorul soluţiei nu stăruie deajuns asupra acestui punct, că formula rămâne aceeaşi şi prin schimbarea simultană a semnelor la toate dreptele Δ_i^- ($i = 1, 2, 3$). Incât soluţia D-lui D. GH. VASILIU poate fi considerată complectă.

Nu tot acelaşi lucru se poate spune despre soluţia primită dela D-l P. P. DRĂGHICESCU. D-sa arată, întocmai ca mai sus asemănarea triunghiurilor $\Delta_1^- \Delta_2^- \Delta_3^-$ şi $A_1 A_2 A_3$. Determină raportul de asemănare care, pentru $\Theta = \frac{\pi}{4}$, este $\frac{1}{\sqrt{2}}$ şi conchide că rezultatul se menţine şi pentru celelalte triunghiuri $\Delta_1^{\varepsilon_1} \Delta_2^{\varepsilon_2} \Delta_3^{\varepsilon_3}$. In realitate aceste triunghiuri nu rămân asemenea cu $A_1 A_2 A_3$, ci sunt două câte două asemenea cu triunghiurile patrupunctului ortocentroidal $A_0 A_1 A_2 A_3$, cum am văzut. Raportul de asemănare rămâne de fiecare dată egal cu $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dar fără *teorema lui* CARNOT, pe care D-l P. P. DRĂGHICESCU nu o menţionează, egalitatea celor opt cercuri nu goate fi dedusă.

* * *

Cred că legătura dintre problema 5720 de mai sus şi problema 5736 propusă la pag. 525, Vol. XLVIII, *Gazeta Matematică*, a fost prinsă de corespondenţii revistei. Triunghiul $A_1 A_2 A_3$ şi dreptele $\Delta_1^{\varepsilon_1} \Delta_2^{\varepsilon_2} \Delta_3^{\varepsilon_3}$ se deduc, dela o problemă la alta, prin proiecţie cilindrică.

Legătura dintre problemele 5720 şi 5736 nu e numai formală, dar chiar intimă, cum am arătat într'un articol intitulat „*Cilindrul anallagmatic*“, care se va publica în unul din numerele viitoare din *Gazeta Matematică*.

Evident, se cere pentru problema 5736 o soluţie elementară, diferită de soluţia analitică din articolul menţionat.

D. B.

PROBLEMA 5741. *Să se determine funcţia cea mai generală* $F(x, y)$, *care satisface ecuaţiei funcţionale*

$$F(x, y) + F(y, x) = 1.$$

M. GHERMĂNESCU.

Ecuaţia funcţională dată se mai poate scrie

$$[F(x, y) - \tfrac{1}{2}] + [F(y, x) - \tfrac{1}{2}] = 0,$$

sau încă

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, x) = 0, \tag{1}$$

unde am pus

$$\varphi(x, y) = F(x, y) - \tfrac{1}{2}. \tag{2}$$

Relaţia (1) arată că funcţia $\varphi(x, y)$ este *simetric strâmbă* în raport cu variabilele x şi y. Ori funcţia simetric strâmbă cea mai generală este de forma

$$\varphi(x, y) = A(x, y) - A(y, x),$$

unde $A(x, y)$ este o funcţie arbitrară. Rezultă că funcţia cea mai generală care satisface ecuaţia funcţională dată este de forma

$$F(x, y) = \tfrac{1}{2} + A(x, y) - A(y, x),$$

unde $A(x, y)$ este o funcţie arbitrară.

Notă. La această problemă, care este aproape mai puţin ca un exerciţiu, nu s'a primit nicio soluţie. Noi am propus-o pentru a iniţia pe corespondenţi cu ecuaţiile funcţionale, din care vom mai propune şi altele.

M. G.

PROBLEMA 5775. *Să se descompună în doi factori numărul 33337.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: M. BÂRZESCU, E. D. COLUMBEANU, D. NACHE, A. V. HAIDEŞ, G. I. RĂDUCANU, A. C. TOFAN, T. TURCULEŢ (Elevi, Liceul militar, Iaşi), I. MAHRENHOLZ, E. WEGENER şi M. I. CONSTANTINESCU.

Numărul 33337 nu se divide cu 2, 3 şi 5. Incercăm dacă are divizori pe 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 şi găsim:

$$33337 = 17 \times 37 \times 53.$$

De aci deducem descompunerile cerute:

$$17 \times (37 \times 53) = 17 \times 1961,$$
$$37 \times (17 \times 53) = 37 \times 901,$$
$$53 \times (17 \times 37) = 53 \times 629.$$

Problema are deci trei soluţii.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (Colegiul Naţional, „N. Filipescu", Predeal).

Avem:

$$111 = 3 \times 37 \quad \therefore \quad 333 = 3 \times 3 \times 37 = 9 \times 37$$
$$\therefore \quad 33337 = 9 \times 3700 + 37 = 37 \times 901$$

care e o soluţie a problemei. Dar $901 = 17 \times 53$ şi de aci încă două soluţii:

$$17 \times (19 \times 53) = 17 \times 1961 \quad \text{şi} \quad 53 \times (17 \times 37) = 53 \times 629.$$

EXERCIŢII

24. Să se pună sub formă de produs de 3 factori de forma $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ expresia

$$E=\sqrt{4+2\sqrt{3}+\sqrt{7}+\tfrac{1}{2}\sqrt{21}}.$$

T, STOICESCU.

R. Se găseşte că

$$E=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+1)(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Invers, verificarea se face prin ridicare la patrat şi efectuarea operaţiilor elementare de calcul.

25. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4+2x^3+3x^2+3x+2=0.$$

CPT. E. ŞT. IACOB.

R. Avem succesiv

$$(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-x^2=0$$

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)^2+\frac{x^2+x+1}{x^2}-1=0$$

$$\therefore\ \frac{x^2+x+1}{x^2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Acum problema revine la rezolvarea unei ecuaţii de gradul al doilea.

PROBLEME PROPUSE

5675*). Pe o dreaptă se dau punctele P, Q, A, B, C, D. Cunoscând valoarea rapoartelor în care fiecare din ultimele patru puncte, împarte segmentul PQ, se cere să se exprime valoarea raportului anarmonic (ABCD), în funcţiune numai de aceste rapoarte.

ST. S. MIHĂIESCU.

5825. Se cer două numere consecutive de câte patru cifre, unul din ele şi răsturnatul celuilalt fiind patrate perfecte.

I. IONESCU.

*) Problema 5675 propusă la pag. 535, Vol. XLVII, fiind cunoscută se înlocueşte cu prezenta.

5826. Să se găsească un patrat perfect de zece cifre de forma

$$abcd4\ abcd9.$$

G-L GH. BUICLIU.

5827. Să se găsească numerele al căror indicator este o putere a lui 10.

M. GHERMĂNESCU.

5828. Să se arate că, *cel mai mare* şi *cel mai mic* număr de acelaşi număr de factori primi, au acelaşi număr de divizori, dacă suma exponenţilor este aceeaşi.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5829. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} d(1,1) & d(1,2) & d(1,3) \ldots d(1,n) \\ d(2,1) & d(2,2) & d(2,3) \ldots d(2,n) \\ d(3,1) & d(3,2) & d(3,3) \ldots d(3,n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d(n,1) & d(n,2) & d(n,3) \ldots d(n,n) \end{vmatrix}$$

unde $d(i, j)$ este codivizorul maxim al numerelor i, j.

Aceeaşi problemă când $d(i, j)$ se înlocueşte cu $m(i, j)$, comultiplul minim al numerelor i şi j.

IOAN B. FLORESCU.

5830. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} yz - s^2 &= a & xs - tu &= d \\ zx - t^2 &= b & yt - us &= e \\ xy - u^2 &= c & zu - st &= f. \end{aligned}$$

P. P. DRĂGHICESCU.

5831. Să se rezolve ecuaţia:

$$A \sin^2 x + B \sin^2 (x + a) + C = 0.$$

Caz particular:

$$A = 10;\ B = 10(\sqrt{3} + 1);\ C = -5;\ a = \frac{\pi}{6}.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

5832. Se dă o dreaptă D şi două puncte A şi B exterioare dreptei. Să se construiască pe dreapta D un punct M, astfel ca bisectoarea unghiului, format de dreptele D şi AM, să treacă prin punctul B. Discuţie.

GH. D. SIMIONESCU.

5833. M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 fiind cinci puncte în plan, punem:

$$\mu_1 = M_1 (M_2 M_3 M_4 M_5),$$
$$\mu_2 = M_2 (M_3 M_1 M_4 M_5),$$
$$\mu_3 = M_3 (M_1 M_2 M_4 M_5).$$

Să se arate că avem:

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

5834. Fie D_T distanţa dela un punct fix la tangentele T la o conică dată. Să se demonstreze, că cea mai mare valoare a lui D_T este când tangenta T este una din tangentele paralele cu polara punctului considerat faţă de conica dată.

R. P. VOINEA.

5835. Se consideră două bare rigide AB şi AC, articulate în A. Dacă C este fix, iar AB se mişcă astfel ca să formeze cu AC un unghiu dublu unghiului format de AC, în mişcarea sa, cu o direcţie fixă, se cere să se determine:

1°. Baza mişcării sistemului;

2°. Rostogolirea mişcării sistemului;

3°. Traiectoria unui punct de pe AB.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5836. Două bare AOB şi A'OB' (AO=A'O=a, OB=OB'=b) de masă neglijabilă şi perpendiculare una pe alta se rotesc în propriul lor plan în jurul lui O cu iuţeala unghiulară constantă. In capetele A şi A' ale barelor se aşează câte o masă M, iar în capetele B şi B' câte o masă m. Să se determine poziţia unde trebuie aşezată o masă m_1, astfel ca axa O să nu fie acţionată de forţele de inerţie (echilibrarea maselor în mişcarea de rotaţie).

Masele M, m, m_1 se vor considera punctuale.

ALEXANDRU STOENESCU.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

		Pag.
C-dor I. Lintes	Neegalităţi cu indicatori de ordin superior . .	536
C-dor I. Linteş	Proprietăţi ale numerelor prime cu un număr dat.	56

2. Geometria

C. Borş	Asupra unei probleme de geometrie . . .	344
G-l Gh. Buicliu . . .	Un loc geometric elementar	53
Şerb. Gheorghiu	Triunghiuri limită.	543
I. C. Vasiliu	Relaţiuni metrice în geometria triunghiului	495

3. Algebra

N. Abramescu	Aplicaţii ale geometriei la discuţia şi separarea rădăcinilor unei ecuaţii.	395
N. V. Ghircoiaşu . . .	Generalizarea unor indentităţi ale lui EULER şi a D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU . . .	98, 145
I. V. Màtieş	Ecuaţii pseudo-reciproce	251
D. Pompeiu	O analogie	244

4. Trigonometria

Ad. I. Popescu	O generalizare a sumelor sinusurilor şi cosinusurilor arcelor în progresie aritmetică . .	247

5. Geometria descriptivă

Al. I. Guţu	O problemă de geometrie descriptivă	105

6. Geometria analitică şi infinitezimală

N. Abramescu	Proprietăţi ale normalelor la conice	539
Şerb. Gheorghiu	Câteva aplicaţiuni ale coordonatelor izotrope	150, 202

Pag.

A. Myller . . . . . Curbura mijlocie şi liniile asimptotice 494
A. Myller . . . . . O transformare geometrică 297

7. Calculul şi Geometria vectorială

Pl. Andronescu . . . . Calculul vectorial . . . . . 49, 195, 293, 483, 529.
D. V. Ionescu . . . . Sisteme de vectori cu rezultante paralele cu o dreaptă sau un plan 441
V. Vâlcovici . . . . . Asupra unei matrice din calculul vectorial . . 401

8. Mecanica

Al. Stoenescu . . . . . Mişcarea corpurilor în medii rezistente de densitate variabilă 487

9. Istoria Matematicilor

Delegaţia . . . . . Isac Newton 291
Ed. Halley . . . . . Intru preamărirea acestei opere matematico-fizice. Traducere de T. Naum. 291
P. Sergescu . . . . . Note despre trecutul matematicei în Craiova . 342
Gabriela Ţiţeica . . . . Galileo Galilei 97
V. Vâlcovici . . . . . Spiru Haret 241

10. Necrologuri

G-l Gh. Buicliu . . . . † N. V. Teodorescu 289
Al. D. Bunescu . . . . † Grigore C. Zamfirescu 481
Al. Stoenescu . . . . . † Profesorul A. Gh. Ioachimescu . 337, 390, 433

B. CHESTIUNI IN LEGĂTURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

*** . . . . . Lista membrilor societăţii *Gazeta Matematică*. 5
*** . . . . . Membri decedaţi 22

2. Premii şi concursuri

I. Buşilă şi D. A. Stan . Premiile, bursele şi publicaţiile societăţii *Gazeta Matematică* 22
A. Bunescu, Cpt. M. Focşeneanu, C-dor I. Linteş Raport pentru acordarea premiului „G-l Sc. Panaitescu“ 25
Delegaţia Societăţii . . Concursul *Gazeta Matematică* din anul 1943 59

		Pag.
O. Onicescu, A. Pantazi, P. Sergescu	Raportul comisiunii pentru acordarea premiului „VASILE CONTA"	107
E. Botea, C. Ionescu-Bujor, Gabriela Ţiţeica	Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „NICOLAE GH. BOTEA"	207
Delegaţia Societăţii . .	Concursul *Gazeta Matematică*	254
G-l Gh. Buicliu, I. Ionescu, C-dor I. Linteş	Raportul comisiunii pentru premiul de aritmetică	299
Gabriela Ţiţeica, D. Stoica, Al. A. Roşu .	Premiul „Ing. AL. ROŞU"	347
O. Ţino	Rezultatul concursului *Gazeta Matematică* din anul 1943	385
V. Alaci, Th. Angheluţă, Al. Bunescu	Raport pentru acordarea premiului de algebră.	406
C. Ionescu-Bujor, Al. Niculescu, Al. Pantazi. .	Raport asupra premiului „V. CRISTESCU" . . .	448
Delegaţia Societăţii . .	Premiul „LT-COL. G. A. TĂNĂSESCU"	448
Gabriela Ţiţeica, O. Ţino, Al. Bunescu	Raportul comisiei pentru decernarea premiului de geometrie elementară „G. ŢIŢEICA" . . .	502
G. G. Constantinescu, Al. Stoenescu şi Gabriela Ţiţeica	Raport pentru decernarea premiului de mecanică „SP. HARET"	546

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

10 [1])	*G-l Gh. Buicliu* . .	Asupra problemei 5119	108
23.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	211
46.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	449
57.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	547
34.	*G-l Gh. Buicliu* . .	O soluţie a problemei 3041	300
8.	*St. Cetăţeanu*. . . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	67
37.	*G. G. Constantinescu.*	Asupra problemei 2394	304
41.	*P. P. Drăghicescu* .	Asupra notei Nr. 35 G. M. XLVI.	353
58.	*I. B. Florescu* . . .	Asupra indicatorilor	548
20.	*M. Ghermănescu* . .	Asupra ecuaţiilor multigrade	164
4.	*M. Ghermănescu* . .	Asupra problemei 2394	65
43.	*A. Gloden*	Câteva factorizări noi	356

1) Numerele din această coloană indică numărul de ordine al notei în Vol. XLVIII.

		Pag.
28. *A. Gloden*	Numărul termenilor ecuațiilor multigrade	258
9. *Ad. Letac*	O octogradă cu câte 9 termeni în fiecare membru	68
11. *C-dor I. Linteș*	Indicatori subordonați	114
13. *C-dor I. Linteș*	Soluția și generalizarea unei probleme din *Recueil de problèmes de mathématique par* C. A. LAISSANT	163
32. *C-dor I. Linteș*	Asupra unei probleme de distribuția numerelor prime	262
35. *C-dor I. Linteș*	Asupra unei neegalități de teoria numerelor	302
42. *C-dor I. Linteș*	Asupra notei 41	355
45. *C-dor I. Linteș*	Asupra problemei 5347	407
3. *A. Moessner*	O particularitate a numerelor pitagorice	64
19. *A. Moessner*	Patrat magic de produse	163
51. *G. D. Simionescu*	Asupra problemei 5047	503

2. Geometria

6. *P. Boldescu*	Asupra notei 54 Vol. XLVI	66
53. *G-l Gh. Buicliu*	Asupra problemei 5399	504
2. *G-l Gh. Buicliu*	Suprafața triunghiului	63
14. *P. P. Drăghicescu*	Asupra problemei 2575	115
31. *P. P. Drăghicescu*	Asupra exercițiului 1 G. M. XLVII	262
33. *P. P. Drăghicescu*	Asupra problemei 4834	263
36. *V. Ghițescu*	Soluția tehnică a cuadraturii cercului	303
12. *V. Thébault*	Triunghiul mărginit de dreptunghiuri asemeni	112
44. *V. Thébault*	Despre înălțimile unui triunghiu	406

3. Algebra

16. *V. Alaci*	Asupra problemei 2469	157
34. *G-l Gh. Buicliu*	O soluție a problemei 3041	300
15. *N. Gaiu*	Asupra unei formule	116
24. *M. Ghermănescu*	Asupra problemei 2469	212
7. *V. Ghițescu*	Asupra problemei 5486	66
49. *C-dor I. Linteș*	Asupra problemei 4553	452
48. *I. I. Stamate*	Asupra unei probleme de limită	45

4. Trigonometria

59. *M. Adam*	Generalizarea problemei 5507	551
38. *O. Hofer*	Asupra problemei 2246	306
11. *Tib. Popoviciu*	Asupra problemei 2469	109

5. Geometria analitică și diferențială

56. *E. Anghiriade*	Asupra ipocicloidei cu trei puncte de întoarcere	505
27. *G-l Gh. Buicliu*	Rectificarea soluției problemei 5628	255

Pag.

30. *Răd. Georgescu* . . Asupra problemei 5285. 261
40. *Şerb. Gheorghiu* . . Asupra problemei 5628. 350
25. *M. Ghermănescu* . . Asupra problemei 3944. 214
17. *G-l G. I. Liteanu* . Asupra problemei 2145. 160

6. **Mecanica**

26. *V. Ghiţescu* . . . . Componentele intrinseci ale acceleraţiei unui punct în mişcarea circulară şi uniformă . . 215

7. **Analiza şi calculul integral**

29. *G. D. Simionescu* . . Generalizarea problemei 5526 259

8. **Istoria Matematicilor**

55. *I. Ionescu* . . . . . Asupra aceluiaşi arc de meridian din nota precedentă Nr. 54. 505
1. *I. Ionescu* . . . . . Centenarul unei mici astronomii române . . . 26
39. *I. Ionescu* . . . . . Numeraţiunea la popoarele orientale 349
54. *P. Sergescu* . . . . Măsurarea unui arc de meridian în Basarabia în 1852 505

9. **Diverse**

52. *G. G. Constantinescu* Asupra notei Nr. 49 din G. M. XLVIII. . . . 504
21. *P. P. Drăghicescu* . Asupra problemei 3456 165
50. *Gh. Th. Gheorghiu*. Asupra necrologului profesorului A. Gh. Ioachimescu 503
5. *M. Ghermănescu* . . Asupra problemei 5446 66
47. *I. Ionescu* . . . . . Biblioteca *Gazeta Matematică* 450

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul *Gazeta Matematică* din 1943. Enunţurile problemelor date la proba scrisă 408
Examenul de admitere la Facultatea de Arhitectură Bucureşti. 165
Politechnica din Bucureşti. Examenul de intrare. Oct. 1942 . . . . 217, 264 308, 455, 507.

E. BIBLIOGRAFII

1. Lucrări şi reviste recenzate

V. Marian. . . . . G. Bratu. Cinci conferinţe de astronomie. . . 70
V. Marian. . . . . G. Bratu. Curs de analiză matematică. . . . 71
V. Marian. . . . . G. Bratu. Curs de Astronomie. 70
V. Marian. . . . . I. Ionescu. Povestiri ştiinţifice. 29

Pag.

P. Sergescu . . . . . N. ABRAMESCU. Lecţiuni de geometrie 454
P. Sergescu . . . . . TH. ANGHELUŢĂ. Curs de Algebră superioară. 310
Al. Stoenescu. . . . . . Culegere de probleme de mecanică de A. G. IOACHIMESCU, revăzută şi adăogită de GABRIELA ŢIŢEICA 266
Al. Stoenescu. . . . . . Revista Matematică Politechnica 357
Gabriela Ţiţeica . . . . M. GHERMĂNESCU. Probleme şi propoziţii din dinamica punctului 510
Şerban Ţiţeica. . . . . . T. VESCAN. Considérations sur certaines recherches quantiques de l'école française de physique théorique. 218
Şerban Ţiţeica. . . . . . T. VESCAN. Die Sedimentations Gleichgewichtsgleichung und die Molekulargewichtsformel von SVEDBERG 218

2. Lucrări nerecenzate

A. A. Beleş şi St. G. Bălan. Mecanica teoretică şi aplicată I, ... 358
G. Bratu. . . . . . Cinci conferinţe de Astronomie. 118
G. Bratu. . . . . . Curs de Analiză Matematică 118
G. Bratu. . . . . . Curs de Astronomie. 118
H. Ciocan. . . . . . Cotul moldovenesc este cot sacru 28
I. I. Chiţulescu. . . . . Culegere de probleme de geometrie descriptivă. 454
V. Cristescu. . . . . . Culegere de probleme de Trigonometrie sferică. Revăzută şi adăogită de G-L G. I. LITEANU. 312
I. Ionescu . . . . . Povestiri ştiinţifice. Vol. II. 166
C-dor I. Linteş. . . . . Avionul privit ca armă de război, ... 265
C-dor I. Linteş. . . . . Problema stabilităţii şi problema acrobaţiilor . 414
C-dor I. Linteş. . . . . Teoria indicatorilor 510
O. Orănescu & Gh. Milea. Les chaines de variables aléatoires 510
Sophie Piccoid. . . . . Sur les ensembles parfaits. 218
P. Sergescu . . . . . Extensiunea universitară din Cluj în Banat . . 510
P. Sergescu . . . . . Un episod din bătălia pentru calculul diferenţial. 119
T. Vescan . . . . . Considérations sur certaines recherches quantiques de l'Ecole française physique théorique 28
T. Vescan. . . . . . New hydrodynamical investigations 28
T. Vescan. . . . . . Die Sedimentationsgleichgewichts-Mischung und die Molekulargewichtsformel von SVEDBERG. 28

3. Extrase, Suplimente, Teze

N. Abramescu . . . . . Asupra relaţiei dintre involuţie şi fascicole de cercuri. 28
N. Abramescu . . . . . L'apolarité d'une forme binaire et d'une forme cubique 28

Pag.

N. Abramescu . . . . . Nouvelle méthode pour obtenir la cubique qui donne les tangentes de DARBOUX en un point d'une surface. 28
N. Abramescu . . . . . Proprietăţi ale cercurilor celor 9 puncte şi ale dreptei lui SIMSON 28
N. Abramescu . . . . . Proprietăţi ale conicelor osculatoare la o curbă plană 28
N. Abramescu . . . . . Sur les sections d'une surface par des plans menés par une tangente ou par une droite passant par un point de la surface. 28
N. Abramescu . . . . . Sur les tangentes de DARBOUX. 28
N. Abramescu . . . . . Sur une construction géométrique. 28
M. Ghermănescu . . . . Sur quelques équations fonctionnelles linéaires . 510
M. Ghermănescu . . . . Sur une classe d'équations fontionnelles du premier ordre. 510
M. Ghermănescu . . . . Sur une équation fonctionnelle. 510
C-dor I. Linteş . . . . . Asupra autofretărei ţevilor prin presiuni exterioare 553
C-dor I. Linteş. . . . . Precizia, uzura şi viaţa armelor de foc 414
C-dor I. Linteş. . . . . Probleme ale balisticei exterioare 71
Al. Pantazi . . . . . Elemente de geometrie diferenţială proectivă a curbelor şi a suprafeţelor 71
P. Sergescu . . . . . Despre valoarea etică a ştiinţei 510
P. Sergescu . . . . . Sur une proposition de CAUCHY 119
I. I. Stamate . . . . . Asupra unui sistem de ecuaţii 358

4. Reviste, Periodice

Académie Roumaine. Bibliographie des travaux scientifiques parus . . 608
Buletinul Societăţii Politechnice din România . . 166, 217, 356, 413, 454, 552
Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine 454, 508
Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara 508
Deutsche Mathematik 217, 509
Disquisitiones Mathematicae et Physicae 118
Gazeta Matematică. Supliment cu exerciţii 509
Mathematica 118
Mathesis 265
Pozitiva 118, 509
Revista Matematică din Timişoara . . 118, 166, 265, 310, 357, 414, 509, 552
Revista Matematică Hispano-Americană 70, 357, 358, 414, 552
Revista noastră 454
Revista Ştiinţifică „V. Adamachi" 509
România aeriană 161, 358, 414, 510, 553
Societatea Politechnică 454
Ştiinţă şi Progres 70, 358
Timocul 510

F. CERERI *)

Nr. cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
1	24 (XXI)	?
4	24 „	?
5	24 „	?
7	59 „	?
8	59 „	?
10	91 „	?
11 **)	144 „	?
12	145 „	?
13	145 „	219 (XXI) ?
14	183 „	?
15	219 „	?
16	254 „	?
17	294 „	264 (XXXVIII) ?
20	420 „	?
23	17 (XXII)	?
24	75 „	?
26	161 „	?
27	187 „	?
28	213 „	?
29	231 „	?
30	258 „	?
31	277 „	?
32	277 „	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV) ?
33	308 „	?
34	40 (XXIII)	?
35	40 „	?
36	65 „	?
37	86 „	211 (XXIII) ?
38	112 „	?
39	137 „	?
40	157 „	?
41	185 „	?
42	211 „	?
43	235 „	?
44	259 „	?
45	275 „	?
46	13 (XXIV)	?
49	57 „	?
50	70 „	?
51	88 „	?
52	103 „	?
55	168 „	?
56	168 „	?
58	16 (XXV)	?
59	36 „	?
60	58 „	?
61	58 (XXV)	?
63	71 „	?
64	122 „	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII)?
83	160 „	?
84	197 „	?
85	197 „	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
91	26 (XXVIII)	?
92	57 „	?
93	57 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după răspuns.

**) A se vedea nota matematică dela pag. 249, Vol. XLVI.

Nr. cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
122	306 (XXX)	?
123	337 „	?
124	383 „	?
126	423 „	?
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXIV)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
201	221 „	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
243	212 (XL)	?
244	266 „	?
245	309 „	?
247	499 „	?
248	553 „	?
250	148 (XLI)	?
251	189 „	?
252	241 „	?
253	292 (XLI)	?
254	343 „	?
255	384 „	?
256	485 „	?
257	533 „	?
259	629 „	?
262	251 (XLII)	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?
270	90 (XLIII)	?
271	138 „	?
273	255 „	?
274	304 „	?
275	423 „	?
276	477 „	?
277	539 „	?
279	639 „	?
280	32 (XLIV)	?
284	479 „	?
289	248 (XLV)	?
290	306 „	?
291	419 „	?
292	479 „	?
294	530 „	?
296	638 „	?
297	205 (XLVI)	?
298	254 „	?
299	315 „	?
301	483 „	?
302	534 „	?
303	583 „	?
304	641 „	?
305	30 (XLVII)	?
306	135 „	?
307*)	171 „	?
308	221 „	?
310	373 „	?
311	373 „	?
312	458 „	?
313	518 „	?
314	518 „	.119
315	564 „	?
316	30 (XLVIII)	?
317	71 „	?
318	166 „	?
319	414 „	?
320	454 „	?
321	511 „	?
322	553 „	?

*) La pag. 171, Vol. XLVII a fost propusă cu numărul greşit 306.

G. DIVERSE

Comemorarea lui NEWTON 313
Şedinţele Societăţii 312
Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică* 30, 71, 119, 167, 267, 313, 358, 414, 455, 511, 553

H. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea pe materii a problemelor propuse în acest an

Aritmetica şi teoria numerelor . . 5691, 2, 3, 704, 5, 6, 16, 7, 8, 27, 8, 9, 39, 40, 50, 1, 2, 62, 3, 4, 5, 75, 6, 7, 88, 9, 90, 800, 1, 2, 3, 13, 4, 25, 6, 7, 8, 9.
Geometria . . . . . 5056, 575, 80, 675, 94 700, 8, 15, 20, 1, 3, 33, 4, 43, 4, 5, 7, 8, 9, 66, 7, 8, 9, 70, 1, 81, 2, 3, 93, 4, 804, 5, 6, 8, 17, 8, 9, 32, 3.
Algebra . . . . . 5703, 7, 19, 30, 1, 41, 53, 4, 78, 9, 80 91, 2, 815, 7, 30.
Trigonometria . . . . . 5698, 9, 711, 2, 24, 32, 42, 60, 73, 84, 5, 8, 98, 831.
Geometria analitică şi diferenţală, 5695, 6, 7, 709, 22, 35, 6, 7, 46, 72, 86, 7, 95, 6, 7, 807, 9, 20, 2, 34.
Analiza şi calculul integral . . . 5748, 99, 5821.
Mecanica . . . . . 5701, 2, 10, 3, 4, 25, 6, 38, 49, 61, 74, 810, 1, 2, 23, 4, 35, 6.

b) Repartizarea pe autori a problemelor propuse în acest an

N. Abramescu 5772, 822
V. Alaci 5712, 32
I. S. Antoniu 5705
R. Bădescu 5713
D. Barbilian 5720, 36
M. Bârzescu 5781
Gh. Basacov 5817
G-l Gh. Buicliu . 5695, 709, 22, 34, 47, 54, 65, 82, 91, 801, 13, 26
A. D. Bunescu 5807
G. Călugăreanu . . . 5719, 48, 99
Th. Gh. Cocea 5743, 83
G. G. Constantinescu 5776
E. Crăciunescu 5821
G. Donţu 5717
P. P. Drăghicescu . . 5698, 729, 73, 818, 30
I. B. Florescu . . 5728, 52, 66, 77, 89, 808, 14, 29
M. I. Focşeneanu . . 5779, 92, 809
Răd. Georgescu 5820
Şerban Gheorghiu . 5696, 708, 21, 37, 46, 53, 71, 80, 95, 804, 19, 33
M. Ghermănescu . . 5575, 701, 31, 41, 50, 74, 96, 810, 6, 27
V. Ghiţescu . . 5694, 710, 23, 831
A. Gloden 5739
Cpt. E. Şt. Iacob 5730
C. C. Iliescu 5815
I. Ionescu . 5056, 580, 691, 703, 15, 62, 75, 88, 800, 12, 25
C-dor I. Linteş . 5692, 718, 27, 40, 51, 63, 90, 802, 28
G-l Gh. I. Liteanu . . . 5697, 785

Şt. S. Mihăiescu 5675, 742, 57, 68, 93
N. N. Mihăileanu . 5760, 9, 86, 94
C. C. Mihăilescu 5704
C. Mihu 5699, 739, 78
Em. S. Modâlcă 5738
Em. Morţun 5706, 805
Al. V. Niculescu 5707
G-l Gh. I. Popescu . . . 5745, 67
T. Popoviciu 5700
M. Rădulescu 5756, 823
Gh. D. Simionescu 5698, 798, 806, 32
Al. Stoenescu 5702, 14, 61, 811, 24, 36
I. St. Teodorescu 5735
V. Thébault 5716, 70, 803
Gabriela Ţiţeica 5725, 49
V. Vâlcovici 5693, 726
D. Gh. Vasiliu 5724
I. C. Vasiliu 5755, 84, 97
R. P. Voinea 5834
E. Wegener 5711
Cpt. I. Gh. Zamfirescu . 5734, 44 58, 64, 835

c) Indicarea paginei la care problemele au fost propuse sau rezolvate

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
485	104 (V) / 198 (XVI)	NR
585 *)	172 (VI) / 238 (XVI)	NR
676	148 (VII)	
887	172 (IX) / 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	.358
1000 **)	220 „ / 438 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1146 ***)	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „ / 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1398	224 „	NR
1412	256 „	
1424	288 (XIV)	
1450	352 „	
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1553	288 „	NR
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	
1656	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	. . .361
1702	360 „	
1711	399 „ / 372 (XXXI)	
1735 ****)	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	NR
1764 *****)	120 „	NR
1790	240 „	NR
1823	400 „	NR
1831	439 „	NR
1835	440 „	
1840	466 „	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul şi la pagina respectivă.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte probleme redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

*) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88. Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii. A se vedea articolul dela pag. 402, Vol. XLIV.

**) A se vedea lămuriri la pag. 291, Vol. XXXI.

***) A se vedea nota matematică dela pag. 634, Vol. XLVI, în baza căreia problema rămâne nerezolvată. soluţia dela pag. 77 neräspunzând adevăratei înterpretări a enunţului.

****) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

*****) Pentru definiţia momentelor statice polare, a se vedea G. M., Vol. XVII, pag. 87.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
1898 . . .	199 (XVIII)	
1911 . . .	239 „	
1914*) . . .	239 „	NR
1922 . . .	278 „	
1929 . . .	279 „	NR
1944 . . .	319 „	
1945**) . .	320 „	
1958 . . .	359 „	
1959 . . .	360 „	NR
1969 . . .	399 „	
2004 . . .	40 (XIX)	NR
2016 . . .	79 „	NR
2018 . . .	80 „	
2024 . . .	118 „	
2025 . . .	119 „	
2032 . . .	120 „	
2038 . . .	159 „	
2048 . . .	198 „	NR
2055 . . .	200 „	
2056 . . .	200 „	
2058 . . .	200 „	
2065 . . .	239 „	
2070***) .	240 „	NR
2074 . . .	278 „	NR
2079 . . .	279 „	
2083 . . .	280 „	
2106 . . .	358 „	
2108 . . .	359 „	
2110 . . .	359 „	
2118 . . .	399 „	
2130****) .	460 „	553
2133 . . .	439 „	
2147 . . .	462 „	
2170 . . .	119 (XX)	NR
2176 . . .	120 „	
2197 . . .	198 „	
2217 . . .	239 „	
2222 . . .	240 „	
2227 . . .	279 „	
2235 . . .	280 „	
2240 . . .	318 „	
2246*****)	320 „	
2247 . . .	320 „	
2248 . . .	320 „	
2249 . . .	320 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2263 . . .	359 (XX)	
2264 . . .	360 „	NR
2265 . . .	360 „	
2266 . . .	360 „	
2274 . . .	398 „	
2284 . . .	439 „	
2290 . . .	439 „	
2301 . . .	462 „	
2302 . . .	462 „	NR
2311 . . .	40 (XXI)	
2332 . . .	119 „	
2338 . . .	120 „ / 422 (XXXI)	NR
2343 . . .	157 (XXI)	
2344 . . .	158 „	
2357 . . .	199 „	
2365 . . .	200 „	
2370 . . .	239 „	
2375 . . .	240 „	
2381 . . .	278 „	
2422 . . .	399 „	
2423 . . .	399 „	
2430 . . .	439 „	NR
2435 . . .	440 „	
2436 . . .	440 „	
2462 . . .	62 (XXII)	NR
2466 . . .	63 „	
2477 . . .	95 „	
2497 . . .	144 „	
2500 . . .	144 „	
2537 . . .	287 „	NR
2539 . . .	288 „	
2545 . . .	312 „	
2553 . . .	47 (XXIII)	
2560 . . .	72 „	. . .511
2569 . . .	120 „	
2573 . . .	144 „	
2577 . . .	168 „	
2586 . . .	216 „	
2587 . . .	216 „	
2591 . . .	240 „	
2593 . . .	264 „	
2599 . . .	288 „	
2602 ******)	318 (XXXI)	
2609 ******)	32 (XXIV)	NR

*) Vezi erata pag. 280, Vol. XVIII.

**) Vezi erata pag. 360, Vol. XVIII.

***) Vezi erata pag. 280, Vol. XIX.

****) Inlocueşte problema 2130 propusă la pag. 430, Vol. XIX.

*****) Soluţia dela pag. 262, Vol. XXI nefiind exactă, se aşteaptă o nouă soluţie. — Pentru îndrumare a se vedea nota dela pag. 109, Vol. XLVII şi observarea de la pag. 112, Vol. XLVIII

******) Inlocueşte problema 2602 propusă la pag. 16, Vol. XXIV.

*******) Soluţia dată la pag. 458, Vol. XXXIX nefiind satisfăcătoare, se aşteaptă o nouă soluţie la această problemă.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2631	112 (XXIV)	
2638	127 „	NR
2645	143 „	
2647*)	438 (XLVII)	.119
2655	191 (XXIV)	NR
2660	191 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	
2675	63 „	
2684	80 „	
2688	80 „	
2692	108 „	
2713	143 „	
2731	191 „	
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	NR
2778	104 „	
2789	135 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2850	335 „	
2865	70 (XXVII)	
2886	104 „	NR
2906	184 „	. . . 72
2909	221 „	
2912	222 „	NR
2922	263 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947**)	376 „	NR
2955	416 „	
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2993	119 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3019	200 „	
3041	319 „	. . . 267
3054	360 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3069	400 (XXVIII)	. . . 415
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	. . . 313
3081	479 „	
	454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3108	80 „	
3118	120 „	
3134***)	199 „	
3150	240 „	
3161	318 „	NR
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3220	40 (XXX)	
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	
3232	119 „	
3239	120 „	
3245	160 „	
3249	160 „	
3253	199 „	.268
3255	199 „	NR
3260	200 „	
3267	239 „	
3277	280 „	
3287	320 „	
3288	320 „	NR
3291	358 „	. . . 315
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR

*) Inlocueşte enunţul problemei 2647 dela pag. 143, Vol. XXIV.

**) Vezi rectificarea pag. 448, Vol. XLIII.

***) A se vedea soluţia parţială dela pag. 254 şi nota dela pag. 300, Vol. XLII. Se aşteaptă completarea soluţiei.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3320	440 (XXX)	
3332*)	119 (XXXI)	. . .557
3340	40 „	
3341	79 „	
3360	120 „	
3389	240 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467 **)	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	
3474	119 „	
3488	159 „	
3493	160 „	
3495	199 „	
3499	199 „	
3504	200 „	
3506	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3533	320 „	
3535	359 „	NR
3536 ***)	438 „	NR
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	
3551	39 (XXXIII)	NR
3572	480 (XXXII)	NR
3573	480 „	
3584	79 (XXXIII)	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3589	80 (XXXIII)	
3597	120 „	
3600	120 „	. . .167
3607 ****)	159 „	
3608	159 „	. . .560
3610	160 „	
3620	199 „	
3622 *****)	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	
3632 ******)	279 „	
3635	279 „	. . .320
3640*******)	280 „	NR
3644	319 „	
3647	320 „	
3653	359 „	NR
3657	359 „	
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3677	440 „	
3681	478 „	NR
3682	478 „	
3689	480 „	NR
3693	39 (XXXIV)	
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3706	79 „	
3713 ********)	119 „	
3720	120 „	. . .322
3725	160 „	
3732	199 „	
3736	200 „	
3749	240 „	
3762	319 „	
3764	319 „	
3768	320 „	
3772	359 „	
3776	360 „	NR
3780	360 „	
3784	399 „	
3787	400 „	

*) A se vedea nota din josul pag. 119, Vol. XXXI.

**) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXII.

***) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIII.

****) Vezi erata pag. 240, Vol. XXXIII.

*****) Vezi erata pag. 280, Vol. XXXIII.

******) Problema rezolvată la pag. 95, Vol. XLII este 3630, iar nu 3632. A se rectifica în consecință tabla de materii a Vol. XLII și a volumelor următoare.

*******) Problema rezolvată la pag. 35, Vol. XLII este 3639, iar nu 3640. A se rectifica în consecință tabla de materii a Vol. XLII și a volumelor următoare.

********) A se vedea erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3790 . . .	400 (XXXIV)	
3792 . . .	439 „	
3793 . . .	439 „	NR
3802 . . .	479 „	. . . 418
3804 . . .	479 „	
3807 . . .	480 „	
3808 *) . . .	480 „	
3810 . . .	480 „	
3817 . . .	40 (XXXV)	
3819 . . .	40 „	
3820 . . .	40 „	
3823 . . .	79 „	
3824 . . .	79 „	
3829 . . .	80 „	NR
3836 . . .	120 „	NR
3844 . . .	159 „	NR
3849 . . .	160 „	
3853 . . .	199 „	
3863 . . .	239 „	NR
3864 . . .	239 „	
3867 . . .	240 „	
3874 . . .	38 (XXXVIII)	
3876 . . .	279 (XXXV)	
3880 . . .	280 „	
3883 . . .	319 „	
3896 . . .	360 „	NR
3902 . . .	398 „	. . . 561
3909 . . .	400 „	NR
3913 . . .	439 „	NR
3933 . . .	39 (XXXVI)	NR
3934 . . .	39 „	
3939 . . .	40 „	
3950 . . .	80 „	
3961 . . .	159 „	
3965 . . .	159 „	
3975 . . .	200 „	
3976 . . .	200 „	
3983 . . .	238 „	NR
3999 . . .	280 „	
4010 . . .	320 „	NR
4013 . . .	359 „	
4022 . . .	398 „	
4028 . . .	400 „	
4030 . . .	400 „	
4034 . . .	439 „	. . . 457
4035 . . .	440 „	
4041 . . .	38 (XXXVIII)	
4045 . . .	479 (XXXVI) / 142 (XL)	NR
4053 **) . .	39 (XXXVII)	NR
4056 . . .	79 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4059 . . .	40 (XXXVII)	
4060 . . .	40 „	
4067 . . .	80 „	
4070 . . .	80 „	
4074 . . .	119 „	
4075 . . .	120 „	
4080 . . .	120 „	
4084 . . .	159 „	
4085 . . .	159 „	NR
4096 . . .	200 „	
4098 . . .	200 „	
4102 . . .	239 „	
4104 . . .	239 „	NR
4105 . . .	240 „	
4107 . . .	240 „	
4111 . . .	279 „	NR
4112 . . .	279 „	NR
4118 . . .	280 „	
4126 . . .	319 „	
4127 . . .	320 „	
4132 . . .	359 „	NR
4148 . . .	400 „	NR
4150 . . .	400 „	NR
4151 . .	438 „	NR
4155 . . .	439 „	
4167 . . .	479 „	NR
4169 . . .	480 „	NR
4172 . . .	39 (XXXVIII)	
4184 . . .	79 „	
4185 . . .	79 „	
4192 . . .	118 „	
4194 . . .	119 „	
4199 . . .	120 „	
4206 . . .	160 „	NR
4210 . . .	160 „	
4214 . . .	198 „	
4234 . . .	279 „	
4236 . . .	280 „	NR
4245 . . .	319 „	
4249 . . .	320 „	NR
4250 . . .	383 (XXXIX)	
4251 . . .	359 (XXXVIII)	
4252 . . .	359 „	. . . 73
4256 . . .	359 „	NR
4257 . . .	359 „	
4270 . . .	400 „	
4274 . . .	439 „	
4275 . . .	439 „	NR
4277 . . .	440 „	NR
4281 . . .	479 „	NR
4283 . . .	479 „	NR

*) A se vedea completarea enunțului la pag. 288, Vol. XL.

**) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4285*) . . .	479 (XXXVIII)	
4287 . . .	480 „	
4289 . . .	480 „	
4290 . . .	383 (XXXIX)	NR
4297 . . .	40 „	
4302 . . .	78 „	
4303 . . .	78 „	NR
4307 . . .	79 „	
4315 . . .	120 „	NR
4316 . . .	120 „	
4319 . . .	120 „	NR
4326 . . .	159 „	
4333 . . .	198 „	NR
4335 . . .	198 „	
4337 . . .	200 „	NR
4340 . . .	200 „	NR
4350 . . .	240 „	
4352 . . .	286 „	
4356 . . .	287 „	
4357 . . .	288 „	NR
4358 . . .	288 „	NR
4360 . . .	334 „	
4362 . . .	334 „	NR
4363 . . .	335 „	NR
4370 . . .	336 „	
4373 . . .	383 „	
4376 . . .	384 „	
4380 . . .	384 „	NR
4384 . . .	431 „	NR
4389 . . .	432 „	. . .219
4393 . . .	478 „	
4395**) .	479 „	NR
4399 . . .	480 „	NR
4402 . . .	480 „	
4404 . . .	526 „	NR
4405 . . .	526 „	NR
4407 . . .	527 „	
4411 . . .	528 „	
4412 . . .	528 „	
4416 . . .	46 (XL)	
4426 . . .	48 „	
4435 . . .	96 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4445 . . .	143 (XL)	
4446 . . .	143 „	
4449 . . .	144 „	NR
4450 . . .	144 „	
4458 . . .	191 „	
4464***) .	109 (XLV)	. . .121
4468 . . .	239 (XL)	
4473 . . .	240 „	
4478 ****) .	285 „	
4480 . . .	286 „	
4484 . . .	287 „	
4486 *****)	288 „	
4487 . . .	334 „	NR
4489 . . .	334 „	NR
4490 . . .	335 „	NR
4492 . . .	335 „	NR
4494 . . .	336 „	
4496 . . .	336 „	
4509 . . .	384 „	
4511 . . .	430 „	NR
4513 . . .	430 „	NR
4515 . . .	431 „	
4516******)	165 (XLVI)	. . 270
4520 . . .	432 (XL)	
4525 . . .	478 „	
4533 . . .	480 „	
4534 . . .	480 „	NR
4540 . . .	527 „	
4547 . . .	573 „	NR
4548 . . .	573 „	
4550 . . .	574 „	NR
4553*******)	574 „	
4557 . . .	575 „	
4558 . . .	576 „	NR
4559 . . .	116 (XLI)	NR
4560********)	116 „	
4561 . . .	116 „	NR
4564*********)	117 „	. . .412 XLI
4566 . . .	118 „	
4568 . . .	118 „	
4571 . . .	119 „	
4573 . . .	119 „	

*) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIX.

**) Vezi erata pag. 48, Vol. XL.

***) Inlocueşte problema 4464 dela pag. 240, Vol. XL. Ia tabla de materii a Vol. XLVI, problema 4464 a fost trecută din eroare ca rezolvată în pag. 109, a acelui volum.

****) Vezi erata pag. 384, Vol. XL.

*****) Vezi erata pag. 120, Vol. XLI.

******) Inlocueşte problema 4516 dela pag. 431, Vol. XL.

*******) I s'a dat o soluţie la pag. 352, Vol. XLI. A se vedea nota dela pag. 302. Vol. XLII. Se aşteaptă completarea soluţiei.

********) Vezi erata pag. 160, Vol. XLI.

*********) Vezi o soluţie la pag. 412, Vol. XLI, în articolul „Proprietăţi geometrice".

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4576	119 (XLI)	
4578	120 „	
4581	166 „	
4587 *)	262 „	
4588	168 „	. . . 74
4589	168 „	
4590	168 „	
4593	215 „	
4596	215 „	
4598 **)	216 „	NR
4601	216 „	
4603	262 „	NR
4607 ***)	263 „	
4613	264 „	
4614	264 „	NR
4615	310 „	NR
4618	311 „	. . . 30
4620	311 „	
4625	312 „	
4630	359 „	NR
4631	359 „	
4633	359 „	. . . 271
4634	360 „	
4636	360 „	
4637	360 „	
4638	360 „	
4640	406 „	
4641	407 „	NR
4644	407 „	
4647	408 „	NR
4657	454 „	
4660	455 „	NR
4664	503 „	
4667 ****)	501 (XLV)	. . . 124
4670	504 (XLI)	
4671	504 „	NR
4672	504 „	
4673	504 „	
4674	504 „	
4680	550 „	
4683	551 „	
4685 *****)	552 „	NR
4686	552 „	NR
4688	598 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost Propusă	Rezolvată
4690	598 (XLI)	
4693	599 „	
4695	600 „	
4696	600 „	NR
4697	600 „	
4698	600 „	NR
4703	647 „	
4705	647 „	
4706	647 „	
4710	648 „	NR
4717	55 (XLII)	
4720	56 „	
4722	56 „	
4726	110 „	
4729	111 „	
4730	111 „	. . . 170
4731 ******)	112 „	
4734	112 „	
4741	167 „	
4742	167 „	
4745	168 „	
4749	223 „	
4753	223 „	
4755	224 „	
4765	279 „	
4768	280 „	
4770	280 „	
4772	334 „	
4779	336 „	
4780	336 „	
4783	390 „	NR
4785	390 „	
4788 *******)	390 „	
4790	391 „	
4791	391 „	NR
4793	392 „	
4801	447 „	
4804	448 „	
4812	503 „	
4815	504 „	
4817	504 „	
4821	558 „	
4825	559 „	
4826	559 „	

*) Inlocueşte problema 4587 dela pag. 168, Vol. XLI.

**) Vezi erata pag. 264, Vol. XLI.

***) Vezi erata pag. 312, Vol. XLI.

****) Inlocueşte problema 4667 propusă la pag. 503, Vol. XLI.

*****) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600, Vol. XLI.

******) Vezi erata pag. 56, Vol. XLIII.

*******) Problema rezolvată la pag. 611, Vol. XLII, este 4787, iar nu 4788. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4836 . . .	615 (XLII)	
4839 *) . .	616 „	NR
4840 . . .	616 „	
4848 . . .	671 „	
4849 . . .	671 „	NR
4853 . . .	672 „	
4854 . . .	672 „	
4859 . . .	55 (XLIII)	
4866 . . .	56 „	
4870 . . .	110 „	
4879 . . .	166 „	
4880 . . .	166 „	
4889 . . .	168 „	
4894 . . .	222 „	NR
4897 . . .	223 „	
4898 . . .	223 „	NR
4901 . . .	224 „	NR
4905 . . .	278 „	NR
4909 . . .	279 „	
4913 . . .	280 „	NR
4914 **) . .	501 (XLV)	NR
4917 . . .	334 (XLIII)	
4920 . . .	334 „	
4922 . . .	335 „	NR
4923 . . .	335 „	
4928 . . .	390 „	
4929 ***) . .	390 „	NR
4937 . . .	392 „	NR
4938 . . .	392 „	NR
4940 . . .	446 „	
4944 . . .	447 „	
4946 . . .	447 „	
4949 . . .	448 „	NR
4953 ****) .	614 „	NR
4954 . . .	502 „	
4955 . . .	503 „	
4958 . . .	503 „	
4959 . . .	504 „	. . 171
4962 . . .	504 „	
4967 . . .	559 „	
4968 . . .	559 „	
4969 . . .	559 „	
4973 . . .	560 „	NR
4974 . . .	560 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4977 . . .	614 (XLIII)	
4981 . . .	615 „	
4982 . . .	615 „	. . .171
4984 . . .	616 „	
4985 . . .	616 „	
4986 . . .	616 „	
4989 . . .	670 „	
4991 *****)	102 (XLVII)	
4992 . . .	671 (XLIII)	
4993 . . .	671 „	
4995 . . .	671 „	
4997 . . .	672 „	NR
5001 . . .	54 (XLIV)	. . .221
5002 . . .	54 „	
5006 . . .	55 „	
5009 . . .	55 „	NR
5010 . . .	56 „	NR
5012 . . .	56 „	
5013 . . .	56 „	
5016 . . .	109 „	
5020 . . .	110 „	
5021 . . .	110 „	
5022 . . .	111 „	
5026 . . .	112 „	
5027 . . .	112 „	
5028 . . .	112 „	NR
5030 . . .	166 „	
5031 . . .	166 „	
5033 . . .	166 „	
5034 . . .	167 „	
5037 . . .	167 „	NR
5040 . . .	168 „	
5043 . . .	168 „	NR
5045 ******)	222 „	
5046 . . .	222 „	
5047 . . .	222 „	. . .274
5049 . . .	222 „	
5051 . . .	223 „	
5052*******)	223 „	
5053 . . .	223 „	NR
5054 . . .	223 „	
5055 . . .	224 „	
5056********)	190 „	(XLVIII)
5059 . . .	277 „	(XLIV)

*) Vezi erata pag. 672, Vol. XLII.

**) Inlocueşte problema 4914, propusă la pag. 280, Vol. XLIII.

***) Numărul problemei rezolvate la pag. 494 este 4926 iar nu 4929.

****) I s'a modificat enunţul dela pag. 502, Vol. XLIII.

*****) Inlocueşte problema 4991 propusă la pag. 670, Vol. XLVI. A se vedea şi erata dela pag. 152, Vol. XLVII.

******) Vezi erata pag. 280, Vol. XLIV.

*******) Vezi erata pag. 336, Vol. XLIV.

********) Inlocueşte problema 5056 dela pag. 615, Vol. XVIII şi pe cea cu acelaşi număr dela pag. 224, Vol. XLIV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5060 . . .	277 (XLIV)	
5061*) . . .	334 „	. . . 125
5064 . . .	278 „	
5068 . . .	278 „	NR
5069 . . .	279 „	NR
5072 . . .	280 „	
5073 **) . .	280 „	NR
5074 . . .	334 „	NR
5075 ***) .	335 „	
5076 . . .	335 „	NR
5079 . . .	335 „	
5082 . . .	335 „	
5085 . . .	336 „	NR
5086 . . .	336 „	
5091 . . .	390 „	
5092 . . .	390 „	
5093 . . .	390 „	
5094 . . .	391 „	NR
5095 . . .	391 „	. . . 324
5099 . . .	391 „	
5105 . . .	445 „	
5106 . . .	445 „	
5110 . . .	446 „	
5111 . . .	446 „	
5114 . . .	447 „	. . . 77
5116 . . .	447 „	. . . 174
5117 . . .	448 „	
5121 . . .	501 „	
5123 . . .	501 „	NR
5126 . . .	502 „	
5127 . . .	502 „	NR
5128 . . .	503 „	
5129 . . .	503 „	NR
5130 . . .	503 „	NR
5136 . . .	558 „	
5137 . . .	558 „	
5138 . . .	559 „	
5139 . . .	559 „	NR
5140 . . .	559 „	
5142 . . .	559 „	
5143 . . .	560 „	
5144 . . .	560 „	
5145 . . .	560 „	
5146 . . .	560 „	
5155 . . .	615 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5157 . . .	615 (XLIV)	
5158 . . .	615 „	
5161 . . .	616 „	
5162 ****) .	616 „	
5167 . . .	669 „	
5168 . . .	669 „	. . . 236
5169 . . .	670 „	
5170 . . .	670 „	
5171 . . .	670 „	. . . 515
5172 . . .	670 „	
5173 . . .	671 „	
5176 . . .	671 „	. . . 364
5177 . . .	672 „	
5178 . . .	672 „	NR
5179 . . .	672 „	. . . 367
5181 *****) .	53 „	. . . 224
5182 . . .	53 „	
5183 . . .	53 „	
5184 . . .	54 „	NR
5192 . . .	55 „	
5196 . . .	109 „	NR
5197 ******)	110 „	
5200 . . .	110 „	NR
5203 *******)	669 „	. . . 516
5204 . . .	111 „	NR
5205 . . .	111 „	
5206 . . .	111 „	
5209 . . .	112 „	
5211 . . .	166 „	. . . 126
5212 . . .	166 „	NR
5216 . . .	167 „	
5217 . . .	167 „	
5220 . . .	168 „	NR
5221 . . .	168 „	NR
5225 . . .	220 „	NR
5226 . . .	221 „	
5227 . . .	221 „	
5230 . . .	221 „	NR
5234 . . .	222 „	
5236 . . .	223 „	
5242 . . .	278 „	
5244 . . .	278 „	
5246 . . .	278 „	. . . 31
5247 . . .	279 „	
5248 . . .	279 (XLV)	NR

*) Inlocueşte problema propusă cu acelaşi număr la pag. 277, Vol. XLIV.

**) Vezi erata pag. 448, Vol. XLIV.

***) Vezi erata pag. 392. Vol. XLIV.

****) Vezi erata pag. 672, Vol. XLIV.

*****) Vezi rectificarea numărului de ordine la pag. 112, Vol. XLV.

******) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

*******) Inlocueşte problema 5203 propusă la pag. 111, Vol. XLV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5249	279 (XLV)	519
5250	279 „	
5252	280 „	
5253	280 „	NR
5254	280 „	458
5258	334 „	
5260 *)	557 (XLVI)	
5261	334 (XLV)	
5262 **)	334 „	
5267	335 „	
5272	389 „	
5274	390 „	NR
5276	390 „	
5278	390 „	80
5279	391 „	
5284	392 „	NR
5286	392 „	NR
5288	446 „	
5289	446 „	NR
5290	446 „	
5291	446 „	326
5292	446 „	
5293 ***)	447 „	
5294	447 „	
5295	447 „	NR
5296	447 „	
5298	448 „	NR
5301	448 „	
5302	501 „	
5303	502 „	
5304	502 „	176
5305	502 „	520
5306	502 „	82
5309	503 „	
5312	503 „	
5318	557 „	
5320	557 „	
5321	557 „	
5322	558 „	
5324	558 „	
5325	558 „	
5326	558 „	
5327	559 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5332	613 (XLV)	
5333	613 „	
5334	614 „	
5335	614 „	NR
5336	614 „	129
5337	614 „	
5339	615 „	
5341	615 „	420
5342	615 „	NR
5343	616 „	
5344	616 „	NR
5345	616 „	33
5347 ****)	445 „	85
5349	670 „	NR
5351	670 „	
5352	670 „	83
5354	671 „	
5355	671 „	
5357	671 „	NR
5358	671 „	
5360	672 „	NR
5363	53 (XLVI)	
5366	54 „	
5367	54 „	
5368	54 „	224
5370	55 „	NR
5371	55 „	
5376	56 „	NR
5379	110 „	227
5380	110 „	
5381 *****)	110 „	275
5382	110 „	NR
5383	111 „	NR
5384	111 „	
5388	112 „	NR
5391	112 „	
5392	165 „	
5394	166 „	
5395	166 „	
5396	166 „	
5397	166 „	
5399	167 „	459
5404	168 „	

*) Inlocuește vechea problemă 5260 a cărei soluție dela pag. 271, Vol. XLVI se anulează după cum se anulează și noua problemă 5260, propusă la pag. 444, Vol. XLVI. A se vedea nota dela pag. 529, Vol. XLVI și erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

**) Vezi erata pag. 392, Vol. XLV.

***) Vezi erata pag. 560, Vol. XLV.

****) Inlocuește problema 5347, dela pag. 669 Vol. XLV. A se vedea nota din josul pag. 445 Vol. XLVI și erata dela pag. 440, Vol. XLVII. Să se suprime nota cu două asterice dela pag. 695 Vol. XLVI.

*****) Vezi complectarea enunțului la pag. 248, Vol. XLVII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5405	168 (XLVI)	NR
5408	221 „	NR
5410	222 „	
5411	222 „	NR
5412	222 „	
5413	222 „	
5416	223 „	
5418	224 „	
5419	224 „	
5421	224 „	NR
5422	578 „	NR
5423	278 „	. . 37
5425	278 „	NR
5426*)	389 „	
5427	278 „	
5429	279 „	
5430	279 „	
5431	279 „	
5432	280 „	
5433	280 „	
5434	280 „	
5435	280 „	
5440	334 „	
5441	334 „	
5443	335 „	
5445	335 „	. . .229
5446	335 „	. . 35
5447	445 „	. . .131
5448	336 „	NR
5449	336 „	
5450	336 „	NR
5453	389 „	NR
5454	389 „	
5455	389 „	
5456	390 „	
5458	390 „	
5459	391 „	
5460	391 „	NR
5461	391 „	NR
5462	391 „	NR
5463	392 „	NR
5464	392 „	
5465	392 „	NR
5466	392 „	NR
5467	445 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5468	445 (XLVI)	. . .177
5470	446 „	NR
5471	446 „	. . .522
5472	446 „	NR
5473	446 „	. . .230
5474	447 „	. . .275
5475**)	502 „	
5476***)	669 „	. 327,461
5477	447 „	. . .328
5478	447 „	
5479	448 „	NR
5481	448 „	NR
5484	503 „	NR
5485****)	503 „	
5487	503 „	
5488 *****)	503 „	. . .329
5489	503 „	
5490	503 „	NR
5491	504 „	
5492	504 „	
5493	504 „	
5494	504 „	
5496	504 „	
5497	557 „	NR
5498	557 „	NR
5500	558 „	
5502	558 „	NR
5503	558 „	
5504	559 „	. . .232
5505	559 „	
5506	559 „	
5507	559 „	. . .233
5508	560 „	
5509	560 „	
5512	614 „	
5513	614 „	NR
5514	615 „	NR
5515	615 „	NR
5516	615 „	NR
5517	615 „	
5518	615 „	. . .330
5519	616 „	
5520	616 „	
5521 ******)	616 „	
5522	616 „	

*) Inlocueşte problema 5426 de la pag. 278, Vol. XLVI.

**) Inlocueşte enunţul de la pag. 447, Vol. XLVI.

***) Inlocueşte problema de la pag. 447, Vol. XLVI. Soluţia dela pag. 327 din acest volum este a enunţului anulat dela pag. 448, Vol. XLVI.

****) Vezi erata de la pag. 560, Vol. XLVI.

*****) I s'au mai publicat 2 soluţii la pag. 385, Vol. XLVIII.

******) A se vedea erata de la pag. 672, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5523*)	293 (XLVI)	
5524	616 „	
5525	616 „	NR
5527	664 „	
5528	669 „	NR
5530	670 „	129
5532	670 „	
5533	670 „	
5534	670 „	
5535	671 „	
5536	671 „	
5537 **)	671 „	276
5538	671 „	NR
5539	671 „	
5540	672 „	
5542	54 (XLVII)	NR
5543	54 „	39
5545	54 „	
5546	54 „	
5547	55 „	
5548	55 „	NR
5549	55 „	85
5550	55 „	39
5551	55 „	
5552	55 „	
5553	56 „	134
5554	56 „	
5558	102 „	
5559	103 „	376
5560	103 „	NR
5561	103 „	
5562	103 „	235
5563 ***)	103 „	
5564	103 „	
5565 ****)	150 „	
5566	104 „	464
5567	104 „	
5568	104 „	NR
5570	150 „	
5571	150 „	
5572	151 „	
5573	151 „	
5574	151 „	
5575 *****)	190 (XLVIII)	
5576	151 (XLVII)	NR
5577	152 „	
5578	152 (XLVII)	
5579	152 „	87
5580 ******)	142 (XLVIII)	
5581	199 (XLVII)	
5582	199 „	NR
5583	199 „	
5584	199 „	
5585	199 „	
5586	200 „	330
5587	200 „	
5588	200 „	
5589	200 „	
5591	200 „	NR
5592	246 „	42
5593	246 „	
5594	246 „	332
5595	246 „	
5596	247 „	
5597	247 „	NR
5598	247 „	
5599	247 „	
5600	247 „	
5601	248 „	
5602	248 „	
5603	248 „	42
5605	294 „	427, 466
5606	294 „	
5607	204 „	
5608	294 „	
5609	295 „	
5610	295 „	
5611	295 „	
5612	295 „	
5614	296 „	180
5615	296 „	
5616	296 „	
5618	342 „	
5619	342 „	
5620	342 „	
5621	343 „	
5622	343 „	
5623	343 „	
5624	343 „	
5625	343 „	
5626	344 „	
5627	344 „	89

*) Inlocueşte problema 5523, dela pag. 616, Vol. XLVI.
**) Vezi erata pag. 152, Vol. XLVII.
***) Vezi erata pag. 152, Vol. XLVII.
****) Inlocueşte enunţul dela pag. 104, Vol. XLVII.
*****) Rectifică enunţul dela pag. 199, Vol. XLVII.
******) Inlocuieşte enunţul dela pag. 151, Vol. XLVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5628	344 (XLVII)	.181
5629	344 „	.182
5630	389 „	
5631	390 „	.467
5632	390 „	
5633	390 „	NR
5934	390 „	
5635	391 „	
5636	391 „	NR
5637	391 „	
5638	392 „	
5639	392 „	
5640	392 „	
5641	392 „	.136
5642	438 „	91
5643	438 „	
5644	438 „	.469
5645	438 „	.278
5646	439 „	
5647	439 „	NR
5648	439 „	.138
5649	439 „	
5650	439 „	
5651	440 „	NR
5652	440 „	NR
5653	440 „	
5655	486 „	NR
5656	486 „	
5657	486 „	
5658	486 „	NR
5659	486 „	
5660	487 „	.186
5661	487 „	.562
5662	487 „	NR
5663	488 „	
5664	488 „	
5665	488 „	
5666	488 „	
5667	533 „	NR
5668	533 „	NR
5669	533 „	
5670	534 „	
5671	534 „	NR
5672	534 „	NR
5673	534 „	NR
5674	535 „	
5675 *)	574 (XLVIII)	
5676	535 (XLVII)	
5677 **)	536 „	
5678	536 „	NR
5679	582 „	.139

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5680	582 (XLVII)	NR
5681	582 „	NR
5682	582 „	NR
5683	583 „	
5684	583 „	
5685	583 „	
5686	583 „	.377
5687	583 „	
5688	584 „	
5689	584 „	.281
5690	584 „	NR
5691	46 (XLVIII)	NR
5692	46 „	.470
5693	46 „	
5694	46 „	.377
5695	46 „	
5696	47 „	
5697	47 „	
5698	47 „	
5699	48 „	NR
5700	48 „	NR
5701	48 „	NR
5702	48 „	
5703	93 „	.429
5704	93 „	
5705	93 „	.565
5706	93 „	.284
5707	94 „	
5708	94 „	
5709	94 „	NR
5710	95 „	
5711	95 „	
5712	95 „	
5713	96 „	NR
5714	96 „	NR
5715	142 „	NR
5716	142 „	
5717	142 „	.567
5718	143 „	
5719	143 „	
5720	143 „	.569
5721	143 „	
5722	143 „	.472
5723	143 „	NR
5724	144 „	
5725	144 „	.379
5726	144 „	
2727	190 „	
5728	190 „	NR
5729	190 „	NR
5730	191 „	

*) Inlocueşte enunţul dela pag. 535, Vol. XLVII.

**) Vezi erata dela pag. 584, Vol. XLVII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5731	191 (XLVIII)	NR
5732	191 „	
5733	191 „	
5734	191 „	
5735	192 „	
5736*)	525 „	NR
5737**)	192 „	NR
5738	192 „	NR
5739	238 „	
5740	238 „	
5741	238 „	572
5742	238 „	NR
5743	238 „	
5744	238 „	
5745	239 „	NR
5746	539 „	NR
5747	240 „	
5748	240 „	NR
5749	240 „	NR
5750	286 „	
5751	286 „	NR
5752	286 „	
5753	286 „	
5754	286 „	
5755	287 „	
5756	287 „	
5757	287 „	NR
5758	287 „	
5759	288 „	NR
5760	288 „	
5761	288 „	473
5762	334 „	476
5763	334 „	
5764	334 „	
5765	334 „	
5766	335 „	NR
5767	335 „	
5768	335 „	
5769	335 „	NR
5770	335 „	
5771	336 „	
5772	336 „	NR
5773	336 „	
5774	336 „	NR
5775	381 „	573
5776	381 „	
5777	381 „	NR
5778	382 „	
5779	382 „	
5780	382 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5781	383 (XLVIII)	
5782	383 „	
5783	383 „	NR
5784	384 „	
5785	384 „	NR
5786	384 „	
5787	384 „	NR
5788	430 „	
5789	430 „	
5790	431 „	
5791 ***)	431 „	
5792	431 „	NR
5793	431 „	
5794	431 „	
5795	431 „	NR
5796	432 „	
5797	432 „	
5798	432 „	
5799	432 „	NR
5800	478 „	NR
5801	478 „	
5802	478 „	
5803	478 „	NR
5804	478 „	NR
5805	479 „	NR
5806	479 „	NR
5807	479 „	
5808	479 „	NR
5809	479 „	NR
5810	480 „	NR
5811	480 „	NR
5812	525 „	
5813	526 „	
5814	526 „	NR
5815	526 „	NR
5816	526 „	NR
5817	526 „	NR
5818	527 „	NR
5819	527 „	NR
5820	527 „	NR
5821	528 „	NR
5822	528 „	NR
5823	528 „	NR
5824	528 „	NR
5825	574 „	NR
5826	575 „	NR
5827	575 „	NR
5828	575 „	NR
5829	575 „	NR
5830	575 „	NR

*) Inlocuește enunțul de la pag. 192, Vol. XLVIII.
**) Vezi erata de la pag. 288, Vol. XLVIII.
***) Vezi erata de la pag. 480, Vol. XLVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5831	575 (XLVIII)	NR
5832	576 „	NR
5833	576 „	NR
5834	576 (XLVIII)	NR
5835	576 „	NR
5836	576 „	NR

I. EXERCIŢII *)

Aritmetica şi Teoria numerelor . . . . . 5(140), 8(188), 15(285), 16(333), 22(477).
Geometria . . . . . 1(45), 6(141), 13(237), 14(237), 17(333).
Algebra . . . . . 21(430), 23(524), 24(574).
Trigonometrie . . . . . 2(92), 3(92), 7(141), 9(189), 10(236), 12(236), 18(380), 19(380).
Geometria Descriptivă . 11(236).
Geometria analitică şi infinitizimală . . . . 4(92), 20(381).

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E., 167, 322, 511.
Abramescu N., 6, 7, 24, 28, 118, 162, 336, 388, 400, 420, 427, 433, 454, 508, 509, 542.
Adam M., 552.
Adamescu Gh., 344.
Alaci V., 7, 95, 118, 159, 166, 192, 220, 233, 234, 276, 406, 433, 508.
Alasia C., 71, 121, 167, 313, 511, 553.
Aldea V. M., 280.
Aldea N. N., 7, 419.
Aldea V. V., 124.
Alexa Maria, 509.
Alexi P. A., 509.
Alexiu I., 5, 6, 7, 217.
Aliman I., 419.
Aliman I. V., 419.
Amărăşteanu F. M., 312.
Amodeo Fr., 119.
Ampère A. M., 29.
Anastasiu Al. Em., 339.
Andonie Gh. 7.
Andonie S. I., 326.
Andreescu M. M., 34, 134.
Andrei Gh. A., 38, 129, 232, 233, 254, 277, 327, 470.
Andronescu Pl., 7, 53, 202, 296, 487, 536.
Angelescu A., 22, 170, 240, 387.
Angelescu E., 166, 167.
Angheluţă Th., 6, 7, 70, 98, 118, 148, 149, 310, 311, 312, 357, 397, 406, 433, 451, 509.
Antoniu Corn, 7
Antoniu S. I., 5, 6, 7, 39, 74, 77, 93, 565, 566.
Apolonius, 82, 219, 220.
Apostolescu A. G, 419.
Apostolescu I., 419.
Ardeleanu Gh., 138.
Arghiriade Em., 5, 7, 386, 507, 509.
Arhimede, 97, 509.
Armeanca I., 7, 70.
Asachi Gh., 511.
Avramescu A., 7.
Avramescu C., 7.

Bachiller R., 357, 358, 552.
Bachmann P., 119.
Backes F., 265.
Bădărău E., 7.
Badea A. I., 7, 134, 330, 464.
Bădescu A. L., 7.
Bădescu R., 7, 96, 509.
Bădulescu Alexandra, 8.
Bădulescu P. N., 33.
Baidaff Ig. B., 8,
Bakonyi C. C., 231, 233, 234, 326, 330, 380, 463.
Balaguer S. F., 358.
Bălan G, Şt., 8, 358, 388, 389, 390, 413.
Bălănescu M. Maior, 389.
Bălăşel T., 510.
Ballan E., 8, 72.
Ballieu R., 265.
Balş Th., 116.
Baltă C., 231, 233.
Banciu I., 22.
Barbilian D., 5, 8, 118, 143, 192, 214, 215, 525, 569, 572.
Bărglăzan N. A., 509.
Bârlea V., 516.
Bârlea-Suhăţeanu G. V., 38, 275, 326.
Bârzescu M., 134, 139, 377, 383, 428, 429, 466, 470, 471, 472, 566, 573.
Bârzescu I. V., 254, 388, 390.
Basacov Gh., 119, 527.
Baur Fr., 218.
Beleş A., 185, 358, 388, 389, 390.
Beneş P., 6, 8.
Beno M., 276.
Berdan C., 315.
Bereanu B., 285, 472.
Bertrand J., 85.
Bibescu Vodă, 343.
Bidoianu A., 419.

*) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exerciţiul al cărui număr precede paranteza.

Bieberbach L., 218.
Blanchet A. M., 167.
Bodnărescu M H., 232, 233, 357, 366, 461, 516, 521.
Boerescu P. G., 419.
Bogdan Gr. Gh., 131, 327, 330.
Boian C. I., 419.
Boiangiu D. D., 84. 90, 131, 179, 182, 229, 326, 333.
Boldescu B. P., 66.
Bolgar V. D., 419
Bonnet O., 524.
Borneanu G., 8.
Borş C., 347, 509.
Bosinceanu C., 232, 233.
Botea G. Em., 6, 8, 208.
Botea G. N., 22, 207, 208.
Botez St. M., 6, 8.
Bourlet C., 388.
Brătianu Vintilă, 435.
Brătila F., D-ra, 522.
Bratu Elena, 71.
Bratu Gh., 22, 70, 71, 118, 388, 389, 390.
Bredt, 26.
Brianchon, 62.
Brisse, 507.
Brocard, 80, 82, 432.
Broşteanu Gh. Gh., 231, 328.
Bruckner V., 8
Buchanan R., 357, 358.
Bucurescu I. Cpt., 8.
Budeanu I. C., 8,
Buia Al., 509.
Buiciiu Gh. G-l., 5, 6, 8, 30, 31, 38, 41, 45, 46, 56, 63, 67, 94, 109, 119, 123, 129, 134, 140, 143, 177, 192, 208, 211, 220, 224, 240, 253, 258, 275, 286, 290, 300, 301, 320, 326, 333, 334, 340, 350, 352, 377, 383, 385, 418, 419, 431, 450, 472, 478, 504, 520, 526, 548, 557, 560, 569, 574.
Bujor P., 509.
Bujoreanu N., 8
Bunescu D. A., 5. 8, 26, 166, 406, 479, 483, 502,
Bungescu I. Col., 8.
Bungeţeanu Preduţa, 22.
Buradescu T., 9.
Burcă, Popa, 395.
Burileanu Şt. G-l., 9.
Buşilă Ad., 9, 171.
Buşilă D. C., 9, 391.
Buşilă G. I., 9, 25.
Buzescu R. M., 464, 470.
Buzincu I. I. 139, 357, 377.

Călin I., 39.
Călugăreanu G., 71, 118, 143, 240 386, 432, 433.
Cambureanu V. D., 9.
Cambureanu V. V., 9.
Càndea C., 509.
Capriel I., 9.
Caracostea D. A., 9.
Carada T. M., 34.
Carafoli E., 9.
Caraman E., 9, 271,
Cardan, 280.
Cârdeiu F., 509.
Carmichael R., 74.
Carnot, 569, 570, 572.
Carol, Domnitor, 344.
Carp I. P., 553.
Cârstea D. Marin, 254.
Cârstoiu G. N., 254.
Cartianu Gh., 9.
Căruntu D. F., 254, 377, 470.
Cassian Gh. G-l., 9.
Caţichi M. E., 170.
Couchoy Ivette, 118.
Cauchy A., 148, 149, 150.
Cavallaro G. V., 509.
Cayley, 119, 508.
Cazacu N. C., 9.
Cazamian A., 507.
Cazanacli V. P., 9, 275.
Cesaro E., 35, 66, 457, 520.
Cetăţeanu St., 68, 327, 477, 516.
Ceva, 62, 237.
Cherţman M., 516.
Chiran P., 254.
Chiriac C., 567.
Chiricescu V., 9.
Chiricuţă A., 9
Chirilov Gh., 29.
Chisini O., 345.
Chiţu Gh., 344.
Chiţulescu I. I., 6, 10, 385, 454.
Chiţulescu I. Tr., 429.
Ciobanu I., 358.
Cioc M., 10.
Ciocan H., 28.
Ciorănescu I. C., 268.
Ciorănescu I. N., 10, 386
Ciorapciu F. M., 10.
Ciumaşu V., 254, 428, 466.
Ciuruleanu I., 508.
Claeyes A., 265.
Claudian V., 10.
Clifford, 118.
Coca N., 285.
Cocea Gh. Th., 82, 238, 383.
Cojocaru P. P., 170.
Columbeanu D. P., 254, 389, 471, 568, 573.
Comberousse Ch. de, 66.
Constantinescu, 343.
Constantinescu I. E., 39, 254, 471.
Constantinescu George Ing. 10, 343.
Constantinescu Gh. Gh., 5, 6, 10, 118, 305, 381, 385, 504, 546.
Constantinescu I. M., 378, 429, 566, 573.
Constantinescu N. Mircea, 419.
Constantinescu T., 10.
Constantinescu Z., 10.
Copernic, 97, 98.
Corbaru D. A., 188.
Corbaru D. Dan, 378, 472.
Coşereanu I., 10.
Coşniţă C., 122, 174, 344, 371, 561.
Costăchescu V. C. Cpt., 10, 265, 310, 509.
Costeanu G., 509.
Costinescu D., 10.
Cotariu D. M., 39, 73, 87, 92, 135, 141, 236, 237, 377, 378, 380, 428, 429, 466, 469, 472, 476, 511, 556.
Crăciuneanu C. Cpt., 10.
Crăciunescu E., 528.
Creangă I., 508.
Creţu D. M., 419.
Cristescu V., 210, 275, 312, 340, 342, 389, 391, 392.
Cristodulo N., 509.
Crivăţ Th., 30.
Crivetz I. Vl., 419.
Cruceru Gh. C., 39, 129, 134, 179, 277, 327, 329, 333.
Cubat C. A., 91.
Cubat H. A., 129, 180, 188, 254, 378, 429, 464, 466, 469, 470, 471, 472, 568.

Cucu A. I. Cpt., 23, 25, 26.
Cuesta N., 357.
Curea I., 70.
Curchi I., 458.

Dandelin, 415, 417.
Darboux G,, 28, 150.
Dăscălescu Hr., 10.
Deac C. C., 129.
Deaux R., 265.
Demetrescu Steliu, 166.
Diaconescu V. C,, 179, 327.
Diaconescu C. P., 429.
Diamandi, 395.
Diesel, 356.
Dimitriu I. Călin, 125.
Dimitriu Tigran, 188.
Dinescu P. Al., 10.
Dinulescu N., 72.
Dirichlet, 533.
Dobrescu Andrei, 10, 509.
Dobrescu V. E, 134, 166, 509.
Dobrescu P. P,, 43, 88.
Donciu N., 10, 92.
Donţu G. G, 91, 124, 136, 138, 142, 254, 330, 377, 378, 389, 429, 466, 469, 470, 471, 472, 567.
Drăgănescu, Şt., 395.
Drăghiceanu M. M., 167.
Drăghicescu P. P., 22, 23, 31, 33, 38, 47, 78, 79, 83, 84, 85, 90, 91, 92, 116, 120, 121, 124, 128, 129, 131, 133, 136, 138, 140, 141, 165, 172, 191, 230, 231, 232, 233, 235, 262, 264, 277, 299, 300, 320, 324, 327, 328, 330, 336, 347, 348, 355, 366, 372, 377, 406, 427, 429, 451, 463, 464, 469, 470, 472, 476, 502, 515, 521, 527, 565, 566, 567, 572, 573, 575.
Dragomirescu - Buzne Ed. Cpt., 11, 388.
Drăgulescu C. 509.
Drosescu Gh. I., 11.
Duca G. I, 439
Dumitraşcu V., 435.
Dumitrescu Cezar, 179.
Dumitrescu A. D., 11.
Dumitrescu F. Dan, 39, 254, 285, 387, 388, 390, 429, 448.
Dumitrescu I. Gh., 6, 11.
Dumitrescu C. I., 11.
Dumitrescu M., 172.
Dumitrescu F. Sorin, 254, 388, 389, 390.
Dumitrescu Tr. 285, 378.
Dumitriu C., 39.
Dutari C. N., 414.

Eckstein V., 80, 177, 520.
Eftimie D. C., 23, 39, 136, 139, 180, 231, 327, 328, 332, 377, 461, 470, 516, 519, 556.
Emanuel D., 311, 391.
Emde Fr., 484.
Enăchescu Gr. I., 233, 254, 566.
Enneper, 414.
Enulescu O., 562.
Euclide, 25, 30, 387, 388, 389.
Eugeniu T. Pavel, 43.
Euler, 28, 62, 98, 99, 100, 103, 145, 148, 167, 270, 271, 367, 371, 372, 407, 494, 505, 544.

F. G. M., 53, 87, 415.
F. J., 53.
Fantappie L., 552.
Faur C., 30.
Favard I., 118.
Feigl G., 218.
Felix St. C., 318.
Fermat, 62, 124.
Feuerbach. 335.
Filipescu Em. Gh., 22, 347, 388, 392, 553.
Florescu B. I., 37, 119, 165, 190, 286, 335, 361, 382, 430, 479, 526, 550, 575.
Florescu M. U., 11.
Florian Z., 11.
Florică D. St.*), 187, 358.
Focşeneanu I. M. Căp., 6, 11, 26, 361, 382, 431, 479.
Fontanin M. G., 343.
Fortunescu D. C., 342.
Fraile A., 358, 414.
Frégier, 352.
Friedman-Câmpina I. B., 461.
Fundăţeanu C. I., 22.

Gabrielescu R., 11.
Gaiu Gh. N., 107, 469.
Gâlcă I. T., 11.
Galileo Galilei, 70, 97, 98, 358, 413.
Ganea N., 134, 138, 470.
Gans R., 486.
Gauss, 421.
Gautier-Villars, 218.
Genilie I., 27.
Georgescu, 395.
Georgescu, Diacon, 341.
Georgescu I. N., 11, 386.
Georgescu N. N., 11.
Georgescu Răducanu 66, 262, 527.
Georgescu-Roegen N., 11.
Georgescu-Roegen Otilia, 6, 11, 459.
Georgescu-Val N., 11, 388.
Gergonne, 500.
Ghenea T. A., 562.
Gheorghieş Al. G-l., 12
Gheorghiu C. Ad., 5, 12, 31, 118, 330, 458.
Gheorghiu Al., 12.
Gheorghiu Th. Gh., 5, 6, 12, 31, 118, 170, 172, 268, 275, 386, 503.
Gheorghiu P. I., 419.
Gheorghiu S. I., 12.
Gheorghiu A. M., 12.
Gheorghiu C. Oct., 328. 461, 463, 469, 470, 472,
Gheorghiu E. Oct., 90, 129, 134, 138, 176, 285, 320, 322, 327, 328, 330, 332, 366, 377, 380, 429, 471, 521, 566.
Gheorghiu M. Oct., 231, 285.
Gheorghiu A. Şerb., 12, 47, 49, 143, 157, 192, 207, 221, 224, 239, 286, 336, 352, 353, 382, 432, 479, 527, 546, 576.
Ghermănescu M., 5, 6, 12, 35, 36, 48, 65, 66, 118, 124, 125, 165, 176, 177, 190, 191, 214, 215, 238,

*) Acelaşi cu *Stelică Fl.*

286, 304, 306, 336, 375, 432, 433, 467, 469, 480, 508, 509, 510, 519, 520, 526, 572, 573, 575.
Ghermani D., 12, 166, 391, 434, 552.
Ghimuş D. A. Lt-Col., 12.
Ghircoiaşu V. N., 12, 104, 150, 311.
Ghişa V. E., 358,
Ghişoiu I. P., 12, 562.
Ghiţă M. V, 134, 254.
Ghiţescu D. A., 419.
Ghiţescu A. M., 39.
Ghiţescu Sp., 12.
Ghiţescu V., 5, 6, 12, 46, 66, 85, 87, 95, 144, 186, 188, 216, 236, 303, 377, 378, 385, 316, 519.
Ghiulea R., 170.
Gibbs W. J., 71, 484.
Gilbert, 507.
Glígor N. I., 134, 138, 188, 231, 233, 328, 329.
Gloden A., 164, 238, 258, 259, 356.
Godeaux A., 414.
Godeaux L., 346.
Goormaghtigh R., 265.
Gorciu Gh. V., 12.
Goursat E., 208
Graf U., 218.
Grecescu I., 343.
Grecu M. G., 419.
Green, 530, 531, 532, 535.
Grigorescu C., 12.
Grumăzescu M. S-Lt., 138, 180, 188.
Guţu I. A., 12, 107.
Guţu I. I., 13.
Guţu V., 13.

Haarbleicher A., 150.
Haideş V. A., 573,
Halley Ed., 291, 292.
Hamerak C., 170.
Hamilton, 295.
Handwiger H. von, 118.
Hanganu D. M., 13.
Haret C. Sp., 241, 242, 243, 344.
Hermann V., 170.
Hermite, 523.
Hilbert D., 552.
Hofer O., 308.
Hoffman E. J., 218.
Horia, 341.
Horninger H., 218.
Hospital, 62, 75, 150, 330.
Hulubei H., 509.

Iacob Caius, 118, 433.
Iacob St. E. Cpt., 92, 134, 139, 191, 236, 275, 333, 380, 419, 429, 430, 469, 524, 574.
Iacomi Elena, 399.
Iacomi D. M., 39.
Iancu D., 27.
Ianculescu R., 13.
Ieşan Şt. Al., 39, 254.
Iliescu C. C., 91, 139, 180, 235, 254, 377, 464, 469, 470, 476, 526, 566, 568,
Iliescu Gh., 5, 13, 386.
Iliescu-Brânceni N., 413.
Ioachim, 341.
Ioachimescu Gh. A., 13, 25, 98, 99, 100, 103, 116, 145, 148, 190, 266, 284, 314, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 388, 390, 391, 392, 393, 394, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 450, 503, 552,
Ioachimescu A. Gh., 13, 394.
Ioachimescu N., 341.
Ioanovici A., 13.
Ion, 395.
Ionescu Al., 510.
Ionescu Bogdan, 313.
Ionescu Cornel, 461.
Ionescu V. D., 6, 13, 327, 330, 357, 405, 433, 448, 461, 509, 563.
Ionescu P. H., 6, 13, 318.
Ionescu Ion, 5, 6, 13, 25, 28, 29, 30, 42, 46, 71, 85, 91, 93, 96, 108, 119, 139, 142, 166, 167, 190, 270, 300, 312, 313, 334, 340, 350, 358, 381, 385, 386, 388, 389, 390, 391, 392, 414, 429, 430, 450, 454, 455, 457, 476, 478, 501, 505, 511, 525, 553, 557, 573, 574.
Ionescu V. N., 188, 378.
Ionescu F. P., 91, 129, 138, 254, 327, 429.
Ionescu I. Paul, 13.
Ionescu Tib., 13.
Ionescu-Bujor C., 5, 6, 13, 208, 448.
Ionescu-Ţiu D. C. Cpt., 6, 13, 346, 515.
Ionescu-Zane D. Gh., 13.
Iorgulescu N. F., 134.
Isac Gr. Em., 376.
Isac I. I., 516.
Istrati C. Dr., 29.
Istrati C. Lt.-C-dor, 13.
Iupceanu Ştefania, 414.
Ivan C. Z., 39.

Jacobi C., 414.
Javelot R., 246.
Jerabeck, 270, 271.
Joachimsthal F. 352, 353.
Jung F., 296.
Jurist Gh. Vlad, 464, 469, 476.
Jurist V. Vlad, 180.

Kantz G., 218.
Kepler, 98.
Kiepert, 324.
Kirsten W., 218.
Klose A., 218.
Königsberger L., 414.
Konteschweller M., 553.
Koschmieder L., 218.
Kreis Fr., 267.
Kubota M., 155.

Lagrange C. J., 124.
Laguerre, 523.
Laissant A. C., 114, 163.
Lalane L., 29.
Lalescu Tr., 142, 153, 388, 389, 392.
Lalu, 395.
Lamoth P., 13.
Landau, 358.
Laplace P. S., 118, 241, 242.
Lascu Bal, 14, 70, 329.
Lazu C., 14.
Le Verrier, 505.
Lebesgue H., 118.
Legendre M. A., 167.
Leibniz G. G., 509.
Lemoine E., 80, 121, 122, 270, 322.
Lemoyne T., 388.
Letac Ad., 69, 258.
Leonida D., 14.
Lie Sophus, 358.
Linteş G. I. C-dor, 5, 14, 26, 46, 58, 71, 83, 115 125, 126, 143, 163, 190

217, 227, 229, 263, 265, 286, 300, 303, 333, 334, 355, 376, 385, 408, 414, 427, 428, 431, 453, 465, 470, 478, 509, 510, 539, 548, 553, 575.
Lipschitz, 118.
Liteanu I. Gh. G-l, 5, 6, 14, 47, 139, 162, 268, 270, 312, 384, 389, 395.
Livada F. Gr., 14.
Livada C. M., 170.
Longchamps G., 506.
Loria Gino, 118.
Lotze A., 217.
Lucas Ed., 84, 302.
Lupa N. A., 39.

Mahrenholz I., 573.
Malaxa C. Elena, 14.
Malaxa N., 14.
Malcoci C., 14.
Malo, 522, 523, 524.
Manafu V., 14.
Manoil E. Col., 39, 87.
Manoilescu M., 14, 361.
Manolache C. M., 91, 139, 378, 380, 472.
Manolescu I., 217.
Mărăcine B., 14.
Marcovici E., 31.
Marcovici S., 349.
Mărculescu Origen, 174.
Marcus B., 35, 36, 134.
Mareş T., 14.
Margulius M., 458.
Marian V., 6, 14, 25, 29, 291, 313, 358, 387, 388, 389.
Marie M., 506.
Marinescu I., Viorel, 39, 188.
Marrabico Fr., 119.
Martac V. R., 461.
Massler E., 318.
Mateescu A., 134.
Mateescu Cr., 14, 391.
Mateescu Iul., 552.
Mateescu Sc., 343.
Mătieş V. I., 253, 361, 362, 364.
Matei D. D., 170.
Mavrodin D. D., 170.
Mehedincu V., 312, 509.
Meixner J., 218.
Melik M. I., 167.
Menabrea, 26
Menelaus, 62.
Meray Ch. M., 119.
Mereuţă E., 14, 386, 562.
Mereuţă V., 14.
Metea Virg., 23.
Michel Ch., 345, 347.
Miclescu A. Cpt., 14, 72.
Miclescu Em, 166
Mihăescu Şt., 437.
Mihăiescu S. Şt. 15, 220, 228, 287, 335, 370, 374, 375, 431, 470, 574
Mihăileanu N. N., 5, 6, 15, 270, 288, 328, 335, 384, 386, 431.
Mihăilescu C. C., 93, 124, 134, 357.
Mihăilescu I. St., 347.
Mihalopol C., 15.
Mihoc Gh., 15, 510.
Mihu C., 15, 48, 174, 278, 280, 288, 382.
Milea C. C., 24.
Milea D, 343.
Milea G. E., 419.
Minea V. A., 470.
Mircea M. E., 15.
Mirescu P., 15.
Miroslav St. T., 511.
Mischinea St. D., 419.
Mişicu V. M., 378.
Mitescu C, 15.
Mititelu C. Cl., 15.
Mititelu C. I., 15, 361.
Miu M I., 15.
Modâlcă S. Em., 23, 33, 89, 124, 171, 192, 379, 516, 546.
Modâlcă S. Maria-Ana, 171.
Moessner A., 64, 164.
Mohr E., 218.
Moisil C. Gr., 87.
Moivre, 62, 230, 429. 551.
Molsen K., 218.
Montel P., 388.
Moreux Th., 388, 389.
Morţun Gh. Em., 15, 94, 284, 479.
Moscovici E. N, 134.
Moţoc D. M., 419.
Muntean Gh. L., 378.
Musceleanu S. Doru, 179, 327.
Musceleanu S. I., 327.
Musceleanu S. Şt., 124.
Musceleanu Vinicius I., 124, 509.
Musta St., 252.
Myller A., 299, 494.

Nache D. D., 139, 254, 376, 377, 429, 470, 573.
Naum T., 291, 292.
Naumescu G. C., 553.
Neamţu P., 15.
Negrea A. L. M., 124, 231, 330.
Negrescu C. I., 38, 134. 179, 229, 231, 321.
Negruţzu Fl., 72.
Neumann, 533.
Negură G. St., 15.
Nestor G. D, 15.
Neuberg J., 66.
Newson B. H., 167.
Newton Isac, 29, 71, 77, 119, 291 292, 313.
Nichifor A. G., 15.
Nicolau Al., 15.
Nicolau Gr. C., 38, 134.
Nicolau H. C., 25.
Nicolau D. H., 419.
Nicolau Ţ. M., 15, 320.
Nicolicescu N. Gh., 562,
Nicomede, 162.
Niculescu I. R., 16.
Niculescu V. Al., 5, 6, 16, 94, 448,
Niculescu Cr., 16.
Niculescu C. Mircea, 38, 328, 366.
Niculescu Miron, 16, 459.
Niculescu-Niculcea F., 510,
Niewenglowski B., 236, 506,
Noguès R., 372.
Nunes P., 358.

Oanţă I. P., 233.
Oblath R,, 357, 358,
Olteanu N. Sorin, 233.
Onicescu O., 6, 16, 510.
Oprea D. G., 39, 134, 233, 254.
Oprea D. Nifon, 254.
Orănescu O., 16, 491, 493, 561.
Orăşanu D. C., 16.
Orăşeauu Gr., 16.
Oteteleşanu M., 391.

Padoa A., 358.
Păduraru O., 27.
Pagès 507.
Pălăcianu D. V., 254, 566, 568.

Palacias F., 70.
Panaite N. Th., 16,
Panaitescu Sc., 22.
Pantazi Al., 1, 6, 16, 71, 386, 440, 448.
Pantelimon P. C., 174.
Pantelimon V. C., 31, 134, 139, 174, 176. 182, 188, 232, 235, 266, 461, 463, 516, 521, 565.
Papelier G., 229, 389.
Pârvan D. I., 377, 567.
Parepeanu Gh., 552.
Pârvu A., 16.
Păsăricâ Fl., 5, 16.
Pascal, 45, 62 115, 118.
Pascaru I. C., 78.
Patriciu D., 454.
Patriciu G. T., 22.
Patru M., 510.
Paun M. G., 419.
Păunescu C. Victor, 476,
Paşoi N. D., 134.
Pătrăscioiu I. M., 470, 566, 568.
Pătrăscioiu M. M., 377.
Pavel Dorin, 16.
Paveloiu N. 414.
Pavica A. V., 254, 389.
Perlea G. D. 16.
Perrin J., 509.
Persu A., 16.
Petculescu N. I., 166.
Petian G., 118.
Petre Gh. O., 510.
Petrescu Cr., 510.
Petrescu S. Gh., 17.
Petrescu Iulian, 176, 207, 225.
Petrescu N., 134.
Petrescu P. Lt.-Col., 17.
Petrescu Seb., 356.
Petrescu St., 508.
Petrovanu D. G-l, 377.
Pherechyde, 166.
Philipide M., 17.
Picard E., 118, 358,
Picard C. Sophie, 218.
Pihan P. A., 349.
Pimen, Mitropolit al Moldovei, 480.
Pintilie I. I., 84.
Pitiş L. N.-A., 134, 254, 285, 378, 429.
Poincaré, 242.
Poisson, 241, 242.
Pompeiu D., 74, 118, 247, 310, 357, 391, 501, 508.
Pop C-tin, 509.
Pop. G. Slugerul, 167.
Popa N. A., 39, 129, 131, 231, 232, 277.
Popa G. I., 419, 562.
Popa D. M., 31, 33, 174, 366, 461, 516, 521.
Popa A. N., 254, 390.
Popa N. N., 38, 138, 470,
Popescu I. Ad., 138, 251, 274, 464.
Popescu C. C., 315.
Popescu D., 419.
Popescu Fl., 133, 327, 328.
Popescu I. Gh. G-l, 219, 220, 232, 239, 335.
Popescu I., 22.
Popescu M. I. Maior, 17.
Popescu L., 414, 510, 553.
Popescu Gh. M., 85, 139, 176, 229, 254, 271, 283, 328, 332, 377, 380, 387, 390, 448, 461, 470, 471.
Popescu N., 315.
Popescu Victor, 17.
Popescu Valentin, 553.
Popescu C. V., 418.
Popescu-Botoşani Gh., 17, 131.
Popescu-Ioachimescu Gh., 341.
Popescu-Stăneşti I. M., 237.
Popovăţ P., 118.
Popovici And., 414, 510.
Popovici C. C., 318, 324, 557.
Popovici Th. I., 318.
Popoviciu Tib., 6, 17, 48, 112, 118, 157, 159, 306, 335, 392.
Popp N. C-dor, 17.
Popp Tr., 17, 386
Portocală M., 17, 166, 167.
Potopeanu Gh. G-l, 17.
Prandtl L., 218.
Praporgescu N., 17.
Prazmowski A., 505.
Presan, Mareşalul, 302.
Pretorian Şt., 217.
Procopiescu M., 458
Profir I., 414.
Protopopescu Gr. Col., 17.
Provinceanu M., 17.
Ptolomeu, 62, 98.
Purica I., 180, 470.
Puchiu T. Gh., 254, 377, 470.

Radian Dan, 510, 553.
Radoveanu N. N., 419.
Răducanu I. G., 573.
Rădulescu I. M., 17, 287, 528.
Rădulescu Gh. Şt., 328.
Raduleţ R., 509.
Raicu Virg., 179.
Raşcu M. R., 118.
Raymond C. L., 343.
Reischer H., 516.
Rengel E., 218.
Rentea Gr. N., 194.
Resmeriţă T., 361.
Revici T., 17.
Rios S., 552.
Ripianu D., 82, 176, 366, 427, 520.
Riureanu M. I., 166, 167.
Rohr I. A., 366.
Rollea C. V., 327.
Rolle, 119, 397, 554, 555.
Romana A., 170.
Romanescu Cicerone, 233, 277.
Romaşcan G. Georgeta, 24, 312.
Roşculeţ N. M., 171.
Roşu Al. Al., 5, 6, 18, 348.
Roşu T. N., 254, 377.
Roşu V., 18.
Rouché E., 66.
Rua G. J., 358.
Rudeanu V. G-l, 290.
Rusu N. C., 419.
Rusu L. M., 366.
Ruzvan I. T., 18.

Sacter O., 224.
Şaichin O. A., 224, 516.
Sălăgeanu A., 18.
Saligny M., 18.
Salmon, 80, 81.
Salomon, 97.
Sanvisens Fr., 552.
Săpunaru S. Gh., 18.
Sarian M., 5. 18, 313, 364.
Sauciuc I. L., 509.
Saulea F., 170.
Sauzin, 119
Savin C. I. Lt., 18.
Savul M., 509.
Sbârnea D. Gh., 134, 176, 277, 328.

Schileru-Dili C. I., 18.
Schmidt H., 217.
Schottky, 356.
Schouten, 484.
Schröder K., 217.
Schur I., 522, 523, 524.
Segal J., 273, 516.
Segall L., 269.
Segârceanu N. 29.
Seni Cl., 39, 42, 135, 136, 139, 181, 188, 235, 278, 285, 332, 378, 469, 470.
Seni G. Dinu, 254.
Şerban A. T., 124, 176, 366.
Şerban-Ulmeni D., 419.
Şerbănescu I., 72.
Şerbănescu Gh. V., 18.
Sergescu B., 18.
Sergescu P., 6, 18, 70, 71, 119, 312, 344, 454, 505, 508, 510, 522, 523, 552.
Sfinţescu I. C., 18.
Sierpinschi W., 389.
Silva A. D. Da., 313.
Simionescu D. G., 5, 6, 18, 33, 47, 77, 115, 261, 326, 432, 464, 479, 504, 576.
Simionescu I., 436.
Simionescu M., 18.
Simu, 395.
Simson T., 28, 202, 203, 265, 368, 371, 375, 431, 505, 544, 545.
Şleahtenea, D., 18.
Smântânescu A., 19.
Sotirescu N., 328.
Spathy I. R., 560.
Spielrein J., 294, 483.
Staicu I. C., 91, 129, 285, 327, 378, 429.
Stamate I. I., 174, 312, 358, 366, 516, 552.
Stambuleanu Ad., 166.
Stamatescu I. G., 19.
Stamatescu I., 19.
Stamatescu Val., 156.
Stan I. A. Cpt., 19, 389, 562.
Stan A. D., 19, 25, 356.
Stancu S. Marin, 19.
Stancu S. Mircea, 19.
Stănculescu S. M., 43, 45, 48.
Stănescu I., 509.
Stănescu P. P., 509.
Stănescu N. V., 357.
Ştefan V., 357.
Ştefănescu I. C., 419.
Ştefănescu E., 267, 315.
Ştefănescu D. N., 19, 366, 377, 386, 566.
Ştefănescu-Goangă A., 19.
Ştefanovici I. M., 124, 357.
Steiner, 324, 325, 326, 371, 372, 432, 505, 507, 508.
Steiner Z., 170.
Stelian Fl.*) 429.
Stern H. E., 414.
Stewart, 509.
Stirling, 221, 450, 519, 520.
Stoenescu I. Al., 6, 19, 43, 72, 96, 136, 138, 170, 182, 186, 267, 281, 283, 284, 324, 342, 357, 386, 389, 395, 441, 450, 470, 471, 473, 476, 480, 493, 514, 528, 546, 561, 576.
Stoenescu D. Mirel, 38, 122, 231, 233, 235, 275, 329, 366, 461, 516, 567.
Stoica D. Al., 312, 458.
Stoica V. D., 5, 19, 115, 348, 386.
Stoicescu T. T., 19, 386, 574.
Stoika V. V., 19.
Stratilescu Gr., 340.
Stuckelberg von Breidenbach G. C. E., 118.
Sugot G., 388, 489.
Swedberg, 28, 218.
Sydney, 384.

Ţabacovici N., 170.
Tănăsescu M. A. G-l, 19.
Tănăsescu A. T., 19.
Tănăsescu Gh. V., 188.
Tarry G., 455.
Ţapu N. V., 285.
Taylor, 552.
Tchebyceff, 85.
Teixeira G., 506.
Teodoreanu V., 20.
Teodorescu C. C., 6, 20, 180, 340, 357, 391, 413.
Teodorescu St. I., 192, 418.
Teodorescu Laurenţiu, 395.
Teodorescu V. N., 20, 289, 290, 395.
Teodoriu L., 72.
Teoharie C., 414.
Terquem, 115.
Thébault V., 113, 114, 121, 123, 149, 335, 407, 478, 499, 509.
Theodorescu N. Dorin, 516.
Theodoru H., 20.
Thierrin H. G., 20.
Tilică C. Şt., 129, 170, 171, 275, 327, 328, 516, 524.
Tincu C. C., 378, 429.
Ţino N. O., 5, 6, 20, 72, 83, 126, 128, 129, 130, 131, 134, 136, 211, 286, 386, 390, 433, 502.
Ţintea M. I., 20 414.
Ţiţeica Gabriela, 5, 6, 20, 25, 87, 88, 90, 98, 144, 181, 182, 208, 240, 266, 348, 379, 386, 388, 392, 441, 443, 445, 500, 520, 546.
Ţiţeica George, 22, 153, 155, 338, 340, 343, 377, 385, 392.
Ţiţeica G. Radu, 20, 386.
Ţiţeica Şerban, 6, 10, 218, 386, 508.
Tofan C. A., 471, 573.
Tomescu Şt. I., 20.
Ţonciu Gh., 134, 233.
Topolescu Gh., 176.
Toporâscu, 386.
Toporescu Er., 552.
Toscana, Duce de, 97.
Trofim I. P., 39, 516.
Tudoran M. Lydia, 37, 38, 39, 84, 177, 179, 299, 300.
Tullea C. Gh., 20.
Turculeţ D. T., 129, 138, 233, 254, 330, 332, 470, 573.

Udrea A., 553.
Ulescu A., 20.

Văduva Fl. M., 224, 327, 353, 355, 515.
Vahlen Th., 509.
Vâlcovici V., 20, 46, 144, 244, 291, 360, 405, 442, 508.

*) Acelaşi cu *Floricã St.*

Vandermonde, 148, 149, 150, 364.
Vardala I., 20.
Vârgolici Steliana, 357.
Vârgoliciu, I., 167.
Vasilache I., 20.
Vasilescu C. Gr. 21, 391.
Vasilescu I., 378.
Vasilescu C. I., 21.
Vasilescu P. I., 39.
Vasilescu Pandele, 429.
Vasilescu I. T., 21.
Vasilescu-Karpen N., 340, 391, 437, 482, 508.
Vasilescu-Stabu A. M., 188, 516.
Vasiliu G. Dan, 21.
Vasiliu G. D-tru, 38, 39, 85, 121, 129, 134, 138, 139, 144, 233, 235, 254, 277, 333, 428, 429, 464, 466, 470, 472, 571.
Vasiliu C. E., 21.
Vasiliu D. Gh., 21, 376.
Vasiliu C. I., 21, 80, 82, 224, 226, 229, 230, 235, 270, 287, 357, 384, 432, 502.
Vasiliu M., 21.
Velea M., 419.
Velicescu T., 419.
Vercescu P., 217.
Vescan T. T., 21, 28, 218.
Viciu A. A., 21.
Viète Fr., 70.
Vigil L., 552.
Vijelie Gh. E., 275.
Vijelie Gh., 78, 124, 329, 516.
Vişa E., 118.
Vlad D. M., 254.
Vlădicescu Al., 414.
Vlăsceanu N. 414.
Voicu D. Gh., 179, 231, 233, 329.
Voicu N. Gh., 419.
Voicu C. I., 419.
Voinea P. R., 39, 86, 136, 179, 232, 275, 285, 329, 332, 378, 428, 429, 466, 470, 546, 576.
Volanschi A. Dan, 254, 389.
Vrânceanu G. G., 118, 254, 377, 388.
Vuia Tr., 414.

Wallis, 451.
Wandermonde, 509.
Wegener P. E., 62, 138, 174, 179, 189, 231, 235, 277, 332, 366, 378, 381, 429, 472, 476, 516, 566, 573.
Wilson, 62.
Wirtinger aus Wien W., 455.
Woinarovski R., 21.
Wolf Ch., 505.

Zacharias Max., 508.
Zaharia O. N., 419.
Zamfirescu C. Gr. 21, 481, 482, 483, 553.
Zamfirescu O. G., 419.
Zamfirescu G. I. Cpt., 6, 21, 31, 33, 191, 232, 233, 238, 287, 334, 484, 576.
Zapan Gh., 21.
Zapan Gr. C-dor, 5, 6, 21, 415.
Zareli N., 429.
Zlatcu St. C., 21.

K. LUCRĂRI CITATE *)

1. Cărţi, Lucrări extrase, Teze

		Pag
N. Abramescu	Algebra	24
N. Abramescu	Curs de matematici generale	388
N. Abramescu	Lecţiuni de geometrie analitică	162
G. Adamescu	Viaţa şi activitatea lui Sp. Haret	344
C. Alasia	La recente geometria del triangolo	121
A. Angelescu	Lecţiuni de calcul diferenţial	387
Th. Angheluţă	Culegere de exerciţii şi probleme de analiză, teoria funcţiilor, mecanică	397
Th. Angheluţă	Exerciţii şi probleme	451
G. Asaki	Elemente de matematică	511
Aubert et Papelier	Exercices d'algèbre	229
Maior M. Bărbulescu şi Cpt. Dragomirescu-Buzne	Studiul reculului în construcţia unei guri de foc.	389
A. Beleş	Cutremure şi construcţii	185
A. Beleş şi St. G. Bălan.	Mecanica teoretică şi practică	388, 389, 390
C. Bourlet	Leçons d'Algèbre élémentaire	388

*) In acest capitol nu sunt trecute lucrările citate în *Bibliografie* şi în *Diverse*. Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică*.

		Pag.
Gh. Bratu	Cinci conferinţe de astronomie	390
Gh. Bratu	Curs de analiză matematică	388
Gh. Bratu	Curs de astronomie	389
R. D. Carmichael	Analyse indéterminée	74
O. Chisini şi Enriques	Geometrie algebrică	345
C. Coşniţă	Coordonnées barycentriques	122, 371
V. Cristescu	Culegere de probleme de trigonometrie	247, 275, 389, 551
I. A. Cucu Cpt.	Calculul aerodinamic al avionului	26
I. A. Cucu Cpt.	Calculul rezistenţei avioanelor	26
I. A. Cucu Cpt.	Torsiunea cilindrilor goi în interior, cu pereţii subţiri şi cu diafragma interior	25
G. Darboux	Principe de géométrie analytique	150
Ed. Dragomirescu-Buzne Cpt.	Problema proiectilelor utilizate în tragerile dintre avioane în lumina noilor realizări tehnice	390
Ed. Dragomirescu-Buzne Lt. şi Lt. I. N. Georgescu-Val.	Proiectile automotoare	388
Ed. Dragomirescu-Buzne Lt. şi Lt. A. I. Stan.	Avionul armă anticar	389
F. J.	Exercices de géométrie	53
F. G. M.	Exercices d'aritmétique	165
F. G. M.	Exercices de géométrie	53, 87, 415
Gh. Em. Filipescu	Statica construcţiunilor şi Rezistenţa Materialelor	387
Gh. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, Tr. Lalescu, George Ţiţeica	Vocabularul matematic	392
I. Genilie	Principii de geografie şi astronomie	26
I. Genilie	Geografia istor., astron. şi civ. a contin. în genere şi a României în parte	27
M. Ghermănescu	Curs de algebră superioară	35
L. Godeaux	Leçons de géométrie perspective	346
Goursat	Cours d'Analyse	208
I. Grecescu	Aritmetica raţionată	343
A. Haarbleicher	De l'emploi des droites isotropes comme axe de coordonnées	150
Sp. Haret	Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires	241
Hütte		248
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme de algebră	116, 314, 392, 450

Pag.

A. G. Ioachimescu . . . Culegere de probleme de mecanică, revizuită de Domnişoara GABRIELA ŢIŢEICA . . 25, 388
A. G. Ioachimescu şi Gh. Ţiţeica . . . . . Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică 392
I. Ionescu . . . . . Beton armat 388
I. Ionescu . . . . . Culegere de aritmetică clasa II-a. 31, 188, 388, 476
I. Ionescu . . . . . Maxime şi minime geometrice 25, 389, 390
I. Ionescu, Gh. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu, V. Cristescu . . . . . Culegere de probleme de Aritmetică, Geometrie, şi Trigonometrie 392
R. Javelot . . . . . Exercices d'Algèbre 246
C. A. Laisant . . . . . A. F. A. G. 114
C. A. Laisant . . . . . Recueil de problèmes de mathématique . . . 163
T. Lalescu . . . . . La géometrie du triangle 141, 153, 388
T. Lalescu . . . . . Tratat de geometrie analitică 389
T. Lemoine . . . . . Les lieux géométriques 388
E. Lucaş . . . . . Théorie des nombres 84, 302
V. Marian . . . . . Elementele lui EUCLIDE 25, 387, 388, 389
Ch. Michel . . . . . Compléments de géometrie moderne . . 345, 347
P. Montel . . . . . Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes 388
Th. Moreux . . . . . Pour comprendre l'algèbre 388
Th. Moreux . . . . . Pour comprendre la géométrie 389
I. Newton . . . . . Filosofiae naturalis principia matematica . . 291
B. Niewenglowski . . . Cours d'algèbre 236
B. Niewenglowski . . . Géométrie analytique 506
R. Noguès . . . . . Cours de mathématiques spéciales sous forme de problèmes 372
A. Pantazi . . . . . Elemente de geometrie proiectivă diferenţială a curbelor şi suprafeţelor 388
G. Papelier . . . . . Précis de mécanique 389
A. P. Pihan . . . . . Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux, anciens et modernes 349
H. Poincaré . . . . . Leçons de mécanique céleste 242
D. Pompeiu . . . . . Raţionamentul aritmetic 74
T. Popoviciu . . . . . Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame 388
A. Prazmowski . . . . Erorile personale în observaţiile astronomice . 505
I. M. Riureanu . . . . Elemente de geometrie 166
E. Rouché & Ch. de Comberousse . . . . . Traité de géométrie 66
Salmon . . . . . Sections coniques 80, 81
P. Sergescu . . . . . Curs de Algebră superioară 522

Pag.

P. Sergescu . . . . . Monografie asupra ecuaţiilor cu toate rădăcinile reale 523
W. Sierpinschi . . . . . Lecţiuni despre mulţimile analitice. 389
J. Spielrein . . . . . Vektorrechnung 294, 483
Al. Stoenescu . . . . . Probleme de oscilaţii 389
G. Sugot . . . . . Balistique intérieure théorique et tables numériques 388, 389
G. Teixeira . . . . . Courbes spéciales remarquables 506
G. Ţiţeica . . . . . Culegere de probleme de geometrie . . 153, 377

2. Periodice

Arhivele Olteniei 342, 343
Buletinul Asociaţiei generale a Inginerilor din România 25
Buletinul Centrului de Instrucţie al Artileriei Antiaeriene. 25
Buletinul de Fotogrametrie şi Agrimensură 25
Bulletin de Mathématiques et de Physique de l'Ecole Polytechnique de Bucarest 25
Curierul Matematic 207
Foaie Matematică 207
Gazeta Matematică 5, 10, 22, 23, 24, 30, 31, 36, 45, 53, 60, 65, 66, 67, 68, 98, 99, 108, 109, 112, 115, 119, 124, 140, 142, 144, 148, 157, 160, 163, 164, 165, 166, 171, 179, 190, 207, 210, 211, 212, 224, 241, 243, 244, 251, 252, 253, 254, 259, 261, 262, 263, 267, 270, 278, 286, 289, 290, 291, 299, 301, 304, 306, 315, 319, 333, 335, 338, 340, 342, 347, 348, 349, 350, 352, 353, 361, 382, 384, 385, 388, 391, 405, 406, 407, 419, 433, 441, 442, 448, 449, 450, 452, 459, 466, 471, 573, 481, 482, 499, 501, 502, 503, 504, 505, 516, 520, 525, 526, 536, 537, 543, 544, 546, 547, 548, 551, 553, 557, 560, 561, 572, 574.
Gazeta Matematică, Suplimentul cu exerciţii 60, 179, 385
Gazeta Matematică, Volum jubilar. 388, 389, 390
Mathésis 113, 123, 499, 506
Mercantilulŭ 342, 343
Nouvelle Annales 262
Nouvelles Annales des Mathématiques 122, 506
Revista Artileriei 25
Revista Geniului 25
Revista Matematică din Timişoara 135, 230, 258
Revue de Mathématiques spéciales 507
Sphinx 258
Vocea Română 343

L. ERATA

Pagina şi Volumul sau Problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea de făcut*
Pag. 85 şi 92	144
„ 161 şi 179	240
Prob. 4730, 5733 şi 5734	240
Pag. 151, 152, 154, 156, 192 şi 220	288
„ 315	384
Prob. 5759	384
Pag. 341, 342 şi 397	480
Prob. 5791	480

M. SUPLIMENTE

Burse şi premii din fondurile Societăţii *Gazeta Matematică*. Suplimentul la Nr. 1 . . . . . 14 pagini
Dare de seamă asupra mesei comune. Supliment la Nr. 9 . . . 12 „

N. PUBLICAŢIUNI INAFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

N. Abramescu . . . . . Lecţiuni elementare de algebră superioară. Ediţia 8-a
I. I. Chiţulescu . . . . Culegere de probleme de geometrie descriptivă. Partea I.
V. Cristescu . . . . . Culegere de probleme de trigonometrie. Partea III: Trigonometrie sferică. Revăzută şi adăogită de Generalul GH. I. LITEANU.
A. G. Ioachimescu . . . Culegere de probleme de mecanică Ediţia II. Revăzută şi adăogită de GABRIELA ŢIŢEICA.
Suplimentul cu Exerciţii. Vol. IV. 9 numere . . . . . 108 pagini

O. FOTOGRAFII ŞI PLANŞE

1. Fotografia lui N. V. TEODORESCU 289
2. Fotografia Profesorului A. GH. IOACHIMESCU . . . . . 336 şi 337
3. Ultima fotografie a Profesorului A. GH. IOACHIMESCU 337
4. Fotografia Profesorului A. GH. IOACHIMESCU rostindu-şi cuvântarea cu ocazia sărbătoririi a 40 de ani de existenţă a *Gazetei Matematice*. 340
5. Fotografia lui GR. ZAMFIRESCU 481

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Cubat H. A. (E, P); *Donţu G. G.* (5732, 96, 801, 17); *Drăghicescu P. P.* (4376, 5099, 552, 83, 801, 02, 13, N, P); *Dumitrescu Gh. Tr.* (4879); *Florescu B. I.* (A, N); *Gheorghiu C. Oct.* (5791, 812); *Gheorghiu E. Oct.* (1969, 3713, 4070, 5683); *Gloden A.* (P); *Iacob Şt. E.* Căp. (5765, 801, E, P); *Ionescu V. N.* (5754, 91, 94); *Mătieş V. I.* (A, N, P); *Nadolu Gr.* (5707, 54, 60, 91); *Pârvulescu V. C.* (5730, 91); *Pitiş L. Armand Nicolae* (5657, 763, 76, 91); *Teodorescu St. I.* (4360, 734, 5506); *Thébault V.* (P); *Wegener N. E.* (4257, 5217, 52, 595, 687, 707, 75, 88, 91, 96, 817).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Folle vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 100 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 19.526